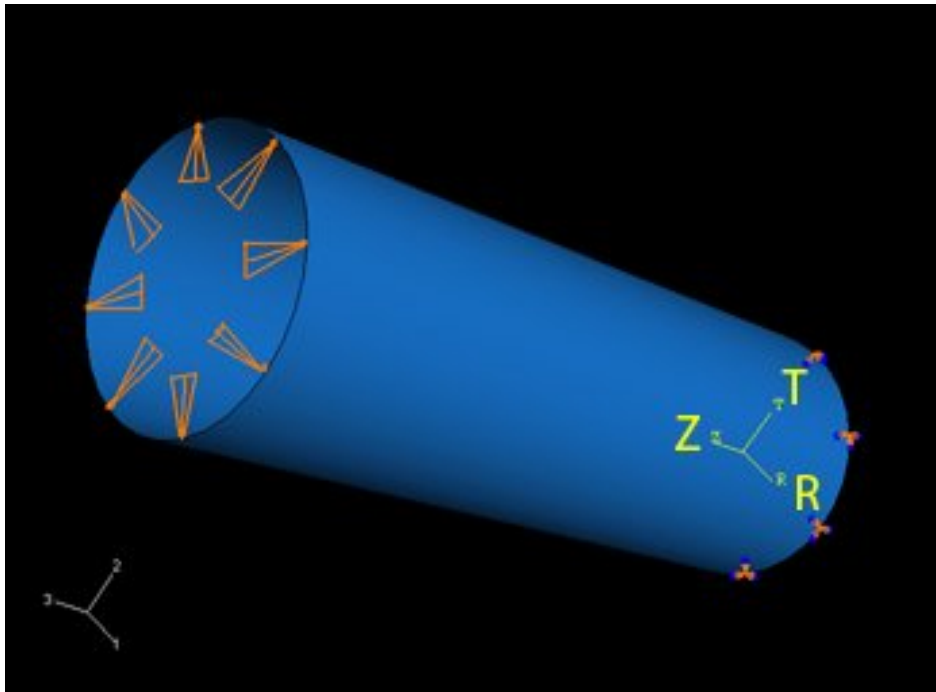


ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΕΡΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

Πτυχιακή Εργασία

Θέμα: ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΓΩΓΟΥ ΜΕΓΑΛΟΥ ΜΗΚΟΥΣ
ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΠΙΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.



Φοιτητές

Δημήτριος Κ. Δοκτώρης
Ιωάννης Α. Πασχαλίδης

Επιβλέπων Καθηγητής
Πασχάλης Κ. Γκότσης

ΜΑΙΟΣ 2009

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

1. Γενικά περί των Πεπερασμένων Στοιχείων και του ANSYS

1.1	Εισαγωγή.....	4
1.2	Η ιστορία των πεπερασμένων	5

Κεφάλαιο 2

Παραδείγματα

Π 2.1: Μελέτη κυλίνδρου υποκείμενου σε εσωτερική πίεση

2.1	Εισαγωγή	7
2.2	1 ^{ος} Τρόπος.....	10
	2.2.1 Υπολογιστικά αποτελέσματα	11
	2.2.2 Μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας	16
2.3	2 ^{ος} Τρόπος.....	18
	2.3.1 Αναλυτική λύση.....	23
	2.3.2 Ειδικές Περιπτώσεις.....	28
	2.3.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων του ANSYS με την αριθμητική λύση	29

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Γενικά περί των Πεπερασμένων Στοιχείων

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο τρόπος επιλύσεως προβλημάτων με χρήση των πεπερασμένων στοιχείων είναι σχεδόν ο ίδιος σε όλες τις περιοχές που εφαρμόζεται. Για παράδειγμα για την επίλυση μιας κατασκευής σχεδιάζουμε πρώτα την κατασκευή κατόπιν την χωρίζουμε σε μικρά γεωμετρικά σχήματα π.χ. τρίγωνα ή τετράπλευρα, τα οποία λέγονται πεπερασμένα στοιχεία. Οι ιδιότητες του υλικού και οι εξισώσεις που χαρακτηρίζουν το υλικό εξετάζονται στα πεπερασμένα στοιχεία σαν συνάρτηση των αγνώστων μετατοπίσεων στις κορυφές του πεπερασμένου στοιχείου (μέθοδος των μετατοπίσεων). Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις οριακές συνθήκες καθώς και τα φορτία (μηχανικά και θερμικά) καταλήγουμε στις εξισώσεις ισορροπίας της κατασκευής. Η λύση του συστήματος των εξισώσεων ως προς τους αγνώστους, οι οποίοι είναι οι κομβικές μετατοπίσεις είναι η ζητούμενη προσεγγιστική λύση. Γνωστών των κομβικών μετατοπίσεων υπολογίζονται στα διάφορα σημεία της κατασκευής οι τάσεις (σ), οι παραμορφώσεις (ϵ) και οι αντιδράσεις (R) των στηρίξεων.

Λόγοι ανάπτυξης της μεθόδου

Προβλήματα που δεν μπορούσαν να τα αγγίξουν οι επιστήμονες έως τώρα και τα θεωρούσαν άλυτα, με την χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή και των υπολογιστικών μεθόδων όπως των πεπερασμένων στοιχείων τα λύνουν σε μικρό χρόνο. Η ανάγκη της βιομηχανίας και των προβλημάτων της πράξης, οδήγησε στην ανάπτυξη γραφικών προγραμμάτων, τα οποία συνοδεύουν την ανάλυση-υπολογισμό που παρέχουν τα πεπερασμένα στοιχεία. Ο συνδυασμός των γραφικών με την ανάλυση-υπολογισμό των πεπερασμένων στοιχείων υψώνουν την επιστήμη, την απλοποιούν, την κάνουν προσιτή και δημιουργική(state of the art).

Προϊόν της συστηματικής εργασίας των ερευνητών είναι η ανάπτυξη των εμπορικών προγραμμάτων για τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Τα εμπορικά προγράμματα αποτελούνται από δύο μεγάλα προγράμματα, τα γραφικά και την ανάλυση.

α) Γραφικά προγράμματα

Τα γραφικά προγράμματα χρησιμοποιούνται πριν από την ανάλυση(Pre-proccesing) και μετά την ανάλυση(Post-proccesing).

- Pre-proccesing. Μη την χρήση του γραφικού προγράμματος το σώμα ή η κατασκευή σχεδιάζεται και κατόπιν διακριτοποιείται στα πεπερασμένα στοιχεία.
- Post-proccesing. Μετά την ανάλυση γίνονται γραφικές παραστάσεις των αποτελεσμάτων όπως είναι η παραμόρφωση του σώματος, η διανομή των τάσεων εντός του σώματος και άλλων.

β) Πρόγραμμα για την ανάλυση-υπολογισμό

Το πρόγραμμα της ανάλυσης χρησιμοποιείται για την μελέτη ποικίλων προβλημάτων που μπορεί να αφορούν την μηχανική των στερεών ή των κατασκευών, στα ρευστά, στην θερμότητα, στη ακουστική, στην κατεργασία των μετάλλων, στον ηλεκτρισμό και στον ηλεκτρομαγνητισμό και σε πολλές άλλες περιοχές.

Όλα τα ανώτατα ιδρύματα, τα ερευνητικά κέντρα, η βιομηχανία, οι τεχνικές εταιρείες, οι μηχανικοί της πράξης, οι προ-πτυχιακοί και οι μεταπτυχιακοί φοιτητές, χρησιμοποιούν εμπορικά προγράμματα για τον ηλεκτρονικό υπολογιστή όπως για παράδειγμα είναι τα παρακάτω: ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, MARC, ADINA, SAP90, COSMOS για την μοντελοποίηση (ή προσομοίωση) προβλημάτων. Τα προγράμματα παρέχουν υπορουτίνες (subroutines), ώστε ο χρήστης να μπορεί να προσθέσει το δικό του πρόγραμμα συνήθως σε γλώσσα προγραμματισμού FORTRAN ή C, για να προσθέσει πληροφορίες που δεν υπάρχουν στο εμπορικό πρόγραμμα, όπως για παράδειγμα να τροποποιήσει, να βελτιώσει ή να προσθέσει νέες καταστατικές εξισώσεις (constitutive equations).

Γιατί πρέπει να γνωρίζουμε τα πεπερασμένα στοιχεία;

Η θεωρητική γνώση των πεπερασμένων στοιχείων βοηθά να αναπτύξει ο φοιτητής, ο ερευνητής ή ο μηχανικός της πράξης την αυτοπεποίθηση και την ικανότητα να λύνει, να λειτουργεί και να ερμηνεύει σωστά τα αποτελέσματα που λαμβάνει από ένα πρόγραμμα, και αν χρειασθεί να γράψει το δικό του πρόγραμμα.

1.2 Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Το 1909 ο Γερμανός μαθηματικός Ritz ανέπτυξε τις αρχές της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Το 1915 ο Ρώσος μαθηματικός Galerkin ανέπτυξε σε βάθος την θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων. Η απουσία του ηλεκτρονικού υπολογιστή καθυστέρησε την διάδοση και περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου και παρέμεινε στάσιμη μέχρι της ανακαλύψεως του υπολογιστή. Με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή η μέθοδος έγινε γνωστή και διαδόθηκε στους ερευνητές.

Η ιδέα της ανάπτυξης της μεθόδου των πεπερασμένων «γεννήθηκε» στην αεροναυπηγική από την ανάγκη της εύρεσης λύσης στα δύσκολα προβλήματα που αντιμετώπιζαν στην κατασκευή των αεροσκαφών.

Το 1941 ο Hrenikoff εισήγαγε την καλούμενη framework method (μέθοδο του πλαισίου) με την οποία ένα επίπεδο ελαστικό μέσο μπορούσε να αντικατασταθεί με ένα ισοδύναμο σύστημα ράβδων και δοκών.

Το 1943 ο Γερμανός μαθηματικός Courant έλυσε το πρόβλημα της στρέψης χρησιμοποιώντας τριγωνικά στοιχεία με την αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας και την ονόμασε Rayleigh-Ritz μέθοδο. Επειδή τότε δεν υπήρχε ο υπολογιστής, η θεωρία του Courant δεν μπορούσε να εφαρμοσθεί και ξεχάστηκε μέχρι που ανακαλύφθηκε ο υπολογιστής και οι επιστήμονες ξανά θεμελίωσαν την μέθοδο.

Το 1955 ο Έλληνας Ι. Αργύρης έγραψε ένα βιβλίο με θέμα 'Ενεργειακά θεωρήματα και η μέθοδος των μητρώων' και εισήγαγε τις αρχές των πεπερασμένων στοιχείων.

Το 1956 οι Αμερικανοί Turner, Clough, Martin και Top υπολόγισαν το μητρώο δυσκαμψίας της ράβδου και άλλων στοιχείων.

Το 1960 ο I. Αργύρης και ο Kelsey δημοσίευσαν την εργασία τους η οποία βασιζόταν στις αρχές των πεπερασμένων στοιχείων.

Το 1960 ο Clough καθηγητής πανεπιστημίου 'University of California, Berkeley' της Αμερικής, χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το όνομα 'Πεπερασμένα στοιχεία' (Finite elements) στην εργασία του και από τότε όλοι χρησιμοποιούσαν την παρακάτω ονομασία.

Το 1967 οι Zienkiewicz και Chung έγραψαν το πρώτο βιβλίο των πεπερασμένων στοιχείων.

Από τότε ένας μεγάλος αριθμός δημοσιεύσεων και βιβλίων ακολούθησε με αντικείμενο την εφαρμογή των πεπερασμένων στοιχείων στην μηχανική, στα ρευστά, τη θερμότητα, την ακουστική, την κατεργασία των μετάλλων, τον ηλεκτρισμό και ηλεκτρομαγνητισμό και σε πολλές άλλες επιστήμες

Γενικά περί του προγράμματος ANSYS

Το ANSYS είναι ένα κατανοητό και γενικής χρήσης πρόγραμμα υπολογιστή που στηρίζεται στην θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων. Το ANSYS είναι ικανό να εκτελέσει στατικές και δυναμικές αναλύσεις ή αναλύσεις μεταφοράς θερμότητας, ροής υγρού καθώς και ηλεκτρομαγνητισμού. Το ANSYS υπήρξε ένα πρωτοποριακό FEA πρόγραμμα. Η τρέχουσα έκδοση του ANSYS έχει μια εντελώς νέα μορφή, με πολλαπλά υπολογιστικά συστήματα (παράθυρα) που ενσωματώνουν το Γραφικό Περιβάλλον του Χρήστη (GUI), ανοιγόμενα μενού, κουτιά διαλόγου και μια οριζόντια μπάρα με τα εργαλεία. Σήμερα θα βρούμε να χρησιμοποιείται το ANSYS σε πολλούς τομείς, όπως:

- Της μηχανικής
- Της αεροναυπηγικής
- Της ναυπηγικής
- Του ηλεκτρομαγνητισμού
- Της θερμότητας
- Της βιομηχανίας αυτοκινήτων

Για να χρησιμοποιήσει κανείς σωστά το ANSYS ή οποιοδήποτε άλλο FEA πρόγραμμα υπολογιστή, θα πρέπει να έχει κατανοήσει την θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων.

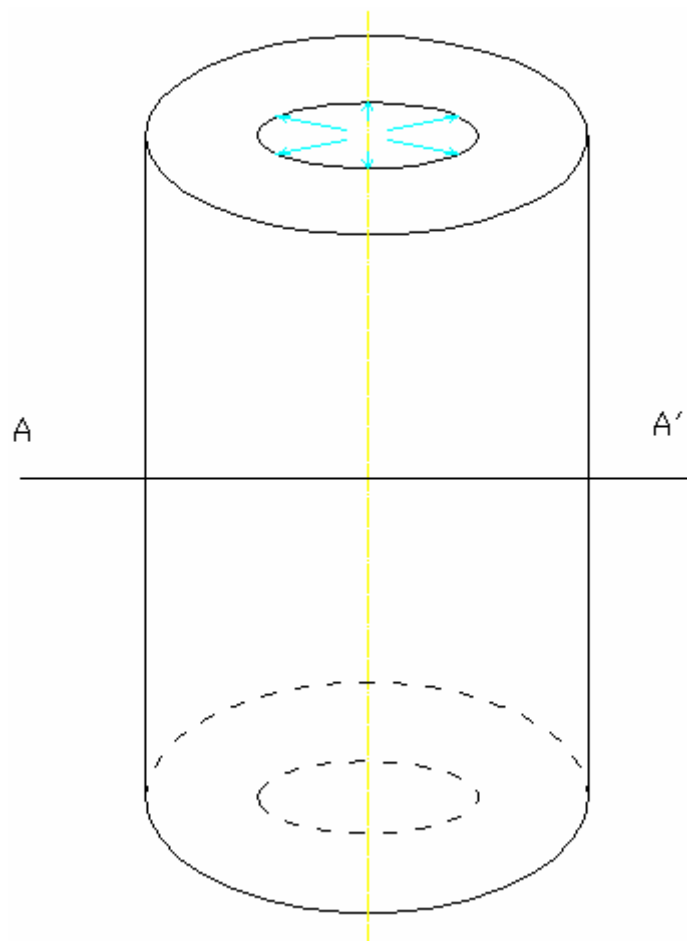
2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Παράδειγμα 2.1: Μελέτη κυλίνδρου μεγάλου μήκους υποκείμενου σε εσωτερική πίεση.

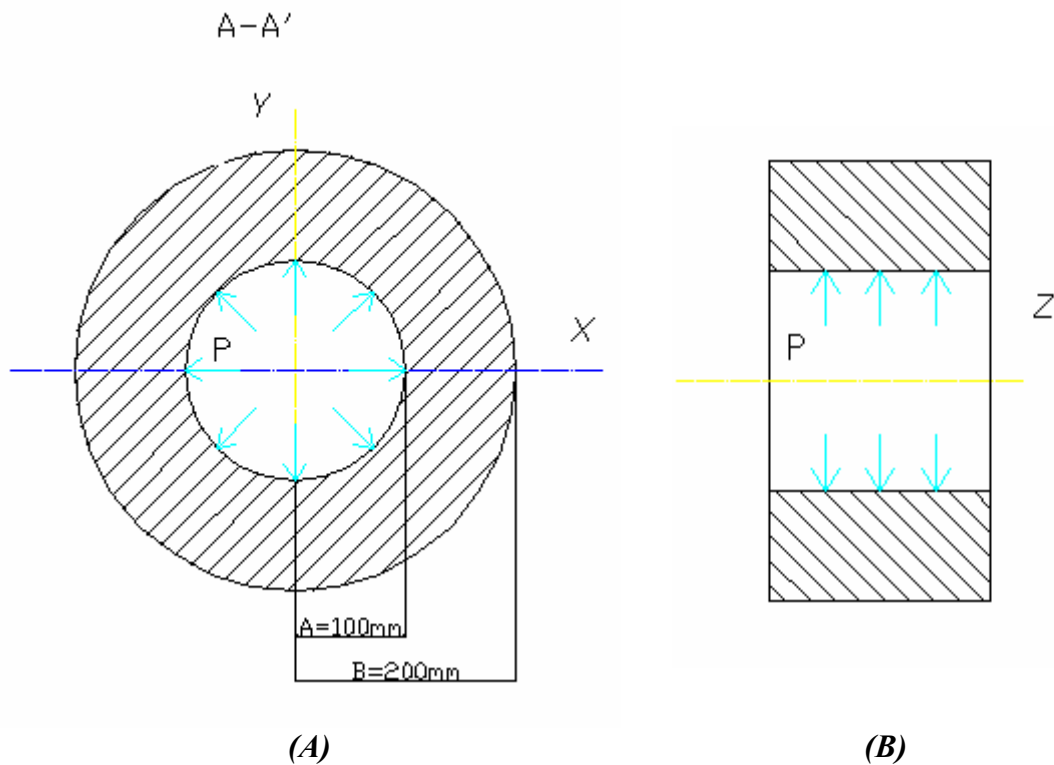
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παραμετρική ανάλυση του προβλήματος κυλίνδρου με εσωτερική πίεση.

Παράμετρος εξέτασης είναι η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας E .



Σχήμα 2.1



Σχήμα 2.2

Δίνονται:

- Εσωτερική ακτίνα $a=100\text{ mm}$
- Εξωτερική ακτίνα $\beta=200\text{ mm}$
- Πολύ μεγάλο μήκος κυλίνδρου
- Εσωτερική πίεση $P=10\text{ N/mm}^2$
- Λόγος του Poisson $\nu=0,3$
- Μέτρο ελαστικότητας $E=50000\text{ N/mm}^2$

Σκοπός του παραδείγματος είναι να υπολογισθούν οι μετατοπίσεις και οι αναπτυσσόμενες τάσεις.

Για την προσομοίωση του παραδείγματος χρησιμοποιούμε τους παρακάτω δύο τρόπους:

- 1^{ος} Τρόπος
Εξετάζοντας ολόκληρο τον κύλινδρο.
- 2^{ος} Τρόπος
Λόγω συμμετρίας του κυλίνδρου, εξετάζουμε ένα κομμάτι του κυλίνδρου.

1^{ος} ΤΡΟΠΟΣ

Το μαθηματικό μοντέλο του σχήματος (Σχήμα 2.2), απεικονίζεται στο σχήμα (2.3). Διαιρέσαμε τον κύλινδρο σε πολύ μικρά στοιχεία (quadrilateral elements) με την χρήση του προγράμματος ANSYS . Αυτό γίνεται για να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα μας. Τα δεδομένα του προβλήματος ήταν τα εξής εσωτερική ακτίνα 100 mm, εξωτερική ακτίνα 200 mm, εσωτερική πίεση $p=10 \text{ N/mm}^2$, λόγος του Poisson $\nu=0.3$ και μέτρο ελαστικότητας, $E=50000 \text{ N/mm}^2$. Από την προσομοίωση και επίλυση του προβλήματος με το πρόγραμμα ANSYS προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα.

Στο σχήμα (2.4) απεικονίζονται οι, σ_r , σ_θ και u ακτινικές τάσεις, εφαπτόμενικές τάσεις και ακτινικές μετατοπίσεις αντίστοιχα.

Οι ακτινικές τάσεις σ_r οι εφαπτομενικές τάσεις σ_θ και οι ακτινικές μετατοπίσεις u σχεδιάζονται σαν συνάρτηση της ακτινικής απόστασης $r=100 \text{ mm}$, σχήμα 2.4 και Πίνακα 1.

Στον οριζόντιο άξονα του σχήματος 2.4 το $\text{DIST}=0$ αντιστοιχεί στο $r=100 \text{ mm}$ και το $\text{DIST}=200$ αντιστοιχεί στο $r=200 \text{ mm}$.

Για $\text{DIST}=0$ (ή $r=100 \text{ mm}$) είναι:

$$\sigma_r = -9,977 \text{ N/mm}^2 \text{ ίση με την εσωτερική πίεση,}$$

$$\sigma_\theta = 16,679 \text{ N/mm}^2 \text{ και}$$

$$u = -0,00031 \approx 0,$$

Για $\text{DIST}=100$ (ή $r=200 \text{ mm}$) είναι:

$$\sigma_r = -0,00031 \approx 0,$$

$$\sigma_\theta = 6,659 \text{ N/mm}^2 \text{ και}$$

$$u = 0,02667 \text{ N/mm}^2$$

Παρατηρούμε ότι οι ακτινικές τάσεις σ_r είναι θλιπτικές και απολύτως φθίνουν κατά μήκος του πάχους του σωλήνα μέχρι που σχεδόν μηδενίζεται. Η διανομή των ακτινικών τάσεων στη σωληνοειδή διατομή φαίνονται στο σχήμα 2.5. οι εφαπτομενικές τάσεις είναι εφελκιστικές και φθίνουν. Οι ακτινικές μετατοπίσεις αυξάνουν με πολύ μικρό ρυθμό για $\text{DIST}=0$ ($r=100 \text{ mm}$) είναι $u=0.039 \text{ mm}$ και για $\text{DIST}=100$ ($r=200 \text{ mm}$) είναι $u=0.026 \text{ mm}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5. Οι ακτινικές μετατοπίσεις στη σωληνοειδή διατομή απεικονίζονται στο σχήμα 2.6 και οι ακτινικές τάσεις σ_r στο σχήμα 2.7.

2.2.1 Υπολογιστικά αποτελέσματα

Στον Πίνακα 1 έχουμε τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης του προβλήματος όταν το μέτρο ελαστικότητας είναι $E=50000 \text{ N/mm}^2$.

Πίνακας 1

DIST (mm)	u (ακτινικές μετατοπίσεις)	σ_r (ακτινικές τάσεις)	σ_θ (εφαπτομενικές τάσεις)
0.000	0.39338E-01	-9.9771	16.679
5.000	0.37919E-01	-8.7340	15.418
10.000	0.36653E-01	-7.6574	14.338
15.000	0.35518E-01	-6.7282	13.404
20.000	0.34496E-01	-5.9153	12.582
25.000	0.33574E-01	-5.1929	11.858
30.000	0.32741E-01	-4.5506	11.216
35.000	0.31987E-01	-3.9778	10.643
40.000	0.31303E-01	-3.4652	10.131
45.000	0.30683E-01	-3.0047	9.6711
50.000	0.30119E-01	-2.5894	9.2560
55.000	0.29607E-01	-2.2136	8.8805
60.000	0.29141E-01	-1.8725	8.5395
65.000	0.28718E-01	-1.5619	8.2291
70.000	0.28334E-01	-1.2783	7.9456
75.000	0.27984E-01	-1.0187	7.6861
80.000	0.27667E-01	-0.78086	7.4478
85.000	0.27380E-01	-0.56336	7.2282
90.000	0.27120E-01	-0.36239	7.0258
95.000	0.26885E-01	-0.17433	6.8368
100.000	0.26674E-01	-0.31959E-03	6.6591

2.2.2 Μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας

Εξετάζουμε κατασκευές με διαφορετικά μέτρα ελαστικότητας (E) για να παρατηρήσουμε την επιρροή στις μετατοπίσεις και αναπτυσσόμενες τάσεις.

Τρεις περιπτώσεις με $E=25000 \text{ N/mm}^2$, $E=50000 \text{ N/mm}^2$, $E=100000 \text{ N/mm}^2$ μελετούμε και τα αποτελέσματα φαίνονται στο σχήμα 2.7.

Παρατηρούμε ότι οι ακτινικές μετατοπίσεις u είναι μεγάλες όταν το υλικό είναι μαλακό, δηλαδή έχει μικρή τιμή του E. Όταν το υλικό σκληραίνει δηλαδή το E γίνεται μεγάλο τότε οι μετατοπίσεις είναι μικρές. Αυτό αποδεικνύεται και από την αναλυτική λύση εξίσωσης (2.11) που είναι:

$$u = \frac{a^2 p_i r}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right]$$

όπου το u και το E είναι αντιστρόφως ανάλογα.

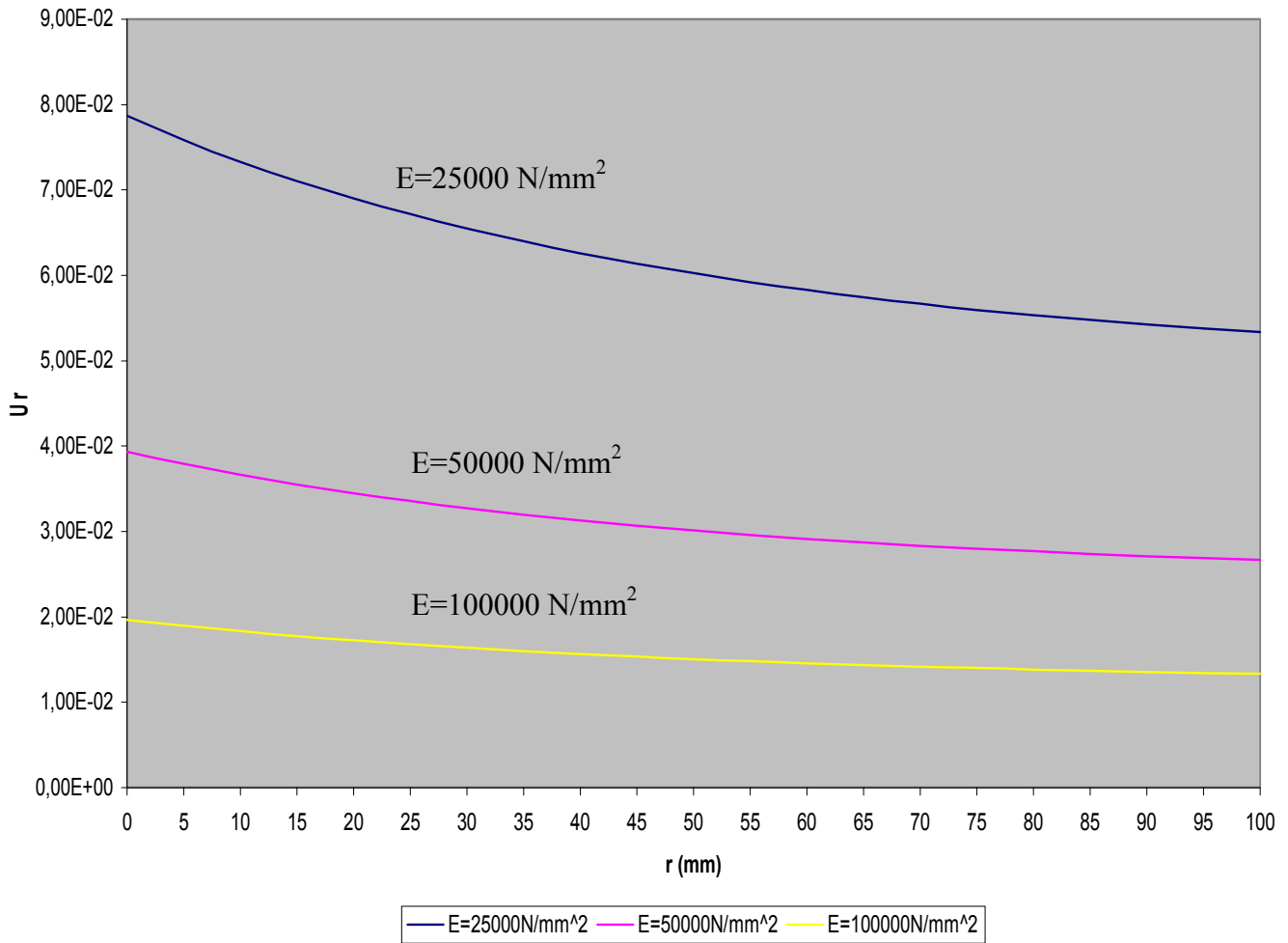
Η ακτινική τάση (σ_r) και η εφαπτομενική τάση (σ_θ) δεν μεταβάλλονται με την μεταβολή του E όπως αποδεικνύεται στις αναλυτικές λύσεις (2.9) και (2.10).

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i - b^2 p_0}{b^2 - a^2} - \frac{(p_i - p_0) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}$$

και

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i - b^2 p_0}{b^2 - a^2} + \frac{(p_i - p_0) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}$$

Σύγκριση μετατοπίσεων

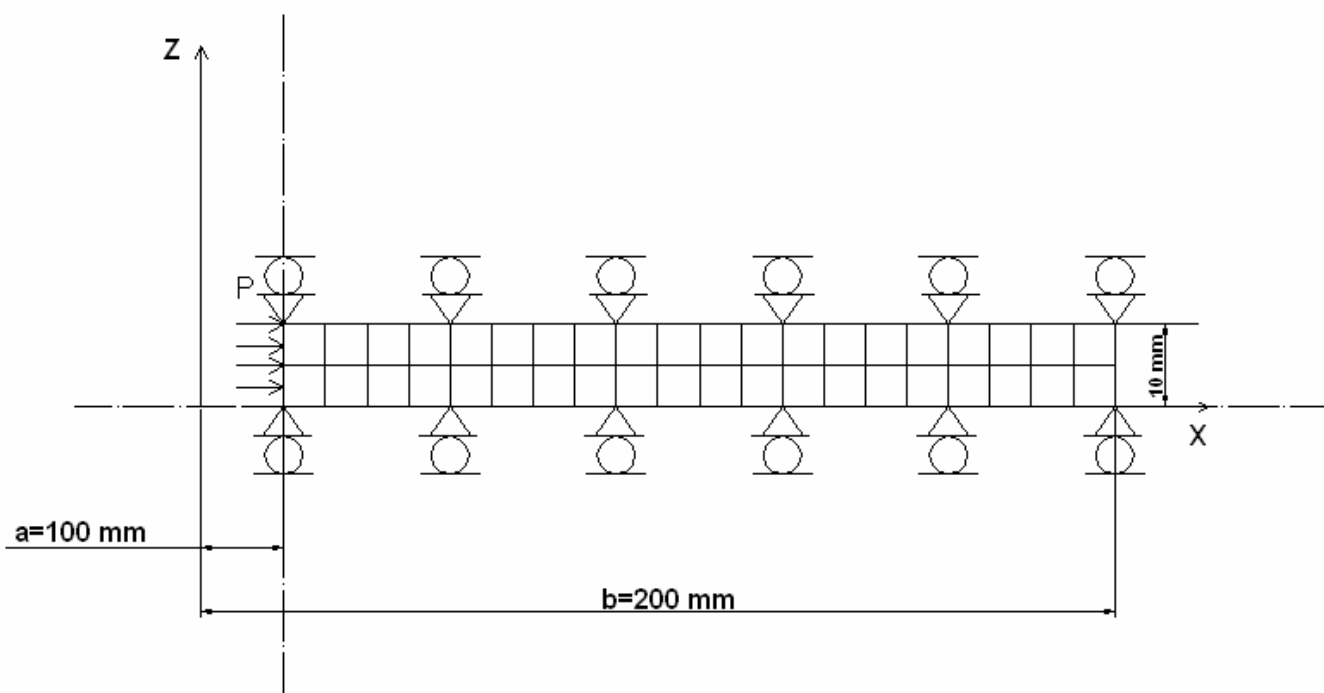


Σχήμα 2.7 Ακτινικές μετατοπίσεις

2ος ΤΡΟΠΟΣ

Λόγω συμμετρίας εξετάζουμε το παρακάτω κομμάτι του κυλίνδρου με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες, σχήμα 2.8.

Στο σχήμα (2.8) που ακολουθεί βλέπουμε το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος μας.



Σχήμα 2.8 Μαθηματικό μοντέλο με πεπερασμένα στοιχεία.

Αναλυτική Λύση

Υπάρχουν πολλές πρακτικές εφαρμογές στις οποίες η γεωμετρία του σχήματος και η κατανομή της πίεσης είναι συμμετρική ως προς τον κατά μήκος άξονα. Παραδείγματα περιλαμβάνουν δοχεία πίεσης, σύνθετους κυλίνδρους, στοιχεία αντιδραστήρα, δοχεία χημικής αντίδρασης, θερμαινόμενους σωλήνες, σφονδύλους, στερεές ή κούφιες σφαιρικές κατασκευές, δίσκους τουρμπίνας, και εξαρτήματα από πάρα πολλές μηχανές, από αεροδιαστημικές εφαρμογές έως εφαρμογές ενός απλού νοικοκυριού.

Εξετάζουμε έναν κύλινδρο που έχει μια κυκλική τρύπα που υπόκειται σε ομοιόμορφη πίεση. Σημειώνουμε ότι το αξονικό φορτίο δεν υπάρχει οπότε $\sigma_z = 0$. Οι πιέσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα z καθώς και οι παραμορφώσεις. Από την εξίσωση ισορροπίας προκύπτει:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = 0 \quad (2.1)$$

Όπου σ_r = η ακτινική τάση, σ_θ = η εφαπτομενική τάση και η F_r = ακτινική δύναμη του σώματος, για παράδειγμα η δύναμη της αδράνειας σχετίζεται με την περιστροφή. Με την απουσία των δυνάμεων του σώματος η Eq. (2.1) γίνεται:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.2)$$

Θεωρούμε τώρα τις ακτινικές και τις εφαπτόμενες μετατοπίσεις u και v αντιστοίχως. Επειδή δεν μπορεί να υπάρξει εφαπτόμενη μετατόπιση στο συμμετρικό πεδίο, άρα $v=0$. Έτσι οι πιέσεις γίνονται:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = 0 \quad (2.3)$$

Αντικαθιστώντας το $u = r\varepsilon_\theta$ στη σχέση (2.3), η εξίσωση γίνεται :

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0 \quad (2.4)$$

Η εξίσωση ισορροπίας (2.1 ή 2.2), η πίεση, οι θεωρητικές σχέσεις (2.3 ή 2.4) και ο νόμος του Hooke επαρκούν να εξασφαλίσουν μια μοναδική λύση σε κάθε αξισυμμετρικό πρόβλημα με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες.

Η ακόλουθη γνωστή σχέση λαμβάνεται υπόψη όταν ένας κύλινδρος υπόκειται σε εσωτερική πίεση, με λεπτό τοίχωμα ή με παχύ τοίχωμα:

$$\sigma_{\theta} = \frac{pr}{t}$$

Όπου το p είναι η εσωτερική πίεση, το r είναι η μέση ακτίνα και το t είναι το πάχος. Αν το πάχος του τοιχώματος ξεπερνά τη εσωτερική ακτίνα περισσότερο από 10%, ο κύλινδρος θεωρείται κύλινδρος με παχύ τοίχωμα.

Στην περίπτωση ενός κυλίνδρου με παχύ τοίχωμα που παρουσιάζει εσωτερική ή εξωτερική πίεση, η παραμόρφωση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα z . Οι τάσεις δίνονται από την σχέση:

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_{\theta}) \quad (2.5)$$

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta} - \nu\sigma_r)$$

Προκύπτει:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_{\theta}) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) \quad (2.6)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{\theta} + \nu\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right)$$

Αντικαθιστώντας αυτές στην (2.2) έχουμε σαν αποτέλεσμα την εξίσωση της ακτινικής μετατόπισης :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (2.7)$$

Η λύση της (2.7) είναι:

$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (\alpha)$$

Όπου C_1 και C_2 είναι οι σταθερές.

Οι ακτινικές και οι εφαπτόμενες πιέσεις μπορούν τώρα να γραφούν σε σταθερούς όρους της ολοκλήρωσης συνδυάζοντας τις σχέσεις (α) και (2.6):

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[c_1(1+\nu) - c_2\left(\frac{1-\nu}{r^2}\right)\right] \quad (\beta)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[c_1(1+\nu) + c_2\left(\frac{1-\nu}{r^2}\right)\right] \quad (\gamma)$$

Οι σταθερές υπολογίζονται από την θεώρηση των συνθηκών που ανήκουν σε εσωτερικές και εξωτερικές επιφάνειες.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο των ακτινικών και εφαπτόμενων πιέσεων είναι σταθερό, εξαρτώμενο από την θέση της ακτίνας: $\sigma_r + \sigma_\theta = 2E\varepsilon_z/(1-\nu)$. Για αυτό το λόγο το ε_z είναι σταθερό:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{σταθερό}$$

Συμπεραίνουμε ότι τα επίπεδα τμήματα παραμένουν επίπεδα μετά την φόρτιση. Μετά το $\sigma_z = E\varepsilon_z = \text{σταθερό} = c$. Αλλά μόνο όταν οι άκρες του κυλίνδρου είναι ανοιχτές και ελεύθερες.

$$\int_a^b \sigma_z 2\pi r dr = \pi c(b^2 - a^2) = 0$$

Για έναν κύλινδρο με εσωτερική και εξωτερική πίεση, οι οριακές συνθήκες είναι:

$$(\sigma_r)_{r=a} = -p_i, \quad (\sigma_r)_{r=b} = -p_o \quad (\delta)$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει θλιπτική πίεση. Αντικαθιστώντας τις τιμές των εξισώσεων (β) και (γ) στο (δ) έχουμε:

$$c_1 = \frac{1-\nu}{E} \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2}, \quad c_2 = \frac{1-\nu}{E} \frac{a^2 b^2 (p_i - p_o)}{b^2 - a^2} \quad (\varepsilon)$$

Τελικά είναι:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} - \frac{(p_i - p_o) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i - b^2 p_o}{b^2 - a^2} + \frac{(p_i - p_o) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2}$$

$$u = \frac{1-\nu}{E} \frac{(a^2 p_i - b^2 p_o) r}{b^2 - a^2} + \frac{1-\nu}{E} \frac{(p_i - p_o) a^2 b^2}{(b^2 - a^2) r^2} \quad (2.8)$$

Αυτές οι σχέσεις προήλθαν από τον Γάλλο μηχανικό G. Lamé το 1833, από τον οποίο πήραν την ονομασία τους. Η μέγιστη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει το σ_r είναι όταν το $r=a$ ισούται με P_i εφόσον το P_i ξεπερνά το P_o . Αν το $P_o > P_i$ τότε το

μέγιστο σ_r συμβαίνει όταν $r=b$. Το μέγιστο σ_θ συμβαίνει είτε στην εσωτερική είτε στην εξωτερική περιοχή.

Ειδικές περιπτώσεις

Εσωτερική πίεση μόνο. Αν έχουμε μόνο εσωτερική πίεση τότε οι σχέσεις (2.8) γίνονται:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (2.9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (2.10)$$

$$u = \frac{a^2 p_i r}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (2.11)$$

Αν το $b^2/r^2 \geq 1$, τότε το σ_r είναι αρνητικό για όλες τις τιμές του r εκτός της τιμής $r=b$ και γίνεται $\sigma_r=0$. Η μέγιστη ακτινική τάση υπάρχει όταν το $r=a$. Όσο για το σ_θ , είναι θετικό για όλες τις ακτίνες και επίσης είναι μέγιστο όταν $r=a$.

2.1.1 Έλεγχος αποτελεσμάτων – Σύγκριση αναλυτικής και αριθμητικής λύσης.

Δίνονται τα παρακάτω:

$$P = 10 \text{ N/mm}^2,$$

$$\nu = 0.3,$$

$$r_{in} = 100 \text{ mm},$$

$$r_{out} = 200 \text{ mm}$$

$$E = 50000 \text{ N/mm}^2$$

Για $r = a = 100 \text{ mm}$

Η εξίσωση (2.9) γίνεται:

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \frac{a^2 + b^2}{a^2} = p_i \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \Rightarrow$$

και έχουμε

$$\sigma_{\theta} = 10 \frac{100^2 + 200^2}{200^2 - 100^2} = 16.6 N / mm^2$$

Η παραπάνω τιμή επίσης υπολογίσθηκε με το πρόγραμμα ANSYS, πίνακας 1.

Η εξίσωση (2.10) γίνεται:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) = \frac{a^2 p_i}{b^2 - a^2} \frac{a^2 - b^2}{a^2} = p_i \frac{a - b}{b - a}$$

και έχουμε

$$\sigma_r = 10 \frac{100 - 200}{200 - 100} = -10 N / mm^2$$

Η παραπάνω τιμή επίσης υπολογίσθηκε με το πρόγραμμα ANSYS, πίνακας 1, $\sigma_r = -9,9771 \approx -10 N/mm^2$

Η εξίσωση (2.11) γίνεται:

$$\begin{aligned} u &= \frac{a^2 p_i r}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right] \\ &= \frac{100^2 \cdot 10 \cdot 100}{50000(200^2 - 100^2)} \left[(1 - 0,3) + (1 + 0,3) \frac{200^2}{100^2} \right] \\ &= \frac{1}{150} (0,7 + 5,2) = 0,03933 mm \end{aligned}$$

Άρα

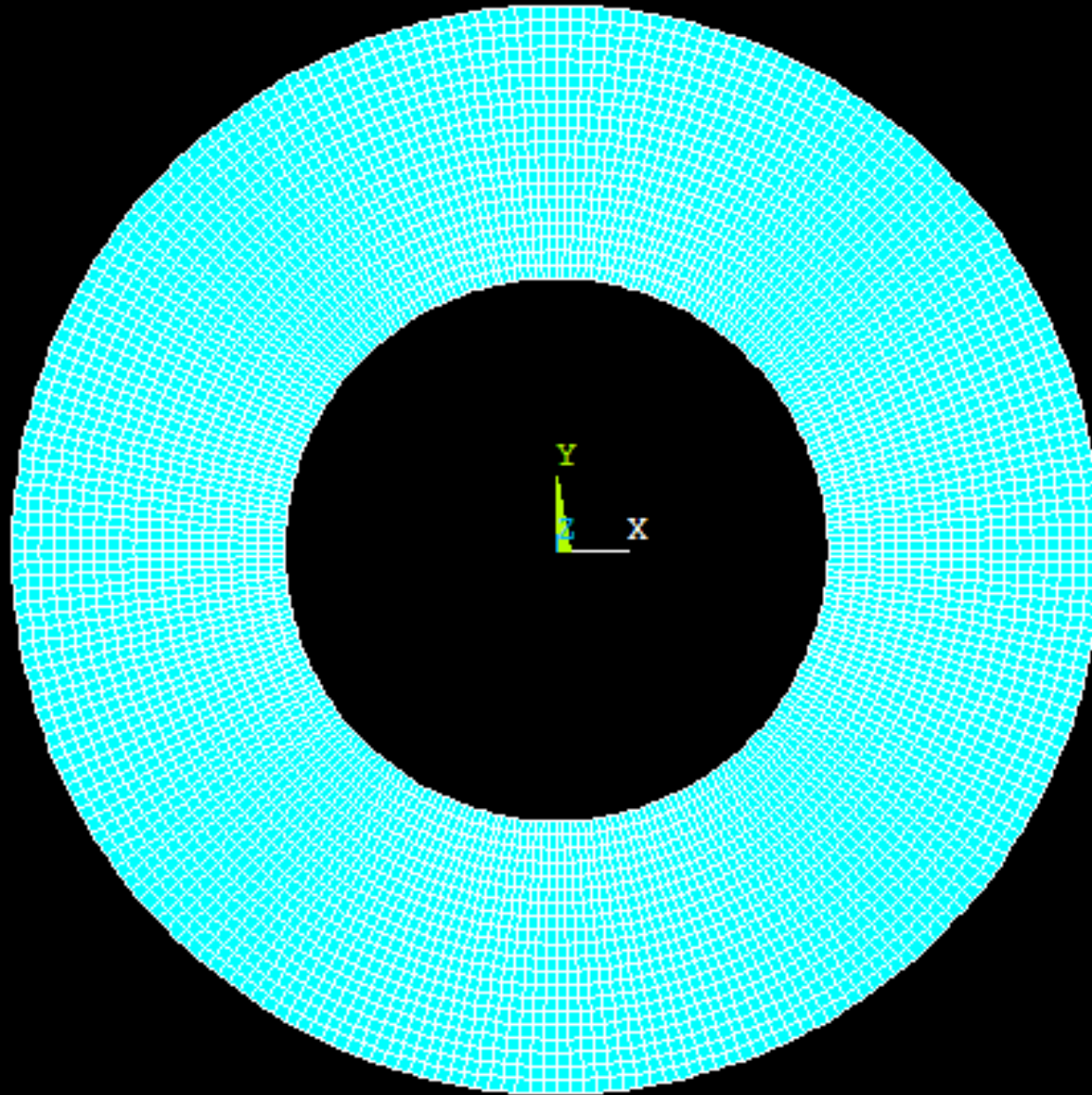
$$u = 0.03933 mm$$

Παρόμοια τιμή υπολογίσθηκε με το πρόγραμμα ANSYS, πίνακας 1.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ansys Manual, version 10.
- Πασχάλης, Κ. Γκότσης., 'Πεπερασμένα Στοιχεία', Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2005.
- Κωνσταντίνος Δαβίδ, Κωνσταντίνος Ανθυμίδης., 'Σχεδίαση με Η/Υ: το AutoCAD στην πράξη', Εκδόσεις Ίων, Αθήνα, 2006.

Μοντέλο του κυλίνδρου με πεπερασμένα στοιχεία



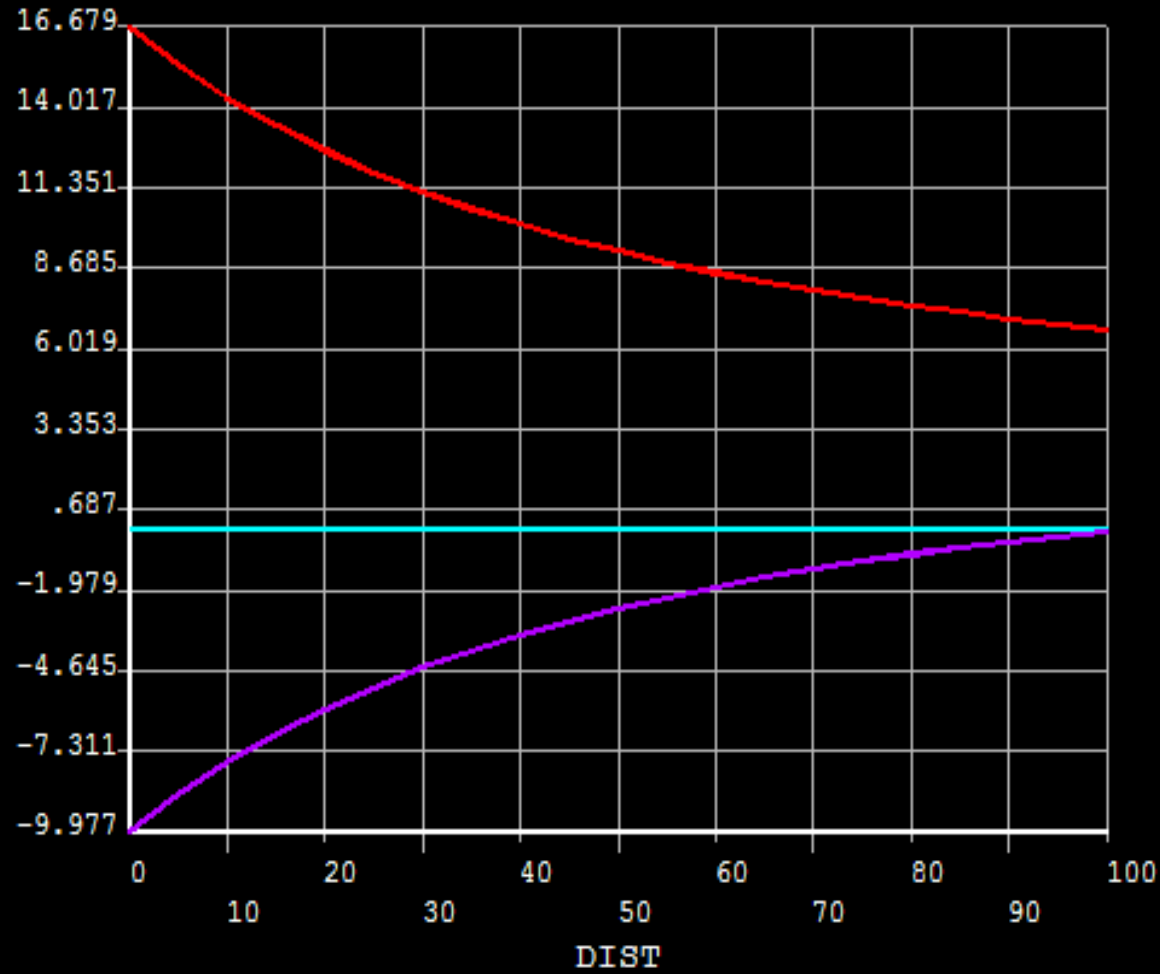
Σχήμα 2.3

1

POST1
STEP=1
SUB =1
TIME=1
PATH PLOT
NOD1=1
NOD2=2

Σχεδιάγραμμα τάσεων

- σ_r
- σ_θ
- u



Σχήμα 2.4

1

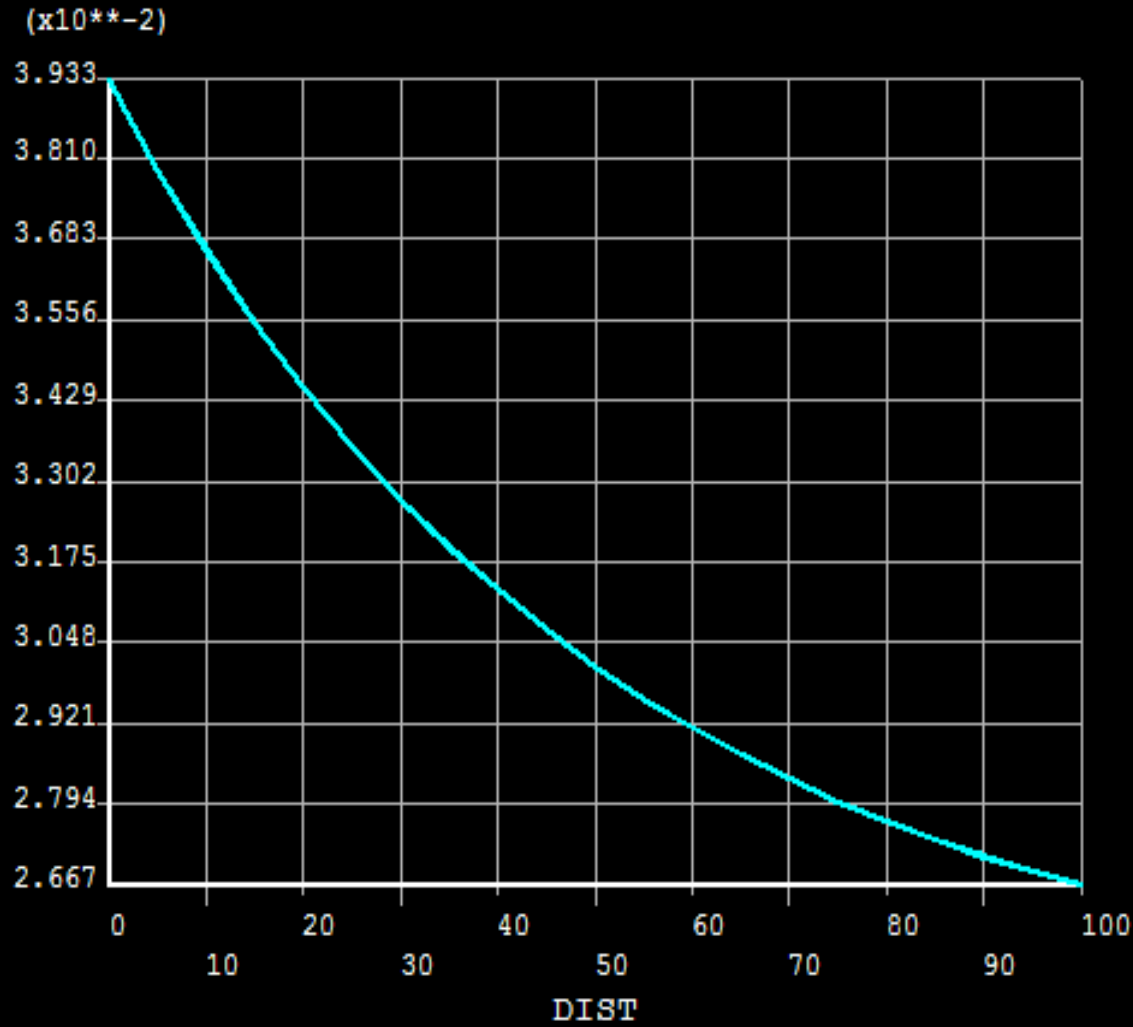


E=50000 N/mm²

POST1
STEP=1
SUB =1
TIME=1
PATH PLOT
NOD1=1
NOD2=2

Σχεδιάγραμμα μετατοπίσεων

U



Σχεδιάγραμμα 2.5

1

NODAL SOLUTION

STEP=1

SUB =1

TIME=1

U (AVG)

RSYS=1

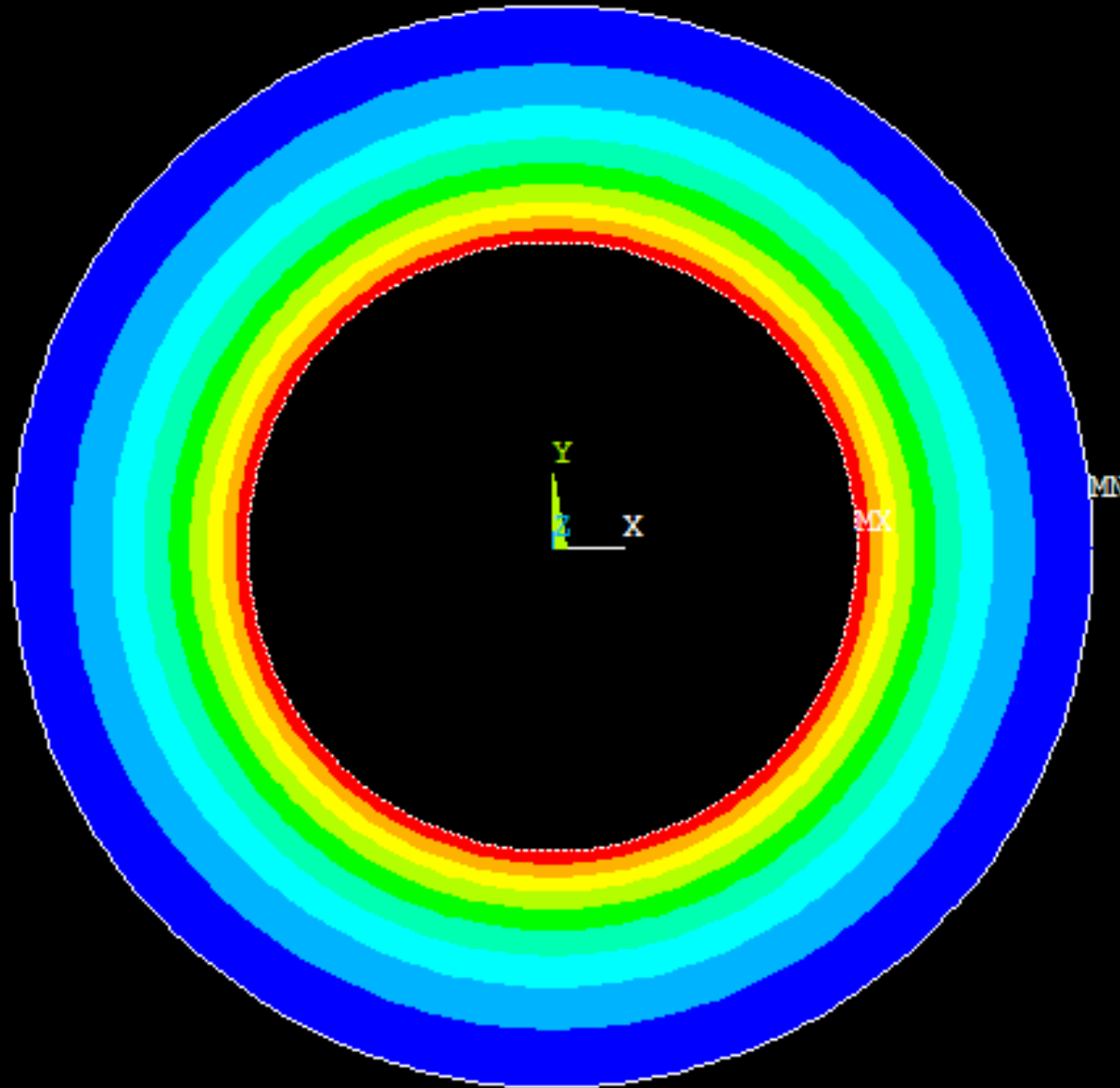
DMX =.03812

SMN =.02426

SMX =.03812

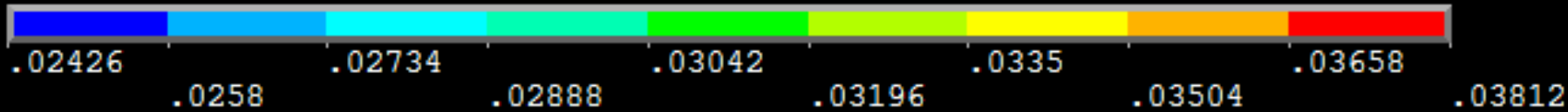
Διάγραμμα Μετατοπίσεων u

$E=50000 \text{ N/mm}^2$



Διάγραμμα 2.6

14



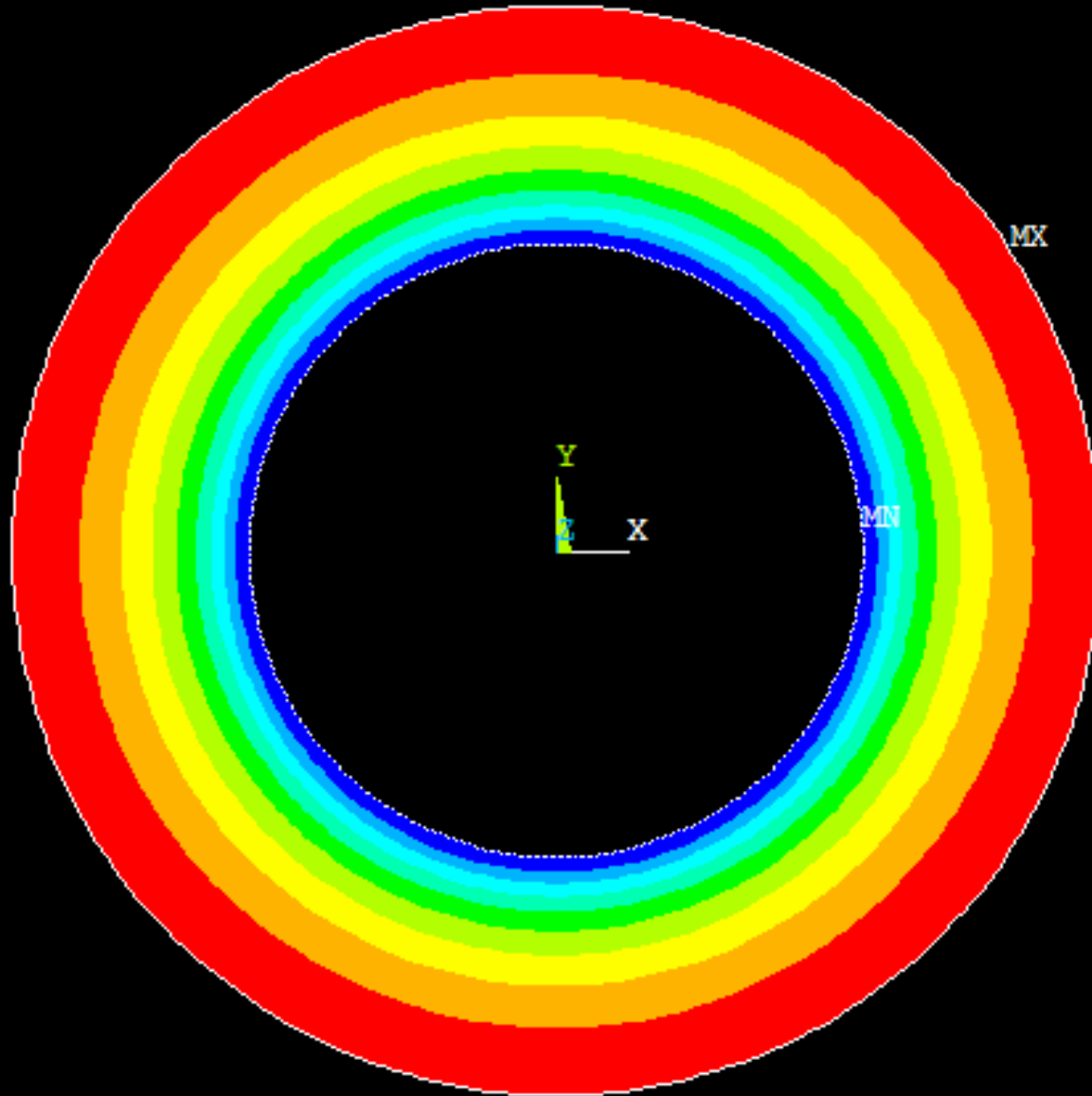
1

NODAL SOLUTION

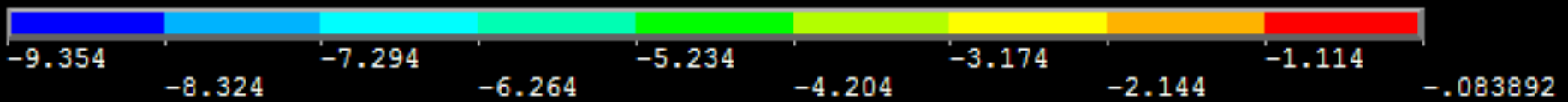
STEP=1
SUB =1
TIME=1
 σ_r (AVG)
RSYS=1
DMX =.03812
SMN =-9.354
SMX =-.083892

Διάγραμμα ακτινικών τάσεων σ_r

$E=50000 \text{ N/mm}^2$



Διάγραμμα 2.7



1

NODAL SOLUTION

Διάγραμμα Μετατοπίσεων u

STEP=1

SUB =1

TIME=1

$E=50000 \text{ N/mm}^2$

U (AVG)

RSYS=1

DMX =.039355

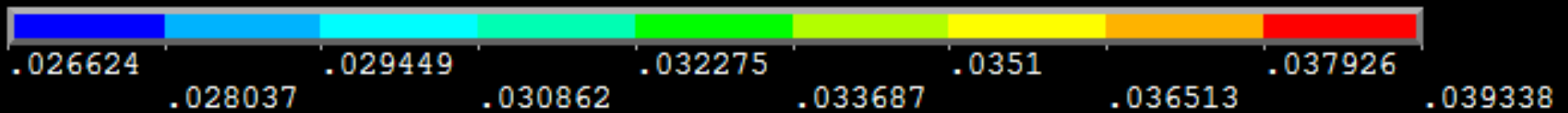
SMN =.026624

SMX =.039338



Διάγραμμα 2.9

19



1

NODAL SOLUTION

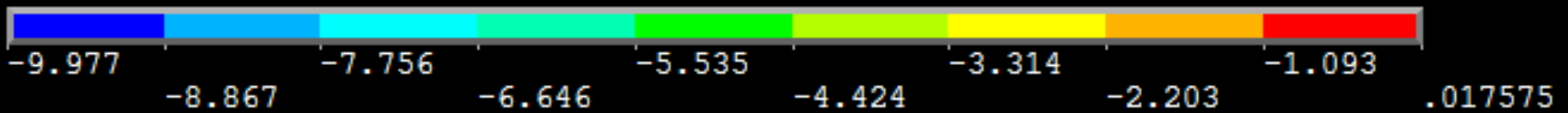
Διάγραμμα ακτινικών τάσεων σ_r

STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 σ_r (AVG)
 RSYS=1
 DMX =.07871
 SMN =-9.977
 SMX =.017575

$E=50000 \text{ N/mm}^2$



Διάγραμμα 2.10



1

NODAL SOLUTION

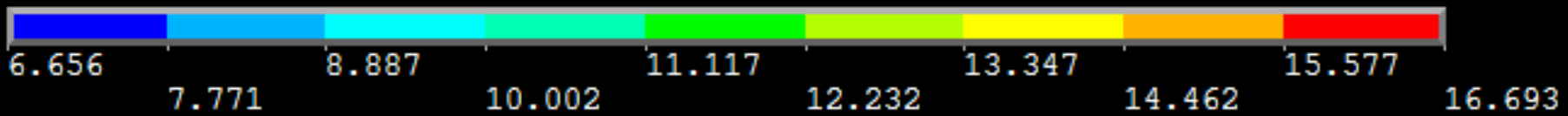
Διάγραμμα εφαπτομενικών τάσεων σ_θ

STEP=1
 SUB =1
 TIME=1
 σ_θ (AVG)
 RSYS=1
 DMX =.07871
 SMN =6.656
 SMX =16.693

$E=50000 \text{ N/mm}^2$



Διάγραμμα 2.11



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ansys Manual, version 10.
- Πασχάλης, Κ. Γκότσης., ‘Πεπερασμένα Στοιχεία’, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2005.
- Κωνσταντίνος Δαβίδ, Κωνσταντίνος Ανθυμίδης., ‘Σχεδίαση με Η/Υ: το AutoCAD στην πράξη’, Εκδόσεις Ίων, Αθήνα, 2006.