ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Πληροφορική
ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΣΕΡΡΕΣ

Εφαρμοσμένη Πληροφορική και Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΖΗΡΤΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Επιβλέπων

ΚΑΡΑΒΑΣΙΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΣΕΡΡΕΣ - ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2024

Τίτλος Δ.Ε: Εφαρμοσμένη Πληροφορική και Μαθηματικά στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Ονοματεπώνυμο φοιτητή: Ζήρτας Νικόλαος

Ονοματεπώνυμο εισηγητή: Καραβασίλης Γεώργιος

Βεβαιώνω ότι είμαι ο συγγραφέας αυτής της εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης, έχω καταγράψει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών, εικόνων και κειμένου, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επιπλέον, βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά, ειδικά ως διπλωματική εργασία, στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Εφαρμοσμένης Πληροφορικής» του ΔΙ.ΠΑ.Ε.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής και Ηλεκτρονικών Συστημάτων του Διεθνούς Πανεπιστημίου της Ελλάδος, δεν υποδηλώνει απαραιτήτως και αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα, εκ μέρους του Τμήματος.

¨Η διπλωματική αυτή εργασία αφιερώνεται στον γιό μου Γιώργο.¨

Πρόλογος

Η επιλογή του συγκεκριμένου θέματος έγινε μετά από την εμπειρία που είχα λόγω του Covid-19 με την επείγουσα και έκτακτη ανάγκη για την απομακρυσμένη διδασκαλία. Η εμπειρία αυτή με οδήγησε στο να αναθεωρήσω μεθόδους και τακτικές διδασκαλίας αλλά και στο συμπέρασμα ότι η εξ αποστάσεως εκπαίδευση δύναται να συμπληρώσει και να υποστηρίξει την τυπική δια ζώσης διδασκαλία.

Η τριβή με το συγκεκριμένο θέμα της διπλωματικές εργασίας με βοήθησε να βελτιώσω τις δεξιότητες μου στην πραγματοποίηση ενός ολοκληρωμένου μαθήματος σε μια ηλεκτρονική πλατφόρμα. Επίσης, ανακάλυψα ότι αρκετοί συνάδελφοι έχουν αποδεχτεί το νέο μοντέλο διδασκαλίας και έχουν αξιοποιήσει τα ψηφιακά εργαλεία που τους παρέχονται.

Περίληψη

Η άνοδος της διαδικτυακής μάθησης και των ψηφιακών πλατφορμών έχει μεταμορφώσει τον τομέα της εκπαίδευσης προσφέροντας ευκαιρίες βελτίωσης της διδασκαλίας των μαθηματικών. Αυτή η εργασία διερευνά πώς η ηλεκτρονική μάθηση και τα ψηφιακά εργαλεία ενσωματώνονται στην διδασκαλία των εξισώσεων με έμφαση στη δημιουργία ενός διαδραστικού ψηφιακού μαθήματος.

Ξεκινώντας με μια επισκόπηση των εξισώσεων, συμπεριλαμβανομένου του ορισμού τους, της τυπικής μορφής και των διαφόρων μεθόδων επίλυσης, η εργασία τονίζει τη σημασία αυτών των εξισώσεων σε κλάδους όπως η φυσική, η μηχανική και τα οικονομικά, υπογραμμίζοντας τη συνάφειά τους στον πραγματικό κόσμο.

Η κύρια εστίαση αυτής της εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός συναρπαστικού μαθήματος για την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Το μάθημα είναι προσαρμοσμένο για ενσωμάτωση σε μια πλατφόρμα elearning ώστε να παρέχει στους μαθητές μια διαδραστική μαθησιακή εμπειρία. Ενσωματώνει στοιχεία όπως οδηγούς βήμα προς βήμα, δραστηριότητες εξάσκησης και κουίζ αυτοαξιολόγησης.

Η διατριβή ολοκληρώνεται περιγράφοντας τα συμπεράσματα και υπογραμμίζοντας τον αντίκτυπο της έρευνας. Τονίζει τις δυνατότητες της διαδικτυακής μάθησης και των ψηφιακών εργαλείων για την επανάσταση στην εκπαίδευση των μαθηματικών όσον αφορά τη διδασκαλία των εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

Abstract

“Applied Informatics and Mathematics in Secondary Education”

The rise of online learning and digital platforms has transformed the field of education offering opportunities to improve the teaching of mathematics. This paper explores how e learning and digital tools are integrated into the instruction of equations with a focus, on creating an interactive digital lesson.

Beginning with an overview of equations, including their definition, standard form and various solution methods the paper emphasizes the importance of these equations in disciplines such as physics, engineering and economics underscoring their real world relevance.

The main focus of this work is on developing an engaging lesson for solving equations. This lesson is tailored for integration into an elearning platform to provide students with an interactive learning experience. It incorporates components like step, by step guides, practice activities and self assessment quizzes.

The thesis wraps up by outlining the discoveries and underscoring the impact of the research. It stresses the possibilities of online learning and digital tools in revolutionizing math education in regard, to teaching equations.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εκπονήθηκε στο Διεθνές Πανεπιστήμιο Ελλάδος, κόμβου Σερρών, στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Εφαρμοσμένη Πληροφορική» του τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής, Υπολογιστών και Τηλεπικοινωνιών, κατά το έτος 2024.

Θέλω να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές, τα μαθήματα των οποίων παρακολούθησα, για τις γνώσεις και δεξιότητες που απέκτησα. Η συμβολή τους ήταν καθοριστική στην περάτωση των σπουδών μου και την επίτευξη ενός προσωπικού μου στόχου.

Ιδιαίτερα, θέλω να ευχαριστήσω τον κο Καραβασίλη Γεώργιο για την καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1ο - Οδηγίες διδασκαλίας μαθηματικών Γ' τάξης Γυμνασίου για το σχολικό έτος 2023-24

1.1 Ύλη μαθηματικών Γ' τάξης Γυμνασίου για το σχολικό έτος 2023-24

Όπως κάθε χρόνο, έτσι και φέτος, στις 13 Οκτωβρίου 2023, εκδόθηκε η εγκύκλιος από το Υπουργείο Παιδείας Θρησκευμάτων και Αθλητισμού, για τον προσδιορισμό της ύλης ανά βαθμίδα, ανά μάθημα, όπως και οι οδηγίες διδασκαλίας τους.

Μέρος Α΄

Κεφ. 1ο : ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)

Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα

Α. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα

Β. Πράξεις με μονώνυμα

1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων 1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες (χωρίς τις υποπαραγράφους: ε) «Διαφορά κύβων – Άθροισμα κύβων»)

1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων (χωρίς τις υποπαραγράφους «δ) Διαφορά – άθροισμα κύβων» και «στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ »).

1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων

1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

Α. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων Β. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

Κεφ. 2ο : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$

2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Α. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου.

2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού

2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις μ' έναν άγνωστο

Β. Ιδιότητες της διάταξης

Γ. Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο

Κεφ. 3ο : ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του

3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Κεφ. 5ο : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

5.1 Σύνολα (χωρίς την υποπαράγραφο: «Πράξεις με σύνολα», και χωρίς την εφαρμογή 2)

5.2 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα (χωρίς τις υποενότητες: «Πράξεις με ενδεχόμενα» και «Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα» που εντοπίζονται στην υποπαράγραφο «Ενδεχόμενα»)

5.3 Έννοια της πιθανότητας (χωρίς την υποπαράγραφο: «Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων»)

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφ. 1ο : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1.1 Ισότητα τριγώνων

1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

1.3 Θεώρημα Θαλή

1.5 Ομοιότητα

Α. Όμοια πολύγωνα

Β. Όμοια τρίγωνα (χωρίς την αιτιολόγηση του κριτηρίου ομοιότητας δύο τριγώνων στη σελίδα 220)

Κεφ. 2ο : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^o \leq ω \leq 180^o$

2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

1.2 Οδηγίες διδασκαλίας

Στις παρακάτω οδηγίες τονίζονται τα σημαντικά κομμάτια κάθε ενότητας ώστε να αποτελέσουν οδηγό στον σχεδιασμό του μαθήματος από τον διδάσκοντα/ουσα. Ανά παράγραφο δίνεται ένας σχεδιασμός των ωρών διδασκαλίας, ο οποίος μπορεί να τροποποιηθεί κατά περίπτωση από τον διδάσκοντα/ουσα και πάντα σύμφωνα με τις ιδιαιτερότητες της τάξης. Στην προτεινόμενη κατανομή των ωρών διδασκαλίας περιλαμβάνονται και οι επαναλήψεις, συμπληρώσεις αλλά και γραπτές δοκιμασίες. Επιπροσθέτως, προτείνονται ενδεικτικές δραστηριότητες οι οποίες βρίσκονται στον ιστότοπο του εμπλουτισμένου ψηφιακού σχολικού βιβλίου:

http://ebooks.edu.gr/new/ps.php.

Παράλληλα παρουσιάζονται κάποιες διδακτικές προτάσεις οι οποίες έχουν λάβει υπόψη την αλληλουχία και την επέκταση των διδασκομένων εννοιών και έχουν στόχο την ανάδειξη των σημαντικών ιδεών καθώς και τη διδακτική πρακτική. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αξιοποιήσουν το σύνολο του προτεινόμενου υλικού, ελέγχοντας πάντα την εγκυρότητά τους, χωρίς όμως να δεσμεύονται με την αποκλειστική τους χρήση. Η τήρηση των κεφαλαίων και ενοτήτων είναι απαρέγκλιτη και δεν δύναται να μην περιληφθεί κάποια ενότητα που ανήκει στη διδακτέα ύλη.

Παρακάτω ακολουθεί μια ενδεικτική πρόταση για τις σημαντικότερες παραγράφους της ύλης των Μαθηματικών της Γ’ Γυμνασίου.

ΜΕΡΟΣ Α΄ - Άλγεβρα

§§1.2, 1.3 και 1.4 (να διατεθούν 7 ώρες)

Τα μονώνυμα και οι πράξεις τους και κατ’ επέκταση τα πολυώνυμα είναι οι πλέον προσιτές στους μαθητές αλγεβρικές παραστάσεις. Είναι θεμελιώδη και η χρήση τους έχει ένα ευρύ φάσμα το οποίο βρίσκει εφαρμογές σχεδόν σε κάθε τομέα. Είναι πολύ σημαντικό οι μαθητές να μάθουν να τα διακρίνουν όσο και να εκτελούν τις πράξεις αυτών. Ιδιαίτερη έμφαση θα πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι η διαίρεση μονωνύμων δεν οδηγεί πάντα σε μονώνυμο όπως συμβαίνει στον πολλαπλασιασμό. Η πρόσθεση μη όμοιων μονωνύμων αποτελεί την αφετηρία και τη σύνδεση με τα πολυώνυμα.

Κατά την διδασκαλία των παραγράφων αυτών οι έννοιες θα προσεγγιστούν περιγραφικά και με παραδείγματα από τη γεωμετρία ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν καλύτερη εικόνα της επιμεριστικής ιδιότητας.

§1.5 (να διατεθούν 7 ώρες)

Η έννοια της ταυτότητας είναι πολύ σημαντική και αυτό οφείλεται τόσο στη συχνή εμφάνισή της όσο και στις εφαρμογές της στα Μαθηματικά. Η διδασκαλία πρέπει να γίνει προσεκτικά ώστε να εξαλειφθούν τυχόν παρανοήσεις και γνωστικά εμπόδια που έχουν οι μαθητές. Για την καλύτερη εμπέδωση μπορεί να χρησιμοποιηθούν και γεωμετρικές αποδείξεις οι οποίες θα πείσουν τους μαθητές/τριες που δυσκολεύονται να αφήσουν τις διαισθητικές τους αντιλήψεις όπως για παράδειγμα ότι δεν ισχύει $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$.

Οι μαθητές/ριες ανακαλύπτουν σταδιακά το αλγεβρικά ισοδύναμο ανάπτυγμα του τετραγώνου του αθροίσματος δυο όρων με τη βοήθεια δυναμικού χειρισμού κατάλληλων σχημάτων, επαληθεύουν με αριθμητικά παραδείγματα την εικασία τους και την αποδεικνύουν αλγεβρικά. Παράλληλα, μέσω των δραστηριοτήτων του εκπαιδευτικού, οι μαθητές/τριες θα είναι σε θέση να εφαρμόζουν τις ταυτότητες.

§1.6 (να διατεθούν 7 ώρες)

Μια από τις πιο κρίσιμες παραγράφους της Άλγεβρας της Γ’ Γυμνασίου. Η κατανόηση και η εφαρμογή των μεθόδων παραγοντοποίησης αποτελεί θεμελιώδη δεξιότητα στην οποία οι μαθητές οφείλουν να εστιάσουν.

Η εξοικείωση με τις μεθόδους αυτές ανοίγει τον δρόμο για την απλοποίηση μαθηματικών εκφράσεων, την επίλυση εξισώσεων και τον υπολογισμό ορίων. Καθώς οι μαθητές προχωρούν στην μαθησιακή τους πορεία, οι δεξιότητες αυτές αποδεικνύονται απαραίτητες για την ακαδημαϊκή τους επιτυχία, από το Γυμνάσιο έως και το Λύκειο. Στόχοι της παραγράφου είναι οι μαθητές/τριες να μπορούν να διακρίνουν, να ταξινομούν, να εφαρμόζουν και να αξιοποιούν τις μεθόδους της παραγοντοποίησης.

§2.1 και §2.2 (να διατεθούν 8 ώρες)

Η επανάληψη των εξισώσεων 1ου βαθμού προτείνεται να γίνει μέσω παραδειγμάτων. Σκοπός της διδασκαλίας των παραγράφων είναι

Α) Η επανάληψη των πρωτοβαθμίων εξισώσεων.

Β) Η σύνδεση τους με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις μέσω της παραγοντοποίησης και η τελική τους επίλυση.

Η κατανόηση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού ίσως αποτελεί την πιο κρίσιμη παράγραφο για την μελλοντική μαθηματική εξέλιξη των μαθητών. Η εξίσωση αυτή χρησιμεύει ως θεμέλιο για όλες τις πολυωνυμικές εξισώσεις, ενώ οι εφαρμογές της αγγίζουν πλήθος τομέων. Η εξοικείωση με την εξίσωση δευτέρου βαθμού επιτρέπει στους μαθητές, να βρίσκουν τα σημεία τομής μίας καμπύλης με τους άξονες, να επιλύουν διτετράγωνες εξισώσεις, να προσδιορίζουν το πρόσημο πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού 2 ή μεγαλύτερου, να πραγματοποιούν παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων και πολυωνύμων βαθμού 2 ή μεγαλύτερου.

Συνεπώς, η σφαιρική κατανόηση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού αποτελεί θεμέλιο λίθο για την μελλοντική μαθηματική επιτυχία των μαθητών.

Μέσω των δραστηριοτήτων οι μαθητές θα αμφισβητήσουν τον αριθμό των λύσεων μιας εξίσωσης και ανακαλύπτοντας ότι ο βαθμός των εξισώσεων σχετίζεται με το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης θα επαναπροσδιορίσουν τις αρχικές τους υποθέσεις.

Με την εισαγωγή του τύπου, γίνεται επαναπροσδιορισμός της επίλυσης των εξισώσεων και οι μαθητές/τριες αφού κατηγοριοποιήσουν, κωδικοποιήσουν και αξιοποιήσουν το νέο εργαλείο, ανακαλύπτουν τα οφέλη αυτού του φορμαλισμού.

Επίσης, να τονιστεί η διαθεματικότητα και η χρησιμότητά της στις άλλες επιστήμες καθώς και στην επίλυση προβλημάτων σε αυτές όπως και καθημερινών προβλημάτων.

§2.3 (να διατεθούν 2 ώρες)

Η παράγραφος αυτή προσφέρεται ώστε οι μαθητές/τριες να εφαρμόσουν και να χρησιμοποιήσουν όσα κατέκτησαν στις δύο προηγούμενες παραγράφους σε προβλήματα καθημερινότητας αλλά και σε τομείς όπως της Φυσικής, Οικονομίας κ.α.

Κεφάλαιο 3ο (να διατεθούν 11 ώρες)

Το κεφάλαιο αυτό αγγίζει εντελώς νέα ύλη για τους μαθητές. Σχετικά με τα συστήματα εξισώσεων, προτείνονται τα ακόλουθα: α)συνδυασμός γραφικών και αλγεβρικών μεθόδων: Η χρήση και των δύο μεθόδων προσφέρει στους μαθητές μια πιο ολοκληρωμένη μαθησιακή εμπειρία. β) εστίαση σε προβλήματα: Η εφαρμογή της θεωρίας σε πρακτικά προβλήματα ενισχύει την κατανόηση και την εμπέδωση των γνώσεων και γ) εξέταση όλων των μεθόδων: Η αξιολόγηση οφείλει να λαμβάνει υπόψη όλες τις προαναφερθείσες μεθόδους, και όχι μόνο τις αλγεβρικές.

Συνοψίζοντας, η διδασκαλία και η αξιολόγηση του κεφαλαίου οφείλουν να εστιάζουν σε μια σφαιρική προσέγγιση, η οποία ενσωματώνει γραφικές και αλγεβρικές μεθόδους, με έμφαση στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων.

§3.1 (να διατεθούν 5 ώρες)

Δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές/τρις να πραγματοποιήσουν σύνδεση με προηγούμενη γνώση από τη Β’ Γυμνασίου επάνω στην ευθεία, τη χάραξή της και εύρεση σημείων τομής με τους άξονες.

§3.3 (να διατεθούν 4 ώρες)

Σε αυτή την παράγραφο, οι μαθητές θα γνωρίσουν την αλγεβρική επίλυση γραμμικών συστημάτων με δύο διαφορετικές μεθόδους. Η εκμάθηση αυτών των μεθόδων θα τους εξοπλίσει με τα απαραίτητα εργαλεία για να επιλέγουν, ανάλογα με την περίπτωση, την πιο αποτελεσματική προσέγγιση για την επίτευξη της λύσης.

Η σημασία των γραμμικών συστημάτων ενισχύεται από τις πολλαπλές εφαρμογές τους στην καθημερινή ζωή, στοιχείο που λειτουργεί ως ισχυρό κίνητρο για τους μαθητές. Η ύλη θα επανεξεταστεί στην Β’ Λυκείου, όπου θα εμπλουτιστεί με μια νέα μέθοδο και θα επεκταθεί στην επίλυση μη γραμμικών συστημάτων.

Β’ ΜΕΡΟΣ - Γεωμετρία

§1.1 (να διατεθούν 8 ώρες)

Σε αυτή την παράγραφο δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές/τριες να έρθουν σε επαφή με την απόδειξη. Απαραίτητη προϋπόθεση θεωρείται η υπενθύμιση εννοιών όπως οι κατακορυφήν γωνίες, οι παραπληρωματικές γωνίες και οι ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου. Παράλληλη η έννοια του άξονα συμμετρίας και η συμμετρία ως προς σημείο μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αιτιολόγηση ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών.

Οι μαθητές/τριες μέσα από τη χρήση του ριζόχαρτου θα έχουν την ευκαιρία για επαλήθευση των ίσων σχημάτων προσφέροντας τους μια εποπτική εικόνα. Τα φύλλα εργασίας και οι δραστηριότητες που θα πραγματοποιηθούν έχουν σκοπό να κινητοποιήσουν τους μαθητές στην ορθή διατύπωση και εφαρμογή των κριτηρίων ισότητας των τριγώνων.

Η ενότητα θα διδαχθεί και στην Α’ Λυκείου όπου οι μαθητές θα κληθούν να ανακαλέσουν τη φετινή ύλη.

§1.2 και §1.3 (να διατεθούν 6 ώρες)

Στην Γεωμετρία το Θεώρημα του Θαλή, , είναι ένα σημαντικό θεώρημα που αφορά τις αναλογίες των διαφόρων ευθυγράμμων τμημάτων, τα οποία δημιουργούνται όταν δύο τεμνόμενες μεταξύ τους γραμμές τέμνονται και από ένα ζεύγος παραλλήλων γραμμών.

Προτείνεται η ενσωμάτωση της ιστορίας του υπολογισμού του ύψους της πυραμίδας του Χέοπα από τον Θαλή. Η παρουσίαση της μεθόδου του Θαλή, με την οποία κατέληξε στον ορισμό και την απόδειξη του θεωρήματος, θα βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν την πρακτική εφαρμογή του σε προβλήματα ευθυγράμμων τμημάτων που συναντάμε στην καθημερινότητα.

Επίσης, χρησιμοποιείται στην απόδειξη πολλών θεωρημάτων, η ανάπτυξη των οποίων θα γίνει στην ύλη της Γεωμετρίας της Β’ Λυκείου.

§1.5 (να διατεθούν 3 ώρες)

Αν και η παράγραφος αυτή αναφέρεται στην ομοιότητα σχημάτων να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα στην ομοιότητα τριγώνων και τις εφαρμογές τους. Οι δραστηριότητες και τα μικροπειράματα του εμπλουτισμένου βιβλίου θα δώσουν την ευκαιρία στους μαθητές/τριες να αναπτύξουν δεξιότητες κατασκευής όμοιων τριγώνων με συγκεκριμένο λόγο ομοιότητας. Η ευκολία χρήσης των κριτηρίων ομοιότητας τριγώνων εξοπλίζει τους μαθητές με τα απαραίτητα εργαλεία για τον υπολογισμό άγνωστων πλευρών τριγώνων και αποστάσεων σε χάρτες (κλίμακα).

Να γίνει διάκριση των εννοιών της ομοιότητας και της ισότητας τριγώνων.

§2.1 (να διατεθούν 5 ώρες)

Ο υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών των 30° ,45° και 60° καθώς και η ομοιότητα των τριγώνων θα αποτελέσει τη σύνδεση της προηγούμενης γνώσης και την επέκτασή της στις αμβλείες γωνίες.

Οι μαθητές/τριες ανακαλύπτουν σε αυτή την παράγραφο ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μετρούν μια γωνία, αφού η ομοιότητα διατηρεί τον λόγο των πλευρών άρα και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Στη Β΄ Λυκείου θα γίνει επανάληψη και εμπλουτισμός των εννοιών στο κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας στο μάθημα της Άλγεβρας. Επίσης, θα γίνει εφαρμογή σε πραγματικά προβλήματα που σχετίζονται με μήκη, αποστάσεις και γωνίες στην αρχιτεκτονική και τη ναυσιπλοΐα.

§2.2 §2.3 (να διατεθούν 6 ώρες)

Να γίνει επεξήγηση και απόδειξη των ταυτοτήτων με βοήθεια της γεωμετρίας. Σε αυτές τις παραγράφους οι μαθητές/τριες, μέσω της παρουσίασης παραδειγμάτων, θα μπορούν να απλοποιούν τριγωνομετρικές εκφράσεις και να υπολογίζουν τριγωνομετρικούς αριθμούς χωρίς τη βοήθεια πινάκων ή αριθμομηχανής.

Κεφάλαιο 2ο - Η ηλεκτρονική μάθηση και το eClass

2.1 Ηλεκτρονική μάθηση (e-Learning)

Η ηλεκτρονική μάθηση (e-Learning) είναι μια μορφή εκπαίδευσης από απόσταση (Distance Education), που βασίζεται σε υπηρεσίες του διαδικτύου. Δεν καταργεί τις παραδοσιακές μεθόδους εκπαίδευσης, αλλά τις διευρύνει, τις ενδυναμώνει και προσεγγίζει με έναν νέο τρόπο την μαθησιακή διαδικασία. Η έννοια της ηλεκτρονικής μάθησης σχετίζεται με την ενσωμάτωση ψηφιακών μέσων, εφαρμογών και διαδικασιών στην εκπαιδευτική διαδικασία, που περιλαμβάνει: (α) τα μαθήματα μέσω υπολογιστή, με τη χρήση ειδικών προγραμμάτων εκπαιδευτικού λογισμικού, (β) τη μάθηση από απόσταση, μέσω διαδικτυακών υπηρεσιών και, ειδικότερα, μέσω του World Wide Web, (γ) τις «εικονικές τάξεις», με τη χρήση εργαλείων τηλεδιάσκεψης, και (δ) τη συνεργατική μάθηση, που υποστηρίζεται από ηλεκτρονικά μέσα.

Η ηλεκτρονική μάθηση υιοθετείται διεθνώς όλο και περισσότερο από τα σχολεία, τα εκπαιδευτικά ιδρύματα της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, τις εταιρείες και τους κυβερνητικούς οργανισμούς, ως μια πολλά υποσχόμενη λύση για την επιτυχή μάθηση. Ειδικότερα:

- Στη σχολική εκπαίδευση
- Τα ιδρύματα της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης
- Στους χώρους εργασίας

2.2 Μοντέλα ηλεκτρονικής μάθησης

Τα κυρίαρχα μοντέλα που επικρατούν στη διαδικασία της ηλεκτρονικής μάθησης είναι τα παρακάτω:

- ασύγχρονη ατομική εκπαίδευση μέσω διαδικτύου,
- ασύγχρονη ηλεκτρονική υποστήριξη απόδοσης μέσω διαδικτύου,
- ασύγχρονη εικονική τάξη,
- σύγχρονη εικονική τάξη.

2.3 Συνδυαστική μάθηση

Η μεικτή, υβριδική ή συνδυαστική μάθηση (Blended Learning) αναφέρεται στον λειτουργικό συνδυασμό της παραδοσιακής εκπαιδευτικής προσέγγισης, δηλαδή της διδασκαλίας πρόσωπο με πρόσωπο, με την εξ αποστάσεως εκπαίδευση, η οποία χρησιμοποιεί σύγχρονη ή ασύγχρονη τηλεκπαίδευση, είτε μέσω διαδικτύου είτε μέσω άλλων ΤΠΕ υποδομών .

2.4 Συστήματα Διαχείρισης Μαθημάτων

Τα Συστήματα Διαχείρισης Μαθημάτων (ΣΔΜ) διακρίνονται κυρίως σε δυο κατηγορίες, τα Συστήματα Διαχείρισης Περιεχομένου (Content Management System – CMS) και τα Συστήματα Διαχείρισης Μάθησης (Learning Management Systems – LMS).

2.5 Συστήματα Διαχείρισης Περιεχομένου

Τα συστήματα διαχείρισης περιεχομένου (Content Management System-CMS) είναι εφαρμογές με τις οποίες μπορεί κανείς να διαχειριστεί συγκεντρωμένες πληροφορίες ηλεκτρονικής μορφής στο διαδίκτυο. Ένα CMS μπορεί να περιέχει μορφές μαθησιακού υλικού όπως: Μαθήματα, Πολυμέσα, Ιστοσελίδες, Δοκιμασίες ελέγχου της μάθησης κ.λπ. Όταν ένα CMS χρησιμοποιείται για τις ανάγκες της εκπαίδευσης. μπορεί να χαρακτηριστεί ως Σύστημα Διαχείρισης Περιεχομένου Μάθησης (Content Course Management System). Τέτοια συστήματα επιτρέπουν στον διδάσκοντα να δημιουργήσει ένα διαδικτυακό μάθημα, όπου θα μπορούν να εισαχθεί εκπαιδευτικό υλικό (π.χ κείμενα, παρουσιάσεις, βίντεο κλπ) χωρίς να χρειάζονται κάποια απαραίτητη μετατροπή σε υλικό κατάλληλο για ιστοσελίδες (web formats). (Ε.Πιλάβη, 2011)

2.6 Συστήματα Διαχείρισης Μάθησης

Μια ευρύτερη κατηγορία συστημάτων διαχείρισης μάθησης είναι τα LMS (Learning Management Systems-LMS). Τα LMS είναι συστήματα τα οποία, διανέμουν και διαχειρίζονται όλες τις μαθησιακές ανάγκες. Μέσω ενός ολοκληρωμένου, βασισμένου στο Web περιβάλλοντος διεπαφής, το LMS επιτρέπει στους διαχειριστές να εκτελούν διαχειριστικές εργασίες, όπως να εγγράφουν νέους εκπαιδευόμενους, να καταγράφουν την ολοκλήρωση των μαθημάτων και ενοτήτων και τις επιδόσεις των εκπαιδευομένων, και να δημιουργούν σχετικές αναφορές. Τυπικά ένα LMS είναι ένα λογισμικό που βασίζεται στο Internet το οποίο διαχειρίζεται, παρακολουθεί και παρέχει πληροφορίες σχετικά με την αλληλεπίδραση μεταξύ του εκπαιδευόμενου και του περιεχομένου, καθώς και μεταξύ του εκπαιδευόμενου και του εκπαιδευτή.

Το LMS, σύστημα διαχείρισης εκμάθησης, είναι μια εφαρμογή λογισμικού που βοηθάει στη διαχείριση, τεκμηρίωση, παρακολούθηση, αναφορά, αυτοματοποίηση και παροχή εκπαιδευτικών μαθημάτων, εκπαιδευτικών προγραμμάτων ή προγραμμάτων εκμάθησης και ανάπτυξης. (Ε.Πιλάβη, 2011)

2.7 Το Moodle

Το όνομα Moodle προέρχεται από το ακρώνυμο των λέξεων Modular ObjectOriented Dynamic Learning Environment και είναι ένα πακέτο λογισμικού για την δημιουργία διαδικτυακών μαθημάτων. Δημιουργήθηκε το 1999 από τον Αυστραλό Martin Dougiamas ως τμήμα της διδακτορικής του διατριβής. Οι δυνατότητες του δεν περιορίζονται στην εκπαίδευση από απόσταση αλλά μπορεί να λειτουργήσει συμπληρωματικά και στην κλασσική διδασκαλία. Μέσα από την πλατφόρμα Moodle ο εκπαιδευτικός μπορεί να παρουσιάσει το μάθημα του με τέτοιο τρόπο ώστε να προκαλεί ενδιαφέρον στον εκπαιδευόμενο χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα. Για παράδειγμα, διάθεση υλικού του μαθήματος σε διαφορετικές μορφές, προσθήκη δραστηριοτήτων, σύγχρονη και ασύγχρονη επικοινωνία μεταξύ μελών, ανάθεση εργασιών, αξιολόγηση της επίδοσης (Βερναδάκης κ.α., 2007). Το Moodle παρέχεται δωρεάν σαν λογισμικό Open Source (κάτω από την άδεια GNU-Public Lisence). Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι το Moodle έχει πνευματικά δικαιώματα αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί, να γίνουν αντιγραφές του, και τροποποιήσεις του υπό τον όρο να παρέχεται ο πηγαίος κώδικα και σε άλλους, να μην αλλάξει ή αφαιρεθεί η επίσημη άδεια και να εφοδιάζετε με αυτήν οποιαδήποτε παράγωγη δουλειά. Το Moodle μπορεί να τρέξει σε οποιοδήποτε σύστημα υπολογιστή υποστηρίζει τη γλώσσα PHP, και διαφορετικούς τύπους βάσεων δεδομένων αλλ'α κυρίως χρησιμοποιεί την MySql. Είναι μια εφαρμογή Web/Client, δηλαδή βρίσκεται εγκατεστημένο σε κάποιο Seryer και οι χρήστες έχουν πρόσβαση σ’ αυτό μέσω ενός φυλλομετρητή, όπως είναι ο Internet Explorer, ο Mozilla Firefox κ.α. Επομένως από πλευράς χρήστη (μαθητή, καθηγητή και διαχειριστή) απαιτούνται μόνο η ύπαρξη μιας σύνδεσης στο Internet και το κατάλληλο λογισμικό περιήγησης. Το Moodle ενσωματώνει λειτουργίες οι οποίες το καθιστούν ένα πολυσύνθετο, ευέλικτο και αρκετά ασφαλές εργαλείο στην ασύγχρονη εκπαίδευση από απόσταση. Είναι διαδεδομένο σε όλο τον κόσμο. Μεταξύ των οργανισμών που το χρησιμοποιούν είναι το MIT, το Yale και άλλα πανεπιστήμια στην Αμερική και στην Ευρώπη. Στην Ελλάδα η πλατφόρμα έχει εγκατασταθεί σε περισσότερους από 45 φορείς εκπαίδευσης και κατάρτισης, μεταξύ των οποίων το Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο και τα Πανεπιστήμια Μακεδονίας και Θεσσαλίας. (Ε.Πιλάβη, 2011)

Βασικά Χαρακτηριστικά:

1. Οργάνωση του εκπαιδευτικού υλικού ανάλογα με τις απαιτήσεις που υφίστανται σε κάθε περίπτωση (π.χ. ανά εβδομάδα ή ανά θεματική ενότητα)

2. Υποστήριξη μιας μεγάλης ποικιλίας δραστηριοτήτων διαφορετικού τύπου (Forums, Journals, Quizzes, Resources, Choices, Surveys και Assignments).

3. Αυτόματη εγγραφή των φοιτητών μέσα από το Διαδίκτυο οι οποίοι στη συνέχεια εφ' όσον έχουν τα κατάλληλα δικαιώματα μπορούν να εγγραφούν στα μαθήματα της αρεσκείας τους χωρίς την παρέμβαση του διαχειριστή του μαθήματος.

4. Παροχή υψηλού επιπέδου ασφαλείας.

5. Αυτόματη βαθμολόγηση των διαγωνισμάτων με απευθείας ενημέρωση του φοιτητή.

6. Δυνατότητα δημιουργίας του προσωπικού προφίλ για τους εγγεγραμμένους φοιτητές.

7. Δυνατότητα ηλεκτρονικής υποβολής των εργασιών των φοιτητών στο σύστημα. Για αυτές τις εργασίες υπάρχει η δυνατότητα καθορισμού προθεσμίας υποβολής (Deadline).

8. Δυνατότητα καταγραφής και ελέγχου των διάφορων τύπων δραστηριοτήτων των φοιτητών από το διαχειριστή του συστήματος.

9. Είναι ένα βασικό συστατικό της ανθρώπινης φύσης που μας υποκινεί η ανταμοιβή και τα επιτεύγματα. Σε ένα LMS, η παιχνιδοποίηση (gamification) συνήθως επιτυγχάνεται μέσω της χρήσης πόντων, βαθμολογιών, σημάτων και άλλων. Όταν ένας μαθητής έχει την ευκαιρία να εργαστεί προς ένα συγκεκριμένο επίπεδο, η εμπειρία έχει δείξει ότι είναι πιο πιθανό να ασχοληθούν με το περιεχόμενο και να διατηρήσουν καλύτερα αυτά που έχουν μάθει.

10. Υποστήριξη 75 και πλέον διαφορετικών φυσικών γλωσσών, μεταξύ των οποίων περιλαμβάνεται και η Ελληνική γλώσσα. (2ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ, 2011)

2.8 Γενικά για το e-Class

Η Ηλεκτρονική Τάξη (e-Class) είναι μια πλατφόρμα που αποτελεί ένα ολοκληρωμένο και εύχρηστο περιβάλλον επικοινωνίας και συνεργασίας μεταξύ διδασκόντων και φοιτητών. Ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα να οργανώνει εύχρηστα και λειτουργικά ηλεκτρονικά μαθήματα, τα οποία δρουν επικουρικά στην εκπαιδευτική του δραστηριότητα και την επαφή του με τους φοιτητές.

Το Open eClass είναι το νέο σύστημα ασύγχρονης τηλεκπαίδευσης του ελληνικού ακαδημαϊκού δικτύου GUNET που υποστηρίζεται στο Ο.Π.Α. από το Κέντρο Διαχείρισης Δικτύων. Η αρχική εγκατάσταση και προσαρμογή του νέου εξυπηρετητή eClass έγινε στα πλαίσια του έργου ΕΠΕΑΕΚ-ΙΙ, που συγχρηματοδοτήθηκε από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση. Στα πλαίσια του ίδιου έργου είχε εγκατασταθεί και προσαρμοστεί στις ανάγκες του Ο.Π.Α. ο παλιός εξυπηρετητής eClass.

2.9 Φιλοσοφία Πλατφόρμας

Βασικός προσανατολισμός της πλατφόρμας είναι η ενίσχυση και η υποστήριξη της εκπαιδευτικής δραστηριότητας μέσα από ένα εύχρηστο περιβάλλον τεχνολογικής αιχμής. Στόχος είναι η ενίσχυση της παραδοσιακής διδασκαλίας στους συμμετέχοντες στην εκπαιδευτική διαδικασία. Ειδικότερα στον εκπαιδευτή και στον εκπαιδευόμενο προσφέρεται ένα δυναμικό περιβάλλον οργάνωσης της γνώσης, στο διαχειριστή ένα ανοικτό ασφαλές κι αξιόπιστο σύστημα και τέλος στο Πανεπιστήμιο αποτελεσματικότητα, αξιοποίηση της συσσωρευμένης εμπειρίας, οικονομία κλίμακας και εποικοδομητική χρήση της υπάρχουσας δικτυακής υποδομής.

2.10 Στόχοι και Οφέλη

Βασική επιδίωξη της πλατφόρμας αποτελεί η ανάπτυξη υποδομών εκπαίδευσης και κατάρτισης ανεξάρτητα από τους περιοριστικούς παράγοντες του χώρου και του χρόνου της συμβατικής διδασκαλίας. Ειδικότερα, οι βασικοί στόχοι που ικανοποιούνται από το σχεδιασμό της πλατφόρμας και τα οφέλη που αποκομίζονται από τη χρήση της είναι τα εξής:

· Δημιουργία ενός εύχρηστου μέσου αλληλεπίδρασης και συνεχούς επικοινωνίας εκπαιδευτή – εκπαιδευόμενου.

· Ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών της πληροφορίας και των επικοινωνιών (ΤΠΕ) στην εκπαιδευτική δραστηριότητα για την παροχή ανταγωνιστικών υπηρεσιών εκπαίδευσης υψηλής ποιότητας μέσα από ένα σύγχρονο περιβάλλον τεχνολογικής αιχμής.

· Αξιοποίηση του πλούσιου εκπαιδευτικού υλικού και της συσσωρευμένης εκπαιδευτικής εμπειρίας.

· Εποικοδομητική χρήση του διαδικτύου και της άρτιας δικτυακής υποδομής των εκπαιδευτικών οργανισμών.

· Ευκολία στη χρήση από εκπαιδευτές – εκπαιδευόμενους για την υποστήριξη ατόμων με διαφορετική τεχνολογική παιδεία και κουλτούρα αλλά με τις ίδιες υψηλές απαιτήσεις στην ποιότητα της προσφερόμενης εκπαίδευσης .

· Παροχή μιας αξιόπιστης χαμηλού κόστους υπηρεσίας τηλεματικής για την Ασύγχρονη Τηλεκπαίδευση

· Προσαρμοστικότητα στις ιδιαίτερες απαιτήσεις και ανάγκες.

· Ευκολία στη διαχείριση, την αναβάθμιση και την επέκταση.

· Ελεύθερη διάθεση και κεντρική υποστήριξη από το Πανελλήνιο Ακαδημαϊκό Διαδίκτυο GUnet .

Η πλατφόρμα Open eClass είναι η δημοφιλέστερη μεταξύ των Ακαδημαϊκών Ιδρυμάτων στον ελληνικό χώρο όπου φιλοξενείται ένας μεγάλος αριθμός ψηφιακών μαθημάτων με ολοένα και περισσότερα άτομα να τα αξιοποιούν και να λαμβάνουν μέρος σε αυτά. Σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, τα τελευταία χρόνια και με αφορμή την πανδημία του Covid-19, εδραιώθηκε η χρήση και η αξιοποίηση από τους εκπαιδευτικούς, της ηλεκτρονικής τάξης (η-Τάξη) σε κάθε σχολείο της ελληνικής επικράτειας.

Στα πλαίσια της δημιουργίας ενός διαύλου επικοινωνίας, για την καλύτερη υποστήριξη, σχεδιασμό και ανάπτυξη της πλατφόρμας Open eClass, αναπτύχθηκε ένα ανοικτό δίκτυο εγκαταστάσεων της πλατφόρμας σε όλη τη χώρα.

Το ηλεκτρονικό μάθημα αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα της πλατφόρμας Open eClass. Κάθε μάθημα αποτελεί μια αυτόνομη οντότητα στην πλατφόρμα η οποία ενσωματώνει μια σειρά από υποσυστήματα. Ουσιαστικά το ηλεκτρονικό μάθημα είναι μια αρθρωτή δομή, η οποία οργανώνεται και διαχειρίζεται από τον υπεύθυνο καθηγητή, ανάλογα με το υλικό που διαθέτει και το μοντέλο ηλεκτρονικής μάθησης που θα υιοθετήσει (από μια απλή ενημερωτική ιστοσελίδα έως ένα πλήρως δυναμικό περιβάλλον εκπαίδευσης). Τα υποστηριζόμενα υποσυστήματα είναι τα εξής:

1. **Ατζέντα** όπου παρουσιάζονται χρονικά τα γεγονότα σταθμοί του μαθήματος (διαλέξεις, συναντήσεις, αξιολογήσεις, κλπ).

2. **Έγγραφα** όπου αποθηκεύεται, οργανώνεται και παρουσιάζεται το εκπαιδευτικό υλικό του μαθήματος. Ειδικότερα το υποσύστημα αυτό παρέχει έναν εύχρηστο μηχανισμό για τη διαχείριση, την οργάνωση και την ομαδοποίηση του εκπαιδευτικού υλικού (κείμενα, παρουσιάσεις, εικόνες, διαγράμματα, κλπ) μέσα από ένα σύστημα καταλόγων και υποκαταλόγων.

3. **Ανακοινώσεις** που αφορούν το μάθημα και ενημερώνουν τους εγγεγραμμένους χρήστες, εκπαιδευτές και εκπαιδευόμενους.

4. **Περιοχές Συζητήσεων** για την ανταλλαγή απόψεων και ιδεών σε θέματα σχετικά με το μάθημα. Αποτελεί ένα υποσύστημα αλληλεπίδρασης εκπαιδευτή – εκπαιδευόμενου.

5. **Ομάδες Εργασίας** (ανοικτές ή κλειστές), αποτελούν μια συλλογή από εγγεγραμμένους χρήστες (εκπαιδευόμενοι και εκπαιδευτές) που μοιράζονται την ίδια περιοχή συζητήσεων καθώς και την ίδια περιοχή μεταφόρτωσης αρχείων και εργασιών, και προάγουν τη συνεργασία και την αλληλεπίδραση ανάμεσα στους εκπαιδευόμενους.

6. **Σύνδεσμοι** – χρήσιμες πηγές από το Διαδίκτυο που αφορούν το μάθημα και ομαδοποιούνται σε κατηγορίες.

7. **Εργασίες Εκπαιδευόμενων**, ένα χρήσιμο εργαλείο που επιτρέπει την ηλεκτρονική διαχείριση, υποβολή και βαθμολόγηση των εργασιών του μαθήματος.

8. **Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης** που δημιουργεί ο εκπαιδευτής με στόχο την εξάσκηση των Εκπαιδευόμενων στην ύλη του μαθήματος. Το υποσύστημα αυτό ενσωματώνει μια γεννήτρια παραγωγής Ασκήσεων με ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών, καθώς και ασκήσεις του τύπου «συμπληρώματος κενών» ή «ταιριάσματος στηλών».

9. **Περιγραφή Μαθήματος**, χώρος όπου παρουσιάζονται πληροφορίες σχετικά με την ύλη, τους στόχους, τις εκπαιδευτικές δραστηριότητες, τα βοηθήματα, τους τρόπους αξιολόγησης, κλπ του μαθήματος.

10. **Γλωσσάριο**, χώρος για την προσθήκη και διαχείριση όρων που περιλαμβάνονται στο μάθημα.

11. **Ηλεκτρονικό Βιβλίο**, χώρος για την εισαγωγή, διαχείριση και παρουσίαση ηλεκτρονικών βιβλίων σε μορφή HTML.

12. **Πολυμέσα**, χώρος αποθήκευσης και διάθεσης οπτικοακουστικού εκπαιδευτικού υλικού. Υπάρχουν δύο επιλογές: προσθήκη πολυμεσικού αρχείου και προσθήκη εξωτερικού συνδέσμου σε αρχείο πολυμέσων που βρίσκεται αποθηκευμένο π.χ. στο Youtube, ή σε έναν VideoOnDemand Server (VoD), κλπ και αφορούν το μάθημα.

13. **Γραμμή Μάθησης**, παρέχει τη δυνατότητα στους εκπαιδευτές να οργανώσουν το εκπαιδευτικό τους υλικό σε δομημένες ενότητες και στους εκπαιδευόμενους να ακολουθούν μια σειρά από βήματα ως δραστηριότητες μάθησης. (SCORM).

14. **Κουβέντα** είναι ένα υποσύστημα που παρέχει τη δυνατότητα ανταλλαγής γραπτών μηνυμάτων (chat) σε πραγματικό χρόνο.

15. **Τηλεσυνεργασία** είναι ένα υποσύστημα που παρέχει τη δυνατότητα επικοινωνίας με εργαλείο whiteboard και να επικοινωνεί με εικόνα και ήχο με τους με τους εκπαιδευόμενους σε πραγματικό χρόνο.

16. **Ερωτηματολόγια** είναι ένα υποσύστημα που παρέχει τη δυνατότητα δημιουργίας δημοσκοπήσεων και ερευνών μαθησιακού προφίλ.

17. **Wiki** είναι ένα εργαλείο συνεργασίας που επιτρέπει στους συμμετέχοντες στο μάθημα εκπαιδευτές κι εκπαιδευόμενους να επεξεργάζονται από κοινού το περιεχόμενο διαφόρων κειμένων.

18. **Χώρος Ανταλλαγής Μηνυμάτων** όπου υποστηρίζεται η ανάδραση στην εκπαιδευτική δραστηριότητα με την ανταλλαγή μηνυμάτων μεταξύ των υπεύθυνων εκπαιδευτών και των εγγεγραμμένων εκπαιδευόμενων του μαθήματος.

19. **Βαθμολόγιο**: Καταγραφή βαθμολογίας εκπαιδευομένων.

20. **Παρουσιολόγιο**: Καταγραφή παρουσιών/απουσιών εκπαιδευομένων.

21. **Στατιστικά**: Στατιστικά στοιχεία χρηστών.

    (OpenEclass.org)

Κεφάλαιο 3ο – Η δευτεροβάθμια εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0}$

Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις παρέχουν τα πρώτα θεμελιώδη στοιχεία σχεδιασμού και ερμηνείας των γραφικών παραστάσεων (οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα σημεία τομής της παραβολής με τον άξονα $x'x$), τα οποία είναι απαραίτητα για την γενικότερη μελέτη των συναρτήσεων στην Γ Λυκείου. Επιπλέον, υπάρχουν πολλά προβλήματα της καθημερινότητας που συνδέονται με την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

3.1 Μαθηματικές Ικανότητες

Η μαθηματική ικανότητα είναι σύνθετη ικανότητα που συγκροτείται από πέντε επιμέρους στοιχεία.

Α) Η ικανότητα επίλυσης προβλημάτων.

Η επίλυση προβλημάτων ορίζεται «ως συμμετοχή σε μια εργασία για την οποία η μέθοδος επίλυσης δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων». Αυτός ο ορισμός υπονοεί ότι, σε αυτήν την προοπτική, υπάρχουν μόνο δύο τύποι μαθηματικών εργασιών: προβλήματα και μη προβλήματα. Τα τελευταία ονομάζονται συχνά «καθήκοντα ρουτίνας» ή «ασκήσεις».

Β) Συλλογιστική Ικανότητα

Η συλλογιστική ικανότητα είναι η ικανότητα εκτέλεσης μαθηματικού συλλογισμού. Εδώ, ο συλλογισμός ορίζεται ως η ρητή πράξη αιτιολόγησης επιλογών και συμπερασμάτων με μαθηματικά επιχειρήματα. Αυτός ο ορισμός βασίζεται σε ένα επιλεγμένο μέρος του ορισμού της συλλογιστικής στο NCTM (2000): «να αναπτύξει και να αξιολογήσει μαθηματικά επιχειρήματα και αποδείξεις» (σελ. 55). Επιπλέον, αυτός ο ορισμός εστιάζει ιδιαίτερα στο ότι ο συλλογισμός είναι σαφής, σύμφωνα με μια ιδέα των Niss και Jensen (2002) στην οποία η συλλογιστική ικανότητα συνδέεται στενά με την επίλυση προβλημάτων και τη μοντελοποίηση ως το λεγόμενο νομικό αντίστοιχο.

Γ) Διαδικαστική Ευχέρεια

Διαδικαστική ευχέρεια είναι η ικανότητα εκτέλεσης μαθηματικών διαδικασιών. Οι Kilpatrick et al., ορίζουν μια παρόμοια έννοια, διαδικαστική ευχέρεια, ως γνώση των διαδικασιών και του πότε και πώς να τα χρησιμοποιείται σωστά, καθώς και δεξιότητα στην εκτέλεσή τους με ευελιξία, ακρίβεια και αποτελεσματικότητα.

Δ) Στρατηγική Ικανότητα

Η στρατηγική ικανότητα είναι η ικανότητα σχηματισμού αναπαραστάσεων. Τα μαθηματικά βασίζονται σε αφηρημένες μαθηματικές οντότητες διαφορετικών τύπων, για παράδειγμα, αριθμοί, συναρτήσεις, γεωμετρικά αντικείμενα, εργασίες, μεθόδους, αρχές, έννοιες, φαινόμενα και ιδέες και τις ιδιότητές τους. Όταν κάνουμε μαθηματικά, πρέπει να σκεφτόμαστε τις οντότητες και τις σχέσεις τους ή κάποιες πτυχές τους.

Ε) Παραγωγική Διάθεση

Η συνήθης τάση να βλέπει κανείς τα μαθηματικά ως λογικά, χρήσιμα και αξιόλογα, σε συνδυασμό με την πίστη στην επιμέλεια και την αποτελεσματικότητά τους. (Jesper Boesen, 2018)

3.2 Μαθηματική Επάρκεια

Μια μαθηματική ικανότητα είναι η διορατική ετοιμότητα κάποιου να ενεργήσει κατάλληλα και να απαντήσει σε ένα συγκεκριμένο είδος μαθηματικής πρόκλησης σε δεδομένες καταστάσεις.

Έτσι, ενώ η **μαθηματική επάρκεια** περιλαμβάνει την ενεργοποίηση των μαθηματικών για την αντιμετώπιση όλων των προκλήσεων για την αντιμετώπιση μιας κατάστασης, η **μαθηματική ικανότητα** εστιάζει στην ενεργοποίηση των μαθηματικών για την αντιμετώπιση ενός συγκεκριμένου είδους πρόκλησης που απαιτεί πραγματικά συγκεκριμένα είδη ενεργοποίησης των μαθηματικών προκειμένου να απαντηθούν ερωτήσεις, να λυθούν προβλήματα, να κατανοηθούν φαινόμενα, σχέσεις ή μηχανισμοί και να ληφθεί μια απόφαση. Με άλλα λόγια, η **μαθηματική επάρκεια** είναι ένα οικοδόμημα που αποτελείται από ένα σύνολο μαθηματικών ικανοτήτων.

Ικανότητα μαθηματικής σκέψης – Συμμετοχή στη μαθηματική έρευνα

Αυτή η ικανότητα περιλαμβάνει τη δυνατότητα να σχετίζεται και να θέτει τα είδη γενικών ερωτήσεων που είναι χαρακτηριστικά των μαθηματικών και σχετίζονται με τη φύση των απαντήσεων που μπορεί να αναμένονται σε τέτοιες ερωτήσεις. Περιλαμβάνει περαιτέρω σχέση με το ποικίλο εύρος, εντός διαφορετικών πλαισίων, μιας μαθηματικής έννοιας του όρου καθώς και τη διάκριση μεταξύ διαφορετικών τύπων και ρόλων μαθηματικών δηλώσεων. Τέλος, περιλαμβάνει τη συσχέτιση και την πρόταση αφηρημένων εννοιών και γενίκευση αξιώσεων.

Ικανότητα μαθηματικής μοντελοποίησης – Ανάλυση και κατασκευή μοντέλων

Αυτή η ικανότητα επικεντρώνεται σε μαθηματικά μοντέλα και μοντελοποίηση, δηλαδή στα μαθηματικά που χρησιμοποιούνται για την αντιμετώπιση εξωμαθηματικών ερωτήσεων, πλαισίων και καταστάσεων. Η ικανότητα κατασκευής τέτοιων μαθηματικών μοντέλων, καθώς και η κριτική ανάλυση και αξιολόγηση υφιστάμενων ή προτεινόμενων μοντέλων αποτελούν τον πυρήνα αυτής της σύνθεσης.

Ικανότητα μαθηματικής αναπαράστασης

Αυτή η ικανότητα συνίσταται στην ικανότητα ερμηνείας καθώς και μετάφρασης και μετακίνησης μεταξύ ενός ευρέος φάσματος αναπαραστάσεων (π.χ λεκτικές, συμβολικές, γραφικές κ.α) μαθηματικών αντικειμένων, σχέσεων και διαδικασιών όπως και της ικανότητας να επιλέγεις στοχαστικά και να χρησιμοποιείς μια ή περισσότερες τέτοιες αναπαραστάσεις στην αντιμετώπιση μαθηματικών εργασιών.

Μαθηματικά σύμβολα και ικανότητα φορμαλισμού – χειρισμός μαθηματικών συμβόλων και φορμαλισμών

Η ικανότητα να συσχετίζει και να διαχειρίζεται μαθηματικά σύμβολα, εκφράσεις και μετασχηματισμούς καθώς και με τους κανόνες και το θεωρητικό πλαίσιο (φορμαλισμοί)που τα διέπουν, αποτελεί το βασικό συστατικό αυτής της ικανότητας. Από τη δεκτική πλευρά, αυτή η ικανότητα έχει να κάνει με την ερμηνεία περιπτώσεων συμβολικών εκφράσεων και μετασχηματισμών, καθώς και φορμαλισμών που ήδη υπάρχουν ενώ η εποικοδομητική πλευρά εστιάζει στην εισαγωγή και χρήση συμβόλων και φορμαλισμού στην αντιμετώπιση μαθηματικών καταστάσεων.

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι οι ικανότητες δεν είναι καθόλου ασύνδετες. Αντίθετα, κάθε ικανότητα επικαλύπτει κάθε μια από τις άλλες ικανότητες. Ωστόσο, είναι διακριτές με την έννοια ότι κάθε ικανότητα έχει μια καλά καθορισμένη ταυτότητα που την ξεχωρίζει από τις άλλες ικανότητες. (Hojgaard, 2019)

3.3 Σχέδιο μαθήματος

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζονται δύο σχέδια μαθήματος που θα εφαρμοστούν στην διδασκαλία δύο ενοτήτων στις τρεις από τις έξι συνολικά ώρες.

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑ:	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
ΤΑΞΗ:	**Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ**
ΚΕΦΑΛΑΙΟ:	**ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:	**2 ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΩΡΕΣ**

1. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ – ΚΥΡΙΟΣ ΣΚΟΠΟΣ:**

- Οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίζουν τις διάφορες εξισώσεις δευτέρου βαθμού.
- Να μπορούν χρησιμοποιούν την παραγοντοποίηση στην επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού.
- Να εκτιμούν τη δύναμη της ομάδας στην επίλυση προβλημάτων.

2. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ**

Υπενθύμιση ότι:

- $Αν\ \alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$
- Ποιες εξισώσεις λέγονται πρώτου βαθμού
- Παραγοντοποίηση πολυωνύμων (κοινός παράγοντας, διαφορά τετραγώνου και τέλειο τετράγωνο)

3. **ΜΕΣΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ – ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ – ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ**

- Διδασκαλία στο εργαστήριο πληροφορικής και στον πίνακα
- Χρήση η-τάξη (eclass)
- Εφαρμογή του ψηφιακού βιβλίου
- Χωρισμός της τάξης σε ομάδες

4. <u>ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ, ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΝΕΑΣ ΓΝΩΣΗΣ</u>

Χωρίζεται η τάξη σε δύο ομάδες και τους δίνεται ένα φύλλο εργασίας στο οποίο καλούνται να διακρίνουν τη διαφορά από τις εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού.

Ζητείται από την τάξη να απαντήσουν στην άσκηση αντιστοίχισης όπου δίνονται πολυώνυμα και γινόμενα πρώτων παραγόντων (στο eclass) και στη συνέχεια αφού χωριστούν σε τρεις ομάδες να παραγοντοποιήσουν πολυώνυμα της μορφής:

$$x^2 - 4, x^2 + 3x,\ x^2 - 6x + 9$$

Και στη συνέχεια να εξηγήσουν ποια μέθοδο παραγοντοποίησης χρησιμοποίησαν.

Ζητείται από κάποιον να θυμίσει τι ισχύει όταν $\alpha \cdot \beta = 0$

Στο ίδιο φύλλο εργασίας στο οποίο υπάρχουν εξισώσεις της μορφής οι ομάδες καλούνται να λύσουν εξισώσεις της μορφής.

$$x^2 - 4 = 0, x^2 + 3x = 0,\ x^2 - 6x + 9 = 0$$

Με τη βοήθεια κατάλληλων ερωτήσεων ελέγχουμε την κατανόηση των εννοιών.

Μεταβαίνουμε στο σύνδεσμο https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2253 όπου βρίσκεται ένα μικροπείραμα και καλώ έναν μαθητή να το εκτελέσει.

Στο τέλος, δίνεται το παρακάτω φύλλο ελέγχου για να διαπιστωθεί ο βαθμός κατανόησης και εμπέδωσης της επίλυσης εξισώσεων με την παραγοντοποίηση.

ΦΥΛΛΟ ΕΛΕΓΧΟΥ

Να αντιστοιχίσετε την εξίσωση από την στήλη Α, με την παραγοντοποιημένη μορφή της στη στήλη Β και στο τέλος με τις ρίζες της στη στήλη Γ.

Στήλη Α		Στήλη Β		Στήλη Γ
$x^2 - 6x + 9$		$x(x-2) = 0$		$x = 4$, $x = -4$
$x^2 - 16 = 0$		$(x-3)^2 = 0$		$x = 0$, $x = 2$
$x^2 - 2x = 0$		$(x-4)(x+4) = 0$		$x = 3$ *Διπλή*

(Αργυράκης)

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑ:	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
ΤΑΞΗ:	**Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**
ΕΝΟΤΗΤΑ:	**ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ**
ΚΕΦΑΛΑΙΟ:	**ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:	**1 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΩΡΑ**

1. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ – ΚΥΡΙΟΣ ΣΚΟΠΟΣ:**

   - Οι μαθητές να είναι ικανοί να αναγνωρίζουν ένα τριώνυμο καθώς και τους συντελεστές των τριών όρων του τριωνύμου.
   - Οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα να μετατρέπουν ένα τριώνυμο της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ σε γινόμενο παραγόντων.

2. **ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ**

   - Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια του τύπου

3. **ΜΕΣΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ – ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΙΣ – ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ**

   - Διδασκαλία στο εργαστήριο πληροφορικής και στον πίνακα
   - Χρήση η-τάξη (eclass)
   - Εφαρμογή του ψηφιακού βιβλίου
   - Χωρισμός της τάξης σε ομάδες

4. **ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ, ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΝΕΑΣ ΓΝΩΣΗΣ**

Αρχικά χωρίζονται οι μαθητές σε δύο ομάδες. Στην πρώτη ομάδα, στο πρώτο ερώτημα ζητείται να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - 4x - 6 = 0$ και στη συνέχεια στο δεύτερο ερώτημα να κάνουν τις πράξεις $2(x+1)(x-3)$. Σε εκείνο τη σημείο θα ερωτηθούν που κατέληξαν και διαπιστώνουμε ότι το τριώνυμο $2x^2 - 4x - 6$ παίρνει τη μορφή $\mu(x-\kappa)(x-\lambda)$ και τους ζητάμε να συνδέσουν τα κ, λ, μ με στοιχεία του τριωνύμου. Η απάντηση τους θα είναι $\mu = 2, \kappa = -1, \lambda = 3$ οπότε και γενικεύουμε ότι ένα τριώνυμο με θετική διακρίνουσα παραγοντοποιείται ως εξής: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

Αντίστοιχα, η δεύτερη ομάδα θα διαχειριστεί την εξίσωση $4x^2 - 8x + 4$ και θα γίνει η γενίκευση ότι το τριώνυμο με μηδενική διακρίνουσα παραγοντοποείται ως εξής: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)^2$.

Στο τέλος, γίνεται η ερώτηση αν είναι όλες αυτές οι δυνατές λύσεις μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης και αναμένεται να απαντήσουν οι μαθητές ότι υπάρχει και η περίπτωση της αδύνατης, εκεί όπου η διακρίνουσα έχει αρνητική τιμή και ο καθηγητής συμπληρώνει ότι σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες και το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

Αφού γίνει ανακεφαλαίωση όλων των περιπτώσεων, θα δοθεί στους μαθητές το παρακάτω φύλλο ελέγχου. Στη συνέχεια βάσει αποτελεσμάτων, η ανατροφοδότηση θα δείξει ποιο σημείο δυσκόλεψε τους μαθητές περισσότερο και πάνω στο οποίο θα γίνει παρέμβαση στο επόμενο μάθημα.

ΦΥΛΛΟ ΕΛΕΓΧΟΥ

Για κάθε τριώνυμο να βρείτε τις ρίζες του και την παραγοντοποιημένη του μορφή βάζοντας στην κατάλληλη θέση Χ.

	$x=1$, $x=-2$	$x=2$ *Διπλή*	$x=1$, $x=2$	$(x-2)^2$	$(x-1)(x-2)$	$(x-1)(x+2)$
x^2-4x+4						
x^2-3x+2						
x^2+x-2						

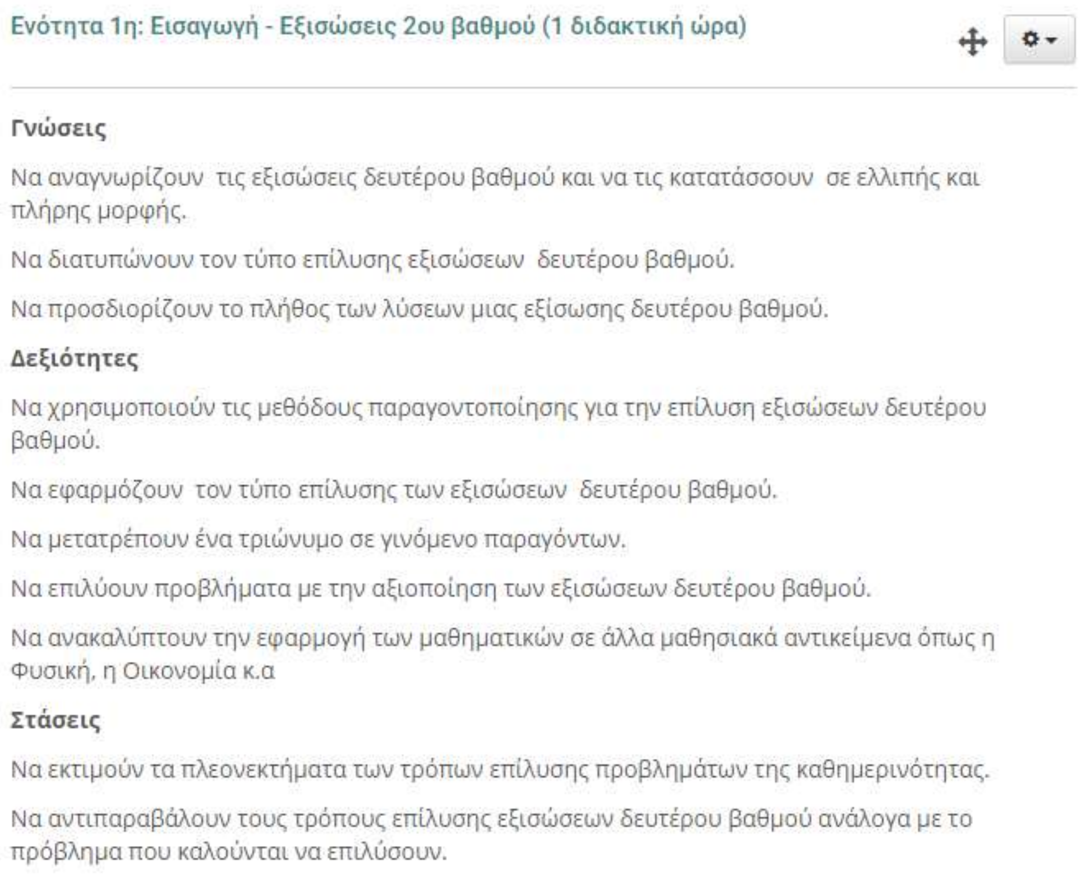
(Αργυράκης)

3.4 Το ψηφιακό μάθημα (η-τάξη) - (https://eclass11.sch.gr/courses/4414010228/)

Η πλατφόρμα που επιλέχθηκε να πραγματοποιηθεί το ψηφιακό μάθημα είναι η **η-τάξη** του Πανελλήνιου Σχολικού Δικτύου στην οποία πρόσβαση έχουν όλοι οι μαθητές και εκπαιδευτικοί που εργάζονται στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν στιγμιότυπα (screen shots) από το ψηφιακό μάθημα πάνω στη Δευτεροβάθμια Εξίσωση, ο σύνδεσμος του οποίου είναι ο:

https://eclass11.sch.gr/courses/4414010228/


Ενότητα 1η: Εισαγωγή - Εξισώσεις 2ου βαθμού (1 διδακτική ώρα)

Γνώσεις

Να αναγνωρίζουν τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού και να τις κατατάσσουν σε ελλιπής και πλήρης μορφής.

Να διατυπώνουν τον τύπο επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

Να προσδιορίζουν το πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού.

Δεξιότητες

Να χρησιμοποιούν τις μεθόδους παραγοντοποίησης για την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

Να εφαρμόζουν τον τύπο επίλυσης των εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

Να μετατρέπουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.

Να επιλύουν προβλήματα με την αξιοποίηση των εξισώσεων δευτέρου βαθμού.

Να ανακαλύπτουν την εφαρμογή των μαθηματικών σε άλλα μαθησιακά αντικείμενα όπως η Φυσική, η Οικονομία κ.α

Στάσεις

Να εκτιμούν τα πλεονεκτήματα των τρόπων επίλυσης προβλημάτων της καθημερινότητας.

Να αντιπαραβάλουν τους τρόπους επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού ανάλογα με το πρόβλημα που καλούνται να επιλύσουν.

Εικόνα 1: Η 1η ενότητα - Γνώσεις δεξιότητες και στάσεις του υπό διδασκαλία αντικειμένου

Το μήκος ενός γηπέδου 5x5 είναι 15μ μεγαλύτερο από το πλάτος του. Αν το εμβαδόν του είναι 450 τ.μ, πόσο είναι το μήκος και πόσο το πλάτος του;

Επανάληψη στην **παραγοντοποίηση**

Επειδή όποιος δεν γνωρίζει την ιστορία πέφτει στα ίδια ατοπήματα, διαβάστε το **ιστορικό σημείωμα** σχετικά με τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Εισαγωγή στις εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Πλήρης μορφή: Εξίσωση δευτέρου βαθμού καλείται κάθε εξίσωση της μορφής:

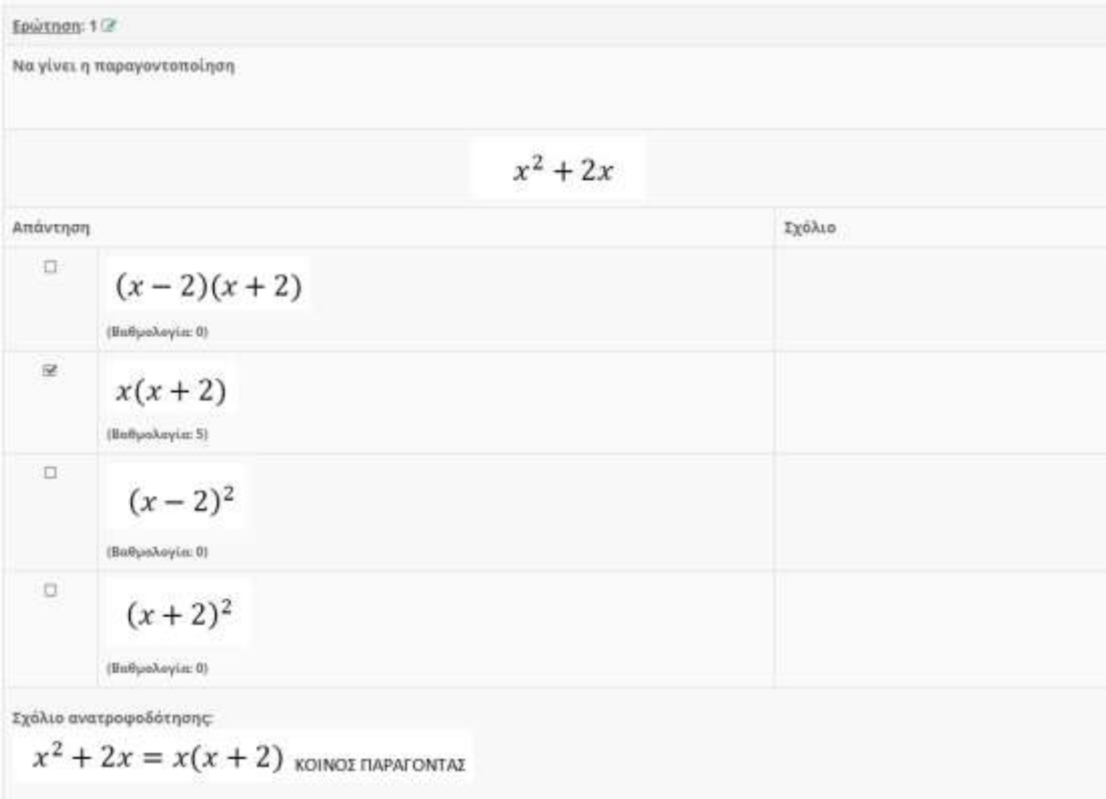
$αx^2+βx+γ=0$, με α διάφορο του 0 **(1)**

Δηλαδή, κάθε πολυωνυμική εξίσωση με βαθμό δύο.

Ελλιπής μορφή: Αν στην εξίσωση (1) ένας από τους συντελεστές είναι ίσος με το , τότε έχουμε: $αx^2+γ=0$ ή $αx^2+βx=0$.

Εικόνα 2: 1η ενότητα - Αφόρμηση με πραγματικό πρόβλημα, εισαγωγή στις εξισώσεις β' βαθμού

Σκοπός της παραπάνω άσκησης , στην παραγοντοποίηση, είναι γίνει σύνδεση των μεθόδων του κοινού παράγοντα και της διαφοράς τετραγώνων με την επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού στις περιπτώσεις που η εξίσωση δεν είναι της πλήρης μορφής. Έτσι, ο μαθητής/τρια θα είναι έτοιμος στην επίλυση παρόμοιων εξισώσεων.



Εικόνα 3: 1η ενότητα - Η σύνδεση με την προηγούμενη γνώση με μια ηλεκτρονική άσκηση κλειστού τύπου πάνω στην παραγοντοποίηση

Εδώ γίνεται η αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων που παρέχει το eclass με αποτέλεσμα ο μαθητής/τρια που θα ασχοληθεί με το συγκεκριμένο είδος ασκήσεων να έχει άμεση ανατροφοδότηση καθώς η πλατφόρμα μετά την οριστική υποβολή εμφανίζει τη βαθμολογία, τις σωστές απαντήσεις καθώς και σχόλια του εκπαιδευτικού προς τον μαθητή/τρια. Συν τοις άλλοις, ο μαθητής/τρια είναι σε θέση να λύσει την άσκηση από το σπίτι του ή οποιοδήποτε άλλο χώρο σε βολική για αυτόν χρονική στιγμή.

Ενότητα 1η: Επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

Ένα γινόμενο παραγόντων είναι ίσο με το μηδέν, όταν είτε ο ένας είτε ο άλλος παράγοντας είναι ίσος με το μηδέν. Δηλαδή ισχύει: $AB = 0 \Leftrightarrow A=0$ ή $B=0$
π.χ $(x+3)(x-2)=0 \Leftrightarrow x+3=0$ ή $x-2=0$ δηλαδή όταν $x=-3$ – ή $x=2$

Επίσης, πρέπει να γνωρίζουμε ότι αν $A^2=0 \Leftrightarrow A=0$ π.χ $(2x-5)^2=0 \Leftrightarrow 2x-5=0 \Leftrightarrow x=5/2$

Με βάση τα παραπάνω για να λύσουμε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- μεταφέρουμε όλους τους όρους στο 1ο μέλος της εξίσωσης
- αναλύουμε το 1ο μέλος σε γινόμενο πρώτων παραγόντων φέροντας το στη μορφή $AB=0$
- λύνουμε ξεχωριστά τις εξισώσεις $A=0$ και $B=0$
- οι λύσεις της δευτεροβάθμιας θα είναι οι λύσεις που πήραμε στο προηγούμενο βήμα.

Παραδείγματα

α. $x^2=-3x \Leftrightarrow x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x+3=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-3$

β. $x^2=16 \Leftrightarrow x^2-16=0 \Leftrightarrow x^2-4^2=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+4)=0 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-4$

γ. $x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Αφού δείτε το βίντεο να κάνετε τις **ασκήσεις**

Εικόνα 4: 1η ενότητα - Επίλυση εξισώσεων β' βαθμού με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης

Στις ασκήσεις αυτής της ενότητας πρόκειται οι μαθητές/τριες να εφαρμόσουν όλα όσα διδάχθηκαν ή και τους έγινε υπενθύμιση νωρίτερα σχετικά με τις μεθόδους παραγοντοποίησης που είναι χρήσιμες στην περίπτωση ελλιπών μορφών δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Αναμένεται δε, οι μαθητές/τριες να είναι πιο αποδοτικοί και να απορροφήσουν τη νέα γνώση γρηγορότερα μετά από τη σύνδεση που είχε γίνει νωρίτερα.

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x(x+1)=0$ β. $x^2(x-2)=0$ γ. $(x+3)(x-7)=0$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2-9=0$ β. $2x^2-8=0$ γ. $4x^2-100=0$

δ. $(x-1)^2-4=0$ ε. $(x+1)^2-(x-1)^2=0$ στ. $(x^2-1)(x+3)=0$

3. Να λυθούν οι εξισώσεις:

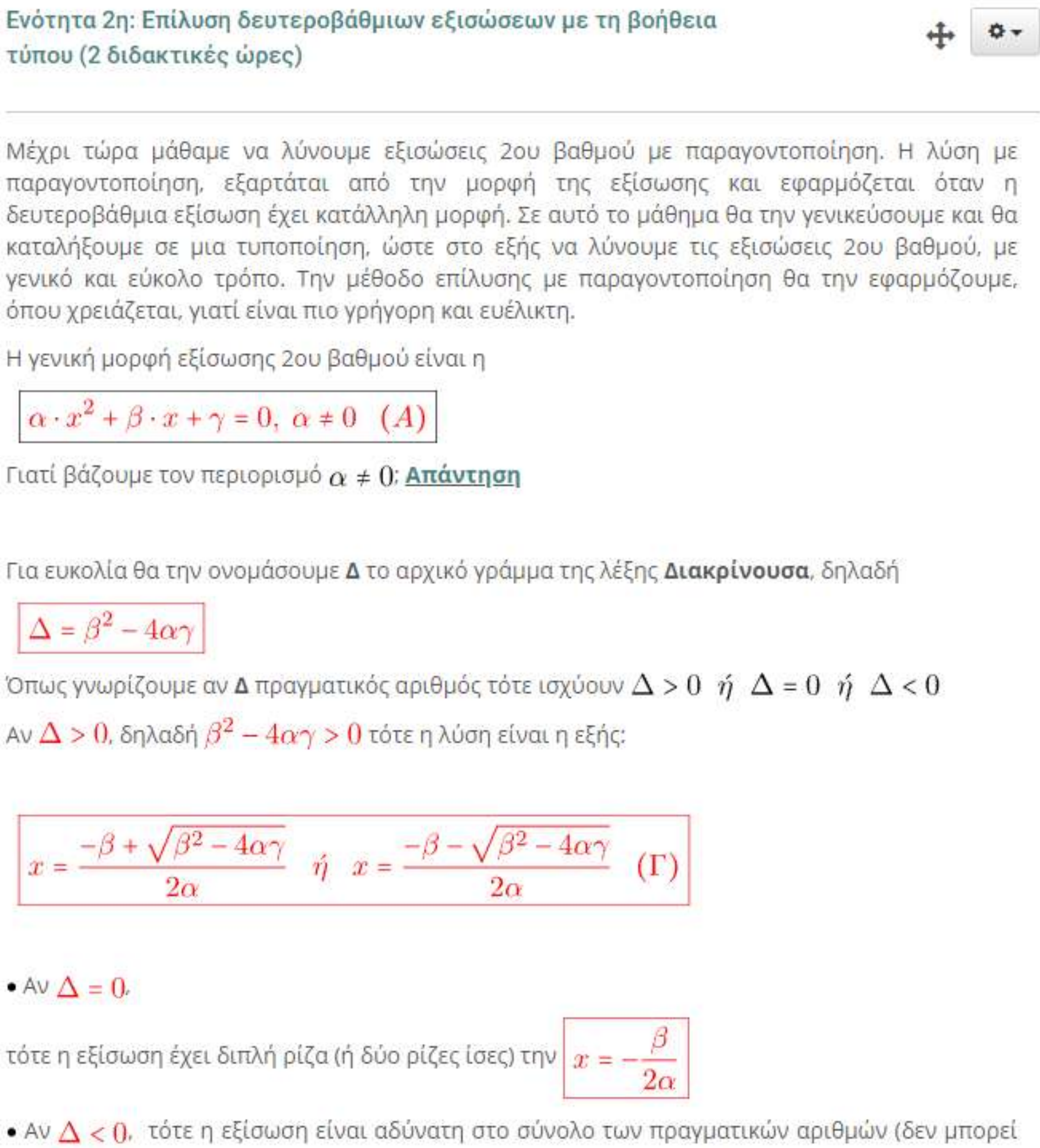
α. $2x^2+4x=0$ β. $4x^2=x$ γ. $2(x+1)^2+(x+1)=0$

δ. $4x(x+1)-2(x+1)=0$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $4x^2-4x+1=0$ β. $3x^2+6x+3=0$ γ. $\frac{x^2-2x+1}{2}=8$

Εικόνα 5: 1η ενότητα - Φυλλάδιο με ασκήσεις εξισώσεων β' βαθμού που λύνονται με παραγοντοποίηση



Ενότητα 2η: Επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη βοήθεια τύπου (2 διδακτικές ώρες)

Μέχρι τώρα μάθαμε να λύνουμε εξισώσεις 2ου βαθμού με παραγοντοποίηση. Η λύση με παραγοντοποίηση, εξαρτάται από την μορφή της εξίσωσης και εφαρμόζεται όταν η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει κατάλληλη μορφή. Σε αυτό το μάθημα θα την γενικεύσουμε και θα καταλήξουμε σε μια τυποποίηση, ώστε στο εξής να λύνουμε τις εξισώσεις 2ου βαθμού, με γενικό και εύκολο τρόπο. Την μέθοδο επίλυσης με παραγοντοποίηση θα την εφαρμόζουμε, όπου χρειάζεται, γιατί είναι πιο γρήγορη και ευέλικτη.

Η γενική μορφή εξίσωσης 2ου βαθμού είναι η

$$\boxed{\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0 \quad (A)}$$

Γιατί βάζουμε τον περιορισμό $\alpha \neq 0$; **Απάντηση**

Για ευκολία θα την ονομάσουμε **Δ** το αρχικό γράμμα της λέξης **Διακρίνουσα**, δηλαδή

$$\boxed{\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma}$$

Όπως γνωρίζουμε αν **Δ** πραγματικός αριθμός τότε ισχύουν $\Delta > 0 \ \text{ή}\ \Delta = 0 \ \text{ή}\ \Delta < 0$

Αν $\Delta > 0$, δηλαδή $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ τότε η λύση είναι η εξής:

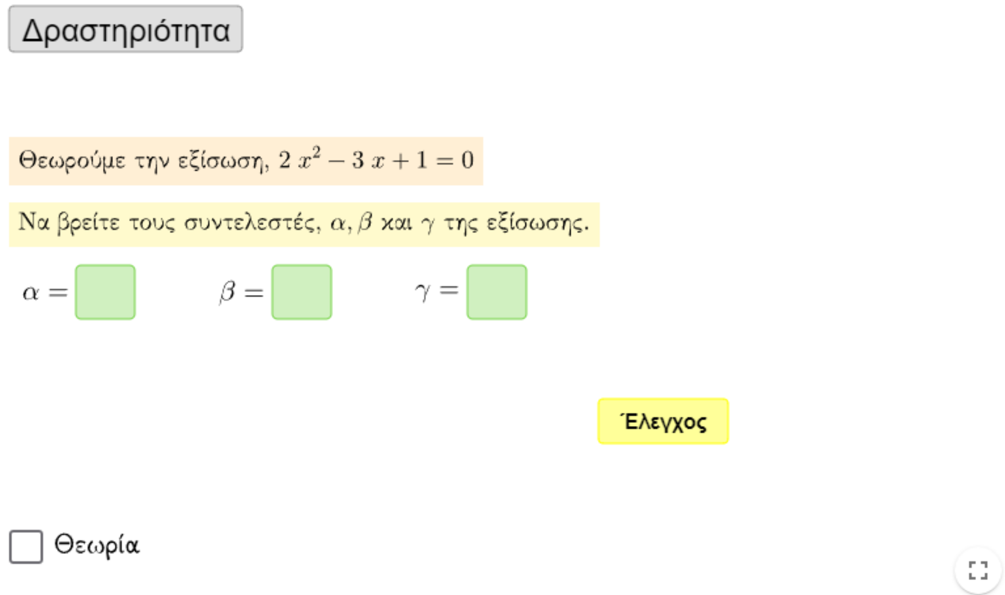
$$\boxed{x = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (\Gamma)}$$

• Αν $\Delta = 0$,

τότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα (ή δύο ρίζες ίσες) την $\boxed{x = -\frac{\beta}{2\alpha}}$

• Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (δεν μπορεί

Εικόνα 6: 2η ενότητα - Η διακρίνουσα και οι λύσεις της εξίσωσης σε σχέση με την τιμή της διακρίνουσας



Εικόνα 7: 2η ενότητα - Διαδραστική εφαρμογή επίλυσης εξισώσεων β' βαθμού

Μέσω της συγκεκριμένης εφαρμογής, οι μαθητές/τριες έχουν την ευκαιρία να πειραματιστούν, να παρατηρήσουν και να βγάλουν τα δικά τους συμπεράσματα μέσα από πλήθος επιλογών των συντελεστών α,β και γ, σχετικά με το είδος (μονή, διπλή, αρνητική, θετική) και το πλήθος των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Εξίσωση	α	β	γ
$4x^2+3x+7=0$			
$-2x^2+\frac{1}{2}x-2=0$			
$x^2=2-x$			
$-4x^{+4x}-1=0$			

2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει γενικό τύπο $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με .... Προκειμένου να λύσουμε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια του τύπου, χρειαζόμαστε τη διακρίνουσα η οποία ισούται με Δ=................................ Όταν μια δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες τότε η διακρίνουσα είναι .... Στην περίπτωση που η δευτεροβάθμια εξίσωση είναι ελλιπής μπορούμε να τη λύσουμε και με τη μέθοδο της ....

3. Να γίνει η αντιστοίχιση της εξίσωσης από τη στήλη Α με τις ρίζες από τη στήλη Β.

Α		Β
$x^2+7x+10=0$		-2 και 4
$x^2-2x-8=0$		-2 και -5
$3x^2-4x+1=0$		3 και 3
$x^2-6x+9=0$		1 και 1/3

Εικόνα 8: 2η ενότητα - Φύλλο εργασίας

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2+5x+6=0$ β. $2x^2+x-6=0$ γ. $x^2=x+2$

δ. $2x^2+3x+1=0$ε. $-3x^2+4x-1=0$ζ. $x^2+1=x$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $x^2+2x(x-1)=x(2x+3)-6$ β. $(x-2)(x+3)+10x=2(x^2+x)+8$

γ. $(x+2)^2-(x-2)(x+2)=(x+3)^2$δ. $5x^2+x(2-x)=2$

Εικόνα 9: 2η ενότητα - Φύλλο εργασίας

Ενότητα 3η: Παραγοντοποίηση τριωνύμου (1 διδακτική ώρα)

Αν έπρεπε να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $2x^2-4x-6$ πως θα συνέβαινε αυτό;

Αν η παραγοντοποίηση θα είναι της μορφής: $2x^2-4x-6=\mu(x-\kappa)(x-\lambda)$, ποιες θα είναι άραγε οι τιμές των μ,κ,λ;

Απάντηση

Πειραματιστείτε με περισσότερες περιπτώσεις στο **μικροπείραμα** του ψηφιακού σχολικού εγχειριδίου.

Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου έρχεται να προστεθεί στις ήδη γνωστές μορφές παραγοντοποίησης και υλοποιείται όπως παρακάτω:

Έστω το τριώνυμο $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$.

Προκειμένου να γίνει η παραγοντοποίηση θα πρέπει να λύσω την εξίσωση $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0}$ (1)

- Αν **Δ>0**, τότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες x1,x2 και το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γράφεται ως εξής: $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x1)(x-x2)}$
- Αν **Δ=0**, τότε η εξίσωση (1) έχει μια διπλή ρίζα x1 και το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ γράφεται ως εξής: $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x1)^2}$
- Αν **Δ<0**, τότε η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες και το τριώνυμο **δεν παραγοντοποιείται**.

Αφού δείτε το **βίντεο** να κάνετε τις **ασκήσεις**

Εικόνα 10: 3η ενότητα - Παραγοντοποίηση τριωνύμου σε σχέση με τις τιμές της διακρίνουσας

Βήμα 1: Η εξίσωση $2x^2-4x-6=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς -1 *και* 3.

Βήμα 2: Ας κάνουμε τις πράξεις: $2(x+1)(x-3)=2x^2-6x+2x-6=2x^2-4x-6$

Βήμα 3: Με τη βοήθεια των δύο προηγούμενων βημάτων να βρείτε τις τιμές των κ,λ,μ για τις οποίες ισχύει η σχέση:

$$2x^2-4x-6=\mu(x-\kappa)(x-\lambda)$$

και να συνδέσετε τα κ, λ, μ με τα στοιχεία του τριωνύμου.

Δηλαδή, παρατηρούμε ότι το $\mu=2$ είναι ο συντελεστής του x^2 στο τριώνυμο μας ενώ τα $\kappa=-1,\lambda=3$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης.

Εικόνα 11: 3η ενότητα - Η απάντηση στο ερώτημα που τέθηκε και η μεθοδολογία

Ενότητα 4η: Προβλήματα (2 διδακτικές ώρες)

Οι μέθοδοι επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού μας βοηθούν στην αντιμετώπιση πραγματικών προβλημάτων.

Θυμόσαστε το πρόβλημα που είχαμε δει στην αρχή αυτής της ενότητας;

Προβλήματα

1. Το μήκος ενός γηπέδου 5x5 είναι 15μ μεγαλύτερο από το πλάτος του. Αν το εμβαδόν του είναι 450 τ.μ, πόσο είναι το μήκος και πόσο το πλάτος του;

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι το πλάτος του είναι **x** , τότε το μήκος του θα είναι **x+15**. Επομένως το εμβαδόν του θα είναι:
$E=x(x+15) \Leftrightarrow 450 = x^2+15x \Leftrightarrow x^2+15x -450=0$
$\Delta=2025$, $x1=-30$ (απορρίπτεται) γιατί;; **x2=15 (δεκτή)**, δηλαδή το πλάτος είναι 15 εκατοστά ενώ το μήκος 30 εκατοστά.

2. Αν ένα τετράγωνο γήπεδο έχει εμβαδόν 14.400 τ.μ, πόσα μέτρα είναι η πλευρά του;

Λύση

Έστω x η πλευρά του γηπέδου, θα έχουμε $E=x^2$, επομένως $x^2=14.400 \Leftrightarrow x=\sqrt{14.400} \Leftrightarrow$ **x1=120** (δεκτή) ή x2=-120 (απορ.)

Εικόνα 12: 4η ενότητα – Προβλήματα

Ας δούμε και ένα πρόβλημα από τη Φυσική!

3. Ένας πύργος έχει ύψος 640 μέτρα. Αν από την κορυφή του ρίξουμε μια πέτρα με αρχική ταχύτητα u_0=14 m/s , πόσο χρόνο θα χρειαστεί να φτάσει στο έδαφος;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η μετατόπιση στην επιταχυνόμενη κίνηση έχει εξίσωση $h=u_0 t + 1/2\ a\ t^2$

Εδώ θεωρούμε ως επιτάχυνση τη βαρυτική επιτάχυνση $a=g=10m/s^2$

Επομένως, θα έχουμε $640=14t+5t^2 \Leftrightarrow 5t^2+14t-640=0$

Δ=196+1280=1476, **t1=10 (δεκτή)** ή t2=-12.8 (απορρίπτεται)

4. Ο Γιώργος και ο Γιάννης είναι 3 και 7 ετών αντίστοιχα. Σε πόσα χρόνια το γινόμενο των ηλικιών τους θα είναι 96;

Λύση

Έστω ότι θα περάσουν x έτη για να συμβεί το ζητούμενο. Ο Γιώργος θα είναι x+3 ετών και ο Γιάννης x+7 ετών. Επομένως, $(x+3)(x+7)=96 \Leftrightarrow x^2+7x+3x+21=96 \Leftrightarrow x^2+10x-75=0$

Η διακρίνουσα είναι Δ=400 και οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι: x1=5 και x2=-15. Προφανώς δεχόμαστε την x1 καθώς η αρνητική ρίζα θα δώσει όχι μόνο προγενέστερες ηλικίες αλλά και αρνητικές.

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 10cm, η μια κάθετη είναι κατά 2cm μεγαλύτερη της άλλης. Βρείτε τις πλευρές.

Λύση

Έστω x η μια κάθετη και x+2 η άλλη. Επειδή βρισκόμαστε σε ορθογώνιο τρίγωνο θα ισχύει το **Πυθαγόρειο Θεώρημα**.

Έχουμε, $102=x^2+(x+2)^2 \Leftrightarrow 100 = x^2 + x^2 +4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 +4x - 96 = 0$, Δ=196, x_1=-8, x_2=6, δεχόμαστε τη θετική ρίζα καθώς δεν υπάρχουν αρνητικά μήκη και οι πλευρές θα είναι 6cm και 8cm αντίστοιχα.

Εικόνα 13: 4η ενότητα – Προβλήματα

Προβλήματα δευτεροβάθμιων εξισώσεων

1. Η εξίσωση κίνησης ενός ομαλά επιταχυνόμενου σώματος είναι $s = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2$. Αν περάσει από δίπλα μας μια Bugatti Veyron με ταχύτητα $u_0 = 50 m/s$ και επιταχύνει με $\alpha = 4 m/s^2$, πόση ώρα θα χρειαστεί να φτάσει στα 700m;

2. Ο Γιώργος και ο πατέρας του έχουν 35 χρόνια διαφορά. Πόσο ετών θα είναι ο Γιώργος όταν το γινόμενο των ηλικιών τους θα είναι 564;

3. Από τον Μύτικα, την κορυφή του Ολύμπου, στα 2918m, αφήνουμε να πέσει μια πέτρα. Σε πόση ώρα θα βρίσκεται σε υψόμετρο 2198m;

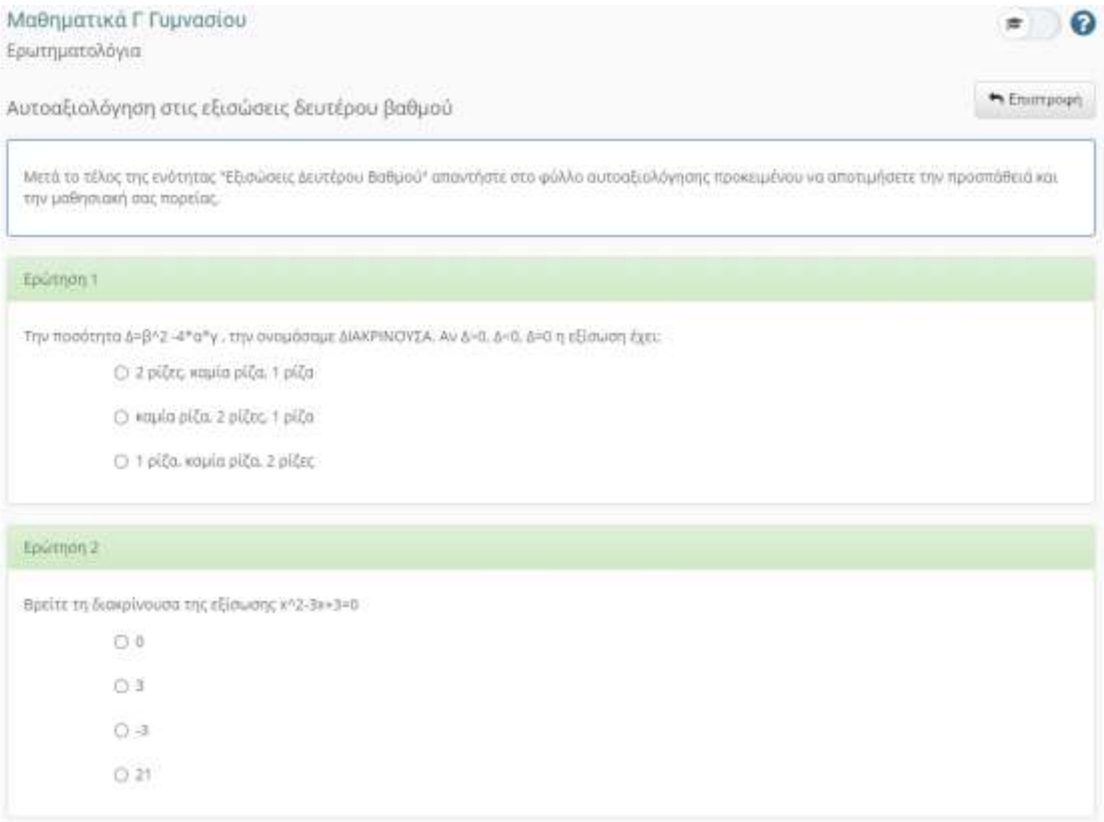
4. Ο Πλάτωνας γνώριζε ότι οι αριθμοί: $\frac{\mu^2}{4} + 1, \frac{\mu^2}{4} - 1, \mu$ αποτελούν πυθαγόρειες τριάδες. Όπου μ: άρτιος και η ελάχιστη τιμή που λαμβάνει είναι στην περίπτωση που το τρίγωνο έχει περίμετρο 12. Ποια η ελάχιστη τιμή του μ;

5. Με ένα χαρτόνι που διαθέτουμε θέλουμε να σχηματίσουμε έναν κύβο. Το διαθέσιμο χαρτόνι έχει επιφάνεια 1,014m^2. Ποιο το μήκος της πλευράς του κύβου;

6. Αν η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι ίση με 20cm και το εμβαδόν του ίσο με 16cm. Βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

Εικόνα 14: 4η ενότητα - Φύλλο εργασίας με προβλήματα

Εικόνα 15: 4η ενότητα - Ερωτήσεις από το επαναληπτικό κουίζ


Μαθηματικά Γ Γυμνασίου

Ερωτηματολόγια

Αυτοαξιολόγηση στις εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Επιστροφή

Μετά το τέλος της ενότητας "Εξισώσεις δευτέρου Βαθμού" απαντήστε στο φύλλο αυτοαξιολόγησης προκειμένου να αποτιμήσετε την προσπάθειά και την μαθησιακή σας πορείας.

Ερώτηση 1

Την ποσότητα Δ=β^2 -4*α*γ , την ονομάσαμε ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ. Αν Δ>0, Δ<0, Δ=0 η εξίσωση έχει:

- 2 ρίζες, καμία ρίζα, 1 ρίζα
- καμία ρίζα, 2 ρίζες, 1 ρίζα
- 1 ρίζα, καμία ρίζα, 2 ρίζες

Ερώτηση 2

Βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης x^2-3x+3=0

- 0
- 3
- -3
- 21

Εικόνα 16:4η ενότητα – Αυτοαξιολόγηση


Ερώτηση 3

Μια εξίσωση δευτέρου βαθμού μπορεί να έχει και περισσότερες από 2 πραγματικές ρίζες.

- Σωστό
- Λάθος

Ερώτηση 4

Η εξίσωση αx^2+βx+γ=0 είναι πάντα μια εξίσωση δευτέρου βαθμού.

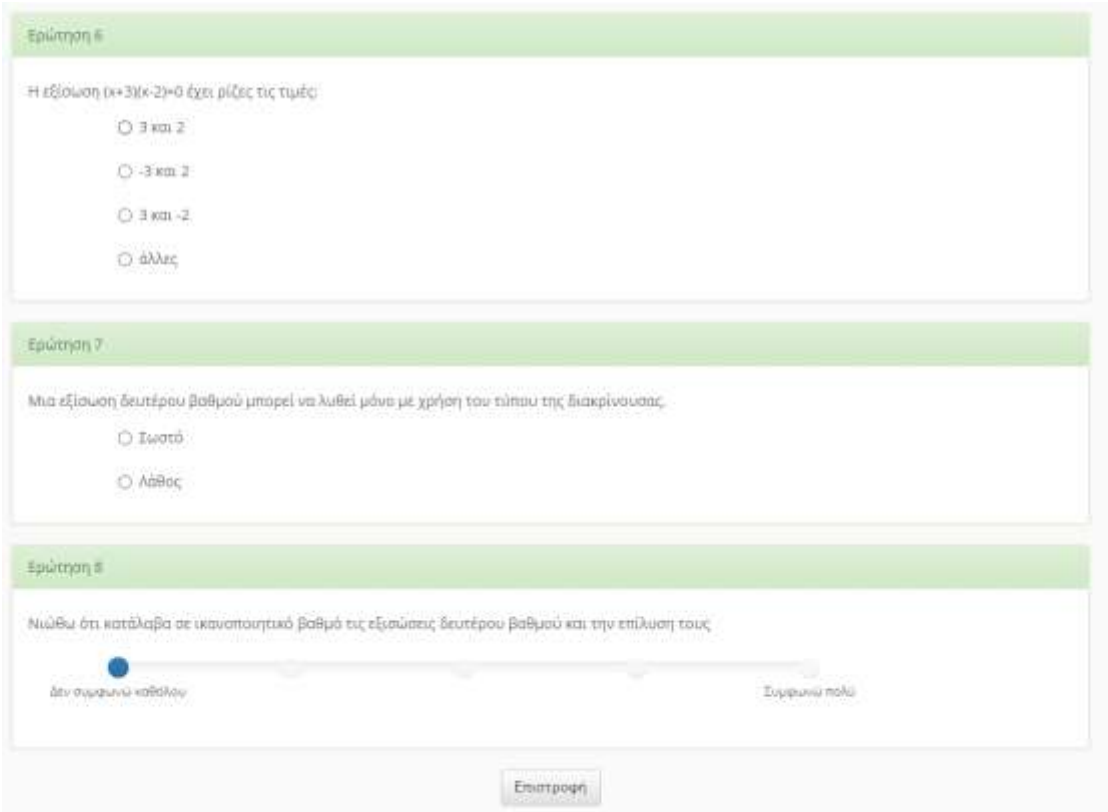
- Σωστό
- Λάθος

Ερώτηση 5

Η εξίσωση x^2=9 έχει μια ρίζα.

- Σωστό
- Λάθος

Εικόνα 17: 4η ενότητα – Αυτοαξιολόγηση



Εικόνα 18: 4η ενότητα – Αυτοαξιολόγηση

Μέσω της αυτοαξιολόγησης, οι μαθητές/τριες μπορούν να βγάλουν συμπεράσματα σχετικά με τη δική τους επίδοση. Κρίνουν και έχουν καθαρή εικόνα των αποτελεσμάτων της προσπάθειας τους μέσα στη μαθησιακή διαδικασία.

Εκτός από το προφανές, την ανατροφοδότηση που λαμβάνουν οι μαθητές/τριες αποκτούν επίγνωση των εκπαιδευτικών στόχων του προγράμματος και είναι σε θέση να κάνουν υποθέσεις για το ποια είναι τα καταλληλότερα μέσα για την επίτευξη των στόχων τους καθώς και της βελτίωσης της απόδοσής τους.

Με το πέρας του μαθήματος αναμένεται οι μαθητές να έχουν αναπτύξει ή βελτιώσει ορισμένες μαθηματικές ικανότητες.

Είναι αναμενόμενο η ύπαρξη και η τριβή με τα προβλήματα δευτεροβάθμιων εξισώσεων να ενεργοποιήσει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων όπως και την ικανότητα μαθηματικής μοντελοποίησης. Η συμμετοχή σε εργασία για την οποία η μέθοδος επίλυσης δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων αλλά και η κατασκευή μοντέλων για την μετάφραση από φυσική γλώσσα σε αλγεβρική είναι στοιχεία που ενεργοποιούν την κριτική ανάλυση που αποτελεί τον πυρήνα αυτών των ικανοτήτων.

Η περίπτωση της επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη χρήση τύπου ενισχύει την ικανότητα φορμαλισμού, την ικανότητα δηλαδή των μαθητών να διαχειρίζονται μαθηματικά σύμβολα, εκφράσεις και μετασχηματισμούς. Η χρήση και η εξοικείωση με τους τύπους όπως και η αναγνώριση της λειτουργικότητας των βοηθάει τους μαθητές να αντιμετωπίζουν ευκολότερα μαθηματικές καταστάσεις και προκλήσεις.

Τέλος, η ικανότητα μαθηματικής πολλαπλής αναπαράστασης αναπτύσσεται μέσα από τη μετάφραση διαφορετικών μαθηματικών οντοτήτων και διαδικασιών. Η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη βοήθεια παραγοντοποίησης, με τη βοήθεια του τύπου αλλά και οπτικά μέσω της γραφικής παράστασης (μικροπείραμα φωτόδεντρου) και των σημείων τομής με τον οριζόντιο άξονα καλλιεργεί την εν λόγω ικανότητα πολλαπλής αναπαράστασης.

3.5 Προβλήματα δευτεροβάθμιων εξισώσεων

Τα προβλήματα που επιλύονται με δευτεροβάθμιες εξισώσεις δυσκολεύουν τους μαθητές κυρίως στην μετάφραση από τη φυσική γλώσσα σε μαθηματική (αλγεβρική). Η αποτυχία οφείλεται στην αδυναμία διατύπωσης των κατάλληλων σχέσεων. Η δημιουργία εκφράσεων με αλγεβρικούς όρους είναι ένας σκόπελος που διογκώνεται καθώς οι μαθητές επικεντρώνονται στις πράξεις που πρέπει να γίνουν και όχι στον πυρήνα του προβλήματος.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται μερικά ενδεικτικά προβλήματα καθημερινής ζωής που μπορούμε να λύσουμε με τη χρήση δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

1. Αν ένα τετράγωνο γήπεδο έχει εμβαδόν 14.400 τ.μ, πόσα μέτρα είναι η πλευρά του;

Λύση

Έστω x η πλευρά του γηπέδου, θα έχουμε:

$$E = x^2 \Leftrightarrow 14400 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{14400} \Leftrightarrow x = 120m\ (\delta\varepsilon\kappa\tau ή)$$

ή $x = -120m\ (\alpha\pi o\rho\rho ί\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)$

2. Το μήκος ενός ορθογωνίου είναι κατά 2 εκατοστά μεγαλύτερο από το πλάτος του. Αν το εμβαδόν του είναι 80 τ.εκ, πόσο είναι το μήκος και πόσο το πλάτος του;

Λύση

Αν υποθέσουμε ότι το πλάτος του είναι $\boldsymbol{x}$, τότε το μήκος του θα είναι $\boldsymbol{x+2}$. Επομένως το εμβαδόν του θα είναι:

$$E = x(x+2) \ \Leftrightarrow\ 80 \ =\ x^2 + 2x \ \Leftrightarrow\ x^2 + 2x - 80 = 0$$

$\Delta = 324\ \ o\pi ό\tau\varepsilon\ \ x_1 = -10\ (\alpha\pi o\rho\rho ί\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota)$ή $\boldsymbol{x_2 = 8(\delta\varepsilon\kappa\tau}$ή), δηλαδή το πλάτος είναι 8 εκατοστά ενώ το μήκος 10 εκατοστά.

3. Ένας πύργος έχει ύψος 640 μέτρα. Αν από την κορυφή του ρίξουμε μια πέτρα με αρχική ταχύτητα u_0=14 m/s , πόσο χρόνο θα χρειαστεί να φτάσει στο έδαφος;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η μετατόπιση στην επιταχυνόμενη κίνηση έχει εξίσωση

$$h = u_0 \cdot t\ + \frac{1}{2}\ \alpha \cdot t^2$$

Εδώ θεωρούμε ως επιτάχυνση τη βαρυτική επιτάχυνση $\alpha = g = 10m/s^2$

Επομένως, θα έχουμε:

$$640 = 14t + 5t^2 \Leftrightarrow\ 5t^2 + 14t - 640 = 0$$

$$\Delta = 196 + 1280 = 1476\ ά\rho\alpha\ \ \boldsymbol{t_1 = 10s} \text{ ή } t_2 = -12.8s$$

Δηλαδή, η πέτρα θα χρειαστεί 10 δευτερόλεπτα προκειμένου να φτάσει στο έδαφος.

4. Ο Γιώργος και ο Γιάννης είναι 3 και 7 ετών αντίστοιχα. Σε πόσα χρόνια το γινόμενο των ηλικιών τους θα είναι 96;

Λύση

Έστω ότι θα περάσουν x έτη για να συμβεί το ζητούμενο. Ο Γιώργος θα είναι $x + 3$ ετών και ο Γιάννης $x + 7$ ετών. Επομένως,

$(x + 3)(x + 7) = 96 \Leftrightarrow$

$x^2 + 7x + 3x + 21 = 96 \Leftrightarrow$

$x^2 + 10x - 75 = 0$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 400$ και οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι: $x_1 = 5 \; και \; x_2 = -15$. Προφανώς δεχόμαστε την x_1 καθώς η αρνητική ρίζα θα δώσει όχι μόνο προγενέστερες ηλικίες αλλά και αρνητικές. Δηλαδή, σε 5 χρόνια το γινόμενο των ηλικιών του Γιώργου και του Γιάννη θα ισούται με 96.

5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 10cm, η μια κάθετη είναι κατά 2cm μεγαλύτερη της άλλης. Βρείτε τις πλευρές.

Λύση

Έστω x η μια κάθετη και $x + 2$ η άλλη. Επειδή βρισκόμαστε σε ορθογώνιο τρίγωνο θα ισχύει το **Πυθαγόρειο Θεώρημα**.

Έχουμε,

$$10^2 = x^2 + (x + 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$100 = x^2 + x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 4x - 96 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x^2 + 2x - 48) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\Delta = 196$$

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{196}}{2 \cdot 1}, \qquad x_2 = \frac{-2-\sqrt{196}}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \frac{-2+14}{2}, \qquad x_2 = \frac{-2-14}{2}$$

$$x_1 = \frac{12}{2} = 6, \qquad x_2 = \frac{-16}{2} = -8$$

Και δεχόμαστε τη θετική ρίζα καθώς δεν υπάρχουν αρνητικά μήκη και οι πλευρές θα είναι 6cm και 8cm αντίστοιχα.

Επιπλέον **άλυτες ασκήσεις** που επιλύονται με τη χρήση δευτεροβάθμιων εξισώσεων δίνονται παρακάτω:

1. Η εξίσωση κίνησης ενός ομαλά επιταχυνόμενου σώματος είναι . Αν περάσει από δίπλα μας μια Bugatti Veyron με ταχύτητα και επιταχύνει με , πόση ώρα θα χρειαστεί να φτάσει στα 700m;

2. Ο Γιώργος και ο πατέρας του έχουν 35 χρόνια διαφορά. Πόσο ετών θα είναι ο Γιώργος όταν το γινόμενο των ηλικιών τους θα είναι 564;

3. Από τον Μύτικα, την κορυφή του Ολύμπου, στα 2918m, αφήνουμε να πέσει μια πέτρα. Σε πόση ώρα θα βρίσκεται σε υψόμετρο 2198m;

4. Ο Πλάτωνας γνώριζε ότι οι αριθμοί: $\frac{\mu^2}{4}+1, \frac{\mu^2}{4}-1, \mu$ αποτελούν πυθαγόρειες τριάδες. Όπου μ: άρτιος και η ελάχιστη τιμή που λαμβάνει είναι στην περίπτωση που το τρίγωνο έχει περίμετρο 12. Ποια η ελάχιστη τιμή του μ;

5. Με ένα χαρτόνι που διαθέτουμε θέλουμε να σχηματίσουμε έναν κύβο. Το διαθέσιμο χαρτόνι έχει επιφάνεια 1,014m^2 . Ποιο το μήκος της πλευράς του κύβου;

6. Αν η περίμετρος ενός ορθογωνίου είναι ίση με 20cm και το εμβαδόν του ίσο με 16cm. Βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

3.6 Θέματα Προαγωγικών Εξετάσεων

Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά θέματα εξετάσεων θεωρίας αλλά και ασκήσεων που έχουν τεθεί στις προαγωγικές εξετάσεις.

Θεωρία

Θέμα 1ο

Α. Η εξίσωση $2x^2 + x - 10 = 0$ είναι της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω : $\alpha =\ldots, \beta =\ldots, \gamma =\ldots$

Β. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Θέμα 2ο

Α. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$. Να γράψετε τον τύπο της διακρίνουσας Δ.

Β. Να αντιστοιχήσετε κάθε γράμμα (α-δ) της στήλης Α με έναν μόνο αριθμό (1-5) της στήλης Β, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
α. Αν Δ>0	1. Η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση
β. Αν Δ<0	2. Η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις
γ. Αν Δ>=0	3. Η εξίσωση έχει μια διπλή λύση
δ. Αν Δ<0	4. Η εξίσωση δεν έχει λύσεις
	5. Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις

Θέμα 3ο

Α. Να γράψετε τον γενικό τύπο της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Β. Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β.

ΣΤΗΛΗ Α: Η εξίσωση	**ΣΤΗΛΗ Β: Έχει διακρίνουσα**
α. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$	1. $\Delta=\beta^2$
β. $\alpha x^2+\beta x=0, \alpha\neq 0$	2. $\Delta=-4\alpha\gamma$
γ. $\alpha x^2+\gamma=0, \alpha\neq 0$	3. $\Delta=\beta^2+4\alpha\gamma$
	4. $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι σωστή ή λάθος αντίστοιχα.

α. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$, έχει τουλάχιστον μια λύση αν η διακρίνουσα της είναι θετική ή μηδέν.

β. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

Θέμα 4ο

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ είναι .... βαθμού εξίσωση και λύνεται χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$\Delta=$ ....

$x_1=$................................

$x_2=$................................

Η διακρίνουσα της $-x^2+4x-3=0$είναι:

α. 28 β. 4 γ. 0 δ. -4 ε.20

Ασκήσεις

Θέμα 1ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 7x + 6 - 0$.

Β.Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 7x + 6$

Θέμα 2ο

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 + 7x + 6 = 0$και $x^2 - 7x + 6 = 0$.

Α.Να λυθούν οι παραπάνω εξισώσεις και μετά να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

$x^2 + 7x + 6$ και $x^2 - 7x + 6$

Β. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2-7x+6}{x^2-36} \text{και } B = \frac{x^2+7x+6}{x^2-1}$$

α. Να βρεθούν οι τιμές του xγια τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις A και B και μετά να τις απλοποιήσετε.

β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $(A + B)^2 - (A - B)^2$είναι ανεξάρτητη του x.

Θέμα 3ο

Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει μήκος 15m και πλάτος 10m. Θέλουμε να αυξήσουμε το μήκος του και να μειώσουμε το πλάτος του κατά τον ίδιο αριθμό μέτρων, έτσι ώστε το εμβαδόν του οικοπέδου να γίνει τελικά 100m^2. Να βρείτε κατά πόσα μέτρα θα μεταβληθεί η κάθε διάσταση.

Θέμα 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (3 - 2x)^2 + (3 - x)(3 + x) - 2x(x - 1) + 6$

Α.Κάνοντας όλες τις πράξεις και τις αναγωγές ομοίων όρων να δείξετε ότι:

$$P(x) = x^2 - 10x + 24$$

Β. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 10x + 24 = 0$ και να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 10x + 24$.

Θέμα 5ο

Α.Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ και κατόπιν να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$.

Β.Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{x^2-3x-4}{x^2-1}$

Γ. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$K = \left(\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1} + \frac{2x + 1}{x - 1}\right) + 2011$$

Θέμα 6ο

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\alpha = x + 3 + 3x^2 - 2x - 2x^2 - 2$$

$$\beta = (x - 4)(x + 4) - x(x - 6)$$

$$\gamma = (x - 1)^2 - 1$$

Α.α. Να κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές ομοίων όρων στις παραστάσεις ακαι β.

β. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση γ.

Β. Χρησιμοποιώντας τις τελικές μορφές των παραστάσεων α, β και γ που βρήκατε στο (Α) ερώτημα να λύσετε την εξίσωση:

$$2\alpha + \beta = \gamma - 19$$

Θέμα 7ο

Δύο ακέραιο αριθμοί έχουν γινόμενο 2. Αν στο διπλάσιο του πρώτου προσθέσουμε τον δεύτερο βρίσκουμε 5. Να βρείτε τους αριθμούς.

(Καραγιάννης)

3.7 Ιστορικό σημείωμα

Η Άλγεβρα έχει ιστορία που φτάνει τα 4000 χρόνια, όταν οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι ανακάλυψαν πώς να λύνουν εξισώσεις.

Σε ένα από τα πρώτα ευρήματα, στον πάπυρο του **Rhind**, ο οποίος χρονολογείται γύρω στο 1650 π.Χ, ο Αιγύπτιος **Ah-Mose** πραγματεύεται μεθόδους επίλυσης προβλημάτων. Αντίστοιχα, στη **Βαβυλώνα**, στην ίδια περίοδο, γράφανε επάνω σε πήλινες πλάκες τρόπους επίλυσης προβλημάτων και εξισώσεων.Σε ένα από τα ευρήματα της εποχής εκείνης εντοπίστηκε το παρακάτω πρόβλημα εμβαδού.

Η επιφάνεια ενός ορθογωνίου είναι 3600. Πρόσθεσα μήκος και πλάτος και βρήκα 174. Να υπολογιστούν το μήκος και το πλάτος.

Μολονότι, στο Βαβυλωνιακό κείμενο, δίνεται μόνο η λύση: Μήκος 150 και πλάτος 24 δε χωρά αμφιβολία ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν τη μέθοδο υπολογισμού της.

Από το 2000 π.Χ οι **Βαβυλώνιοι** είχανε αναπτύξει μέθοδο επίλυσης ζευγών εξισώσεων της μορφής οι οποίες ουσιαστικά ισοδυναμούν με τη δευτεροβάθμια εξίσωση . Το ζεύγος αυτό λυνόταν με μια μέθοδο η οποία έδινε τις δύο ρίζες της δευτεροβάθμιας όταν και οι δύο ήταν θετικές, καθώς δεν υπήρχε η γνώση των αρνητικών στου Βαβυλώνιους εκείνη τη εποχή.

Αρκετά χρόνια αργότερα, στην **Ελλάδα** το 460 π.Χ ο **Ιπποκράτης** δημιούργησε μια γεωμετρική κατασκευή ισοδύναμη με την επίλυση της εξίσωσης . Ο **Ευκλείδης** το 300 π.Χ στο έργο του «**τα Στοιχεία**» έλυσε τις εξισώσεις και αγνοώντας τις αρνητικές τους ρίζες. Εδώ, να σημειωθεί ότι οι μέθοδοι των Βαβυλωνίων και Αιγυπτίων μπορεί να δίνουν σωστές λύσεις, όμως οι βάσεις τους δεν είναι ξεκάθαρες.

Μια αυστηρή βάση για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης βρίσκεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη στο βιβλίο VI στην πρόταση 28. Αυτή η πρόταση είναι η εξής:

Πάνω σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να γραφεί παραλληλόγραμμο από το οποίο αν αφαιρέσουμε παραλληλόγραμμο, όμοιο και ομοίως κείμενο με δοσμένο παραλληλόγραμμο Δ, το παραλληλόγραμμο που μένει είναι ισοδύναμο με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα Γ. Το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ δεν μπορεί να έχει εμβαδό μεγαλύτερο από το εμβαδόν του *παραλληλογράμμου που γράφεται με πλευρά ίσο με το μισό του ευθύγραμμου τμήματος και είναι όμοιο με αυτό που αφαιρούμε.*

Η πρόταση αυτή ισοδυναμεί γεωμετρικά με τη συνθήκη για να επιλύεται η εξίσωση . Ωστόσο η αλγεβρική ερμηνεία δεν είναι καθόλου προφανής, όπως προφανής είναι και η άγνοια της Άλγεβρας από τον Ευκλείδη, καθώς αν την γνώριζε θα είχε εκφράσει την παραπάνω πρόταση με πολύ πιο απλό τρόπο.

Ένα κλασικό κινέζικο βιβλίο, το Jiuzhangsuanshu, το οποίο γράφτηκε περίπου το 100 π.Χ αποδεικνύει ότι οι **Κινέζοι** ήξεραν πώς να λύσουν εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

Στη **Ινδία**, ο Aryabhata, στο έργο του Aryabhatiyam (510 μ.Χ)συμπεριέλαβε προβλήματα δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Ο Brahmagupta, στο Brahmasiddhanta (628 μ.Χ) περιέχει έναν ικανοποιητικό κανόνα για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης εκφραζόμενο ως τύπο με λέξεις, σύμφωνα με τον οποίο: *Στον απόλυτο αριθμό πολλαπλασιαζόμενο τέσσερις φορές με το συντελεστή του τετραγώνου, πρόσθεσε το τετράγωνο του συντελεστή του μεσαίου όρου. Η τετραγωνική ρίζα αυτού, ελαττωμένη κατά το συντελεστή του μεσαίου όρου και διαιρούμενη με το διπλάσιο του συντελεστή του τετραγώνου είναι η τιμή.*

Ο Bhaskara στο έργο του Bija Ganita (1150 μ.Χ.) έγραψε εννέα κεφάλαια και επέκτεινε την δουλειά για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Συγκεκριμένα υπολόγισε ως λύσεις της εξίσωσης x 2 − 45x = 250 τους αριθμούς 50 και -5.

Στον **Μεσαίωνα** ο κορυφαίος αλγεβριστής ήταν ο **Jordanus Nemorarius** (1225 μ.Χ.) ο οποίος στο έργο του De Numeris Datis συμπεριέλαβε ένα μεγάλο αριθμό προβλημάτων στις γραμμικές και 35 δευτεροβάθμιες εξισώσεις τύπου παρόμοιου με αυτές που υπάρχουν στα σημερινά βιβλία.

Το 1556 μ.Χ στο **Μεξικό** ο **Juan Diaz** με το έργο του Sumario Compendioso παρουσίασε σχετικά προβλήματα που απαιτούσαν την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Ο **Γάλλος** νομικός, αλλά και κρυπτογράφος και μαθηματικός **Viete** μελέτησε επίσης τη δευτεροβάθμια εξίσωση και κατέληξε σε μια σημαντική σχέση μεταξύ της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και του συστήματος δύο εξισώσεων με δύο άγνωστα. Αυτά τα άγνωστα είναι οι λύσεις στην παρατηρούμενη δευτεροβάθμια εξίσωση.

Στη συνέχεια ο **Euler** το 1755 μ.Χ ασχολήθηκε με την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων και είχε κάνει ιδιαίτερη προσπάθεια εύρεσης προβλημάτων πραγματικής ζωής τα οποία οδηγούν σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

Κεφάλαιο 4^{ο} – Έρευνα

Το ηλεκτρονικό μάθημα στον ιστότοπο http://www.eclass.sch.gr έχει κοινοποιηθεί σε συναδέλφους οι οποίοι εργάζονται σε δημόσια γυμνάσια και διδάσκουν το μάθημα των Μαθηματικών στην Γ Γυμνασίου. Στο παρών κεφάλαιο αποτυπώνονται οι σκέψεις, οι προτάσεις και οι βελτιώσεις που εντόπισαν οι συγκεκριμένοι συνάδελφοι δίνοντας την πλέον βέλτιστη ανατροφοδότηση.

Είναι σημαντικό σε μια μελέτη να προσδιοριστούν αρχικά οι έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν για να μπορέσει αφενός ο μελετητής ο ίδιος να κατανοήσει το αντικείμενο και αφετέρου να δοθεί η δυνατότητα στον αναγνώστη να κατανοήσει αυτό που διαβάζει.

Με βάση τα παραπάνω θα δοθούν κάποιοι ορισμοί για τις έννοιες «δασκαλοκεντρική» και «ανακαλυπτική διδασκαλία».

Η έννοια της **δασκαλοκεντρικής διδασκαλίας** αφορά τη διδασκαλία στην οποία πρωταγωνιστής είναι ο εκπαιδευτικός και κυρίαρχη μορφής της ο μονόλογος. Το κέντρο, όπως φανερώνει και η ίδια η λέξη, είναι ο δάσκαλος ενώ ο μαθητής παρακολουθεί, κρατά σημειώσεις και προσαρμόζεται στο ρυθμό του δάσκαλου. Σε αυτή τη μορφή διδασκαλίας δεν προωθείται η κοινωνική μάθηση και η κριτική σκέψη. Στη μορφή αυτή έχει ασκηθεί έντονη κριτική πάρα ταύτα οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί δέχονται την επιμέρους χρήση της. (Πάτσος, 2011)

Η **ανακαλυπτική διδασκαλία** ή **διερευνητική διδασκαλία,** είναι μια από τις διδακτικές προσεγγίσεις που στηρίζονται περισσότερο στις αναζητήσεις, απορίες και ερωτήσεις των μαθητών παρά στην παρουσίαση της διδακτέας ύλης από τον εκπαιδευτικό. Σε αυτή τη μέθοδο, ο εκπαιδευτικός είναι αυτός που αποφασίζει ποια προβλήματα είναι σχετικά με τις ανάγκες του μαθητή, καθώς και τις στρατηγικές που είναι οι πιο κατάλληλες για τη συλλογή και ανάλυση των σχετικών με την επίλυση του προβλήματος στοιχείων. Αυτό που οι μαθητές έχουν να κάνουν είναι το να ακολουθήσουν πιστά τις οδηγίες του διδάσκοντα, οπότε θα ανακαλύψουν τις σωστές αρχές ή σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές. Η Ανακαλυπτική Μάθηση μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές στο να επικεντρώνουν σε κάτι που είναι σημαντικό στην επίλυση κάποιου προβλήματος, παρά στο να περιπλανώνται γύρω από το πρόβλημα συναντώντας αδιέξοδα. Από την άλλη τα αδιέξοδα βοηθάνε τους μαθητές στο να αντιλαμβάνονται τι δεν προχωράει και έτσι να μαθαίνουν από την εμπειρία. (Μ.Καπετανίδου, 2007)

4.1 Ερωτηματολόγιο

Μέσω του Google Drive και με τις Google Forms δημιουργήθηκε ένα ερωτηματολόγιο, εν είδη συνέντευξης, στο οποίο κλήθηκαν να απαντήσουν οι συνάδελφοι. Οι ερωτήσεις που τέθηκαν ήταν οι παρακάτω:

Στο ηλεκτρονικό μάθημα καλύφθηκε πλήρως η ύλη της ενότητας *

	1	2	3	4	5	
Διαφωνώ απόλυτα	○	○	○	○	○	Συμφωνώ απόλυτα

Το ηλεκτρονικό μάθημα έχει τα χαρακτηριστικά της εξ αποστάσεως διδασκαλίας *

	1	2	3	4	5	
Διαφωνώ απόλυτα	○	○	○	○	○	Συμφωνώ απόλυτα

Το μάθημα ήταν δασκαλοκεντρικό *

	1	2	3	4	5	
Διαφωνών απόλυτα	○	○	○	○	○	Συμφωνώ απόλυτα

Η δομή του μαθήματος επέτρεψε την ανακαλυπτική μέθοδο *

	1	2	3	4	5	
Διαφωνώ απόλυτα	○	○	○	○	○	Συμφωνών απόλυτα

Οι στόχοι του μαθήματος επιτυγχάνονται από τις δραστηριότητες που καλούνται να υλοποιήσουν οι μαθητές *

	1	2	3	4	5	
Διαφωνώ απόλυτα	○	○	○	○	○	Συμφωνώ απόλυτα

Τι θα μπορούσε να βελτιωθεί; *

Κείμενο σύντομης απάντησης

Τι θα μπορούσε να προστεθεί; *

Κείμενο σύντομης απάντησης

Τι έχετε να προτείνετε προκειμένου να βελτιωθεί το μάθημα; *

Κείμενο σύντομης απάντησης

Πόσο ικανοποιημένο σας άφησε το ηλεκτρονικό μάθημα; *

	1	2	3	4	5	
Καθόλου	○	○	○	○	○	Απόλυτα

Διδάσκετε τη φετινή χρονιά σε τμήμα Γ Γυμνασίου; *

○ Ναι

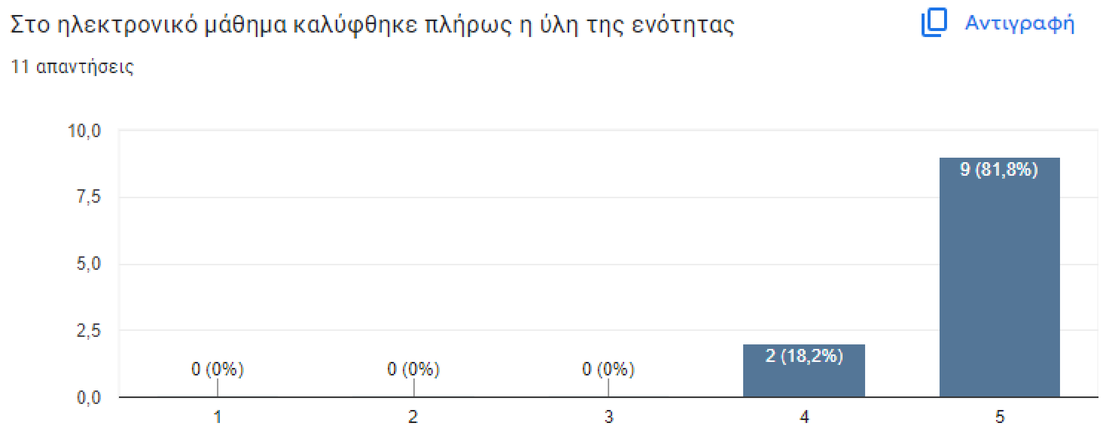
○ Όχι

Σκοπός του ερωτηματολογίου δεν ήταν η στατιστική ανάλυση αλλά η ανταλλαγή απόψεων, ιδεών και προτάσεων επάνω στο ψηφιακό μάθημα έτσι ώστε να διορθωθούν τυχόν παραλείψεις και σφάλματα προκειμένου το συγκεκριμένο ψηφιακό μάθημα να εξελιχθεί σε ένα βέλτιστο για τους μαθητές ψηφιακό εργαλείο.

4.2 Ανατροφοδότηση

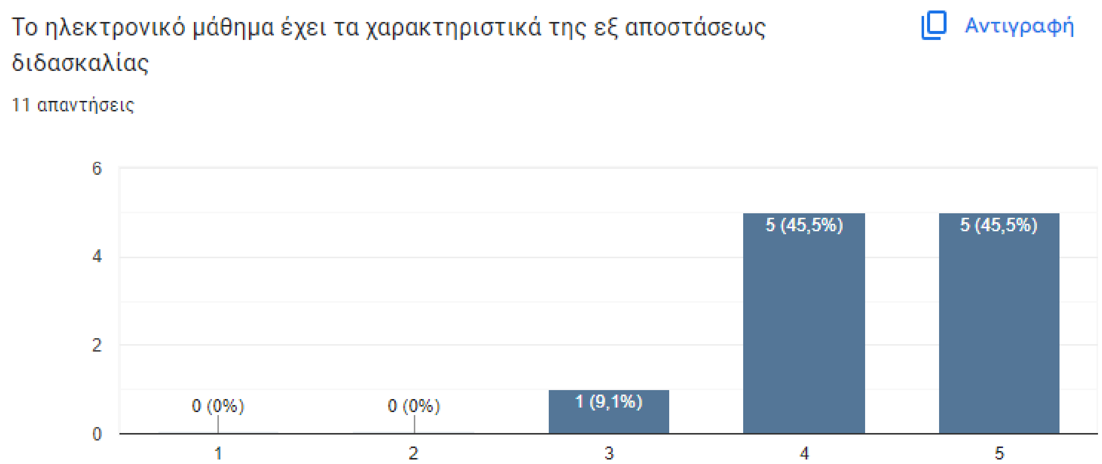
Η συλλογή των απαντήσεων όσων εκ των συναδέλφων ανταποκρίθηκαν στο ερωτηματολόγιο απέδωσε χρήσιμα συμπεράσματα.

Αρχικά, φαίνεται ότι καλύφθηκε πλήρως η ύλη της ενότητας καθώς 9 στους 11 συναδέλφους απάντησαν «Πλήρως».



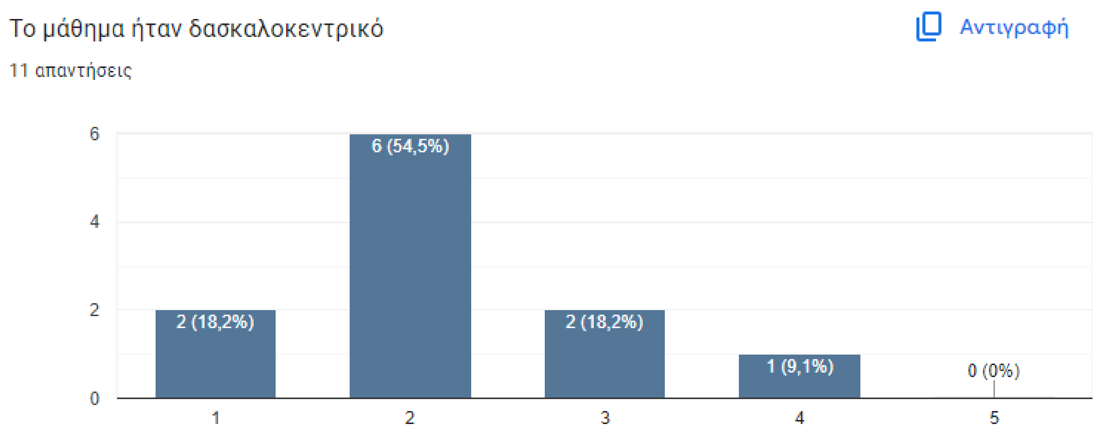
Εικόνα 19: Απαντήσεις στο ερώτημα "Στο ηλεκτρονικό μάθημα καλύφθηκε πλήρως η ύλη της ενότητας"

Σύμφωνα με τις απαντήσεις που έλαβα, το μάθημα ακολούθησε τα χαρακτηριστικά του «εξ αποστάσεως» μαθήματος σε ικανοποιητικά μεγάλο βαθμό.



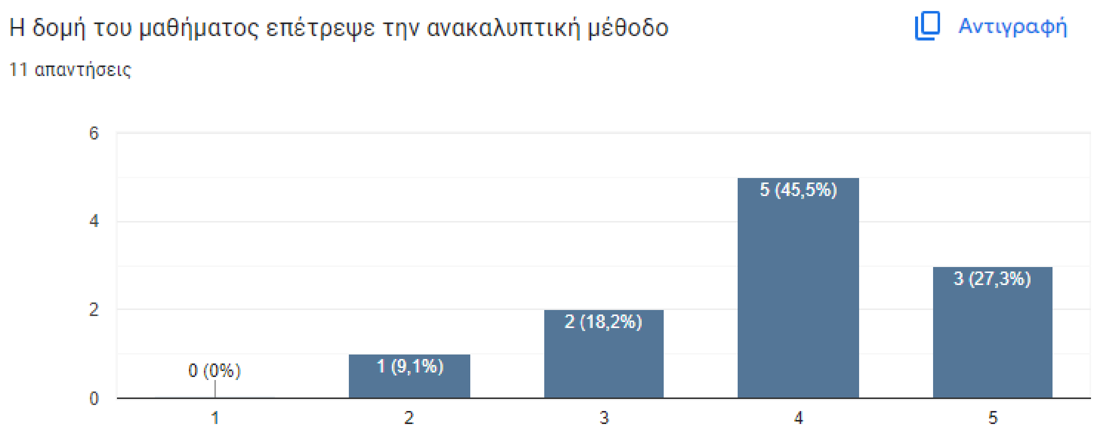
Εικόνα 20: Απαντήσεις στο ερώτημα "Το ηλεκτρονικό μάθημα έχει τα χαρακτηριστικά της εξ αποστάσεως διδασκαλίας"

Στην ερώτηση αν «Το μάθημα ήταν δασκαλοκεντρικό» οι 6 από τους 11 απάντησαν επέλεξαν το 2 στην γραμμική κλίμακα, δηλαδή εκτίμησαν ότι ήταν ελάχιστα δασκαλοκεντρικό το μάθημα, 2 θεώρησαν ότι δεν ήταν καθόλου ενώ 1 απάντησε ότι ήταν αρκετά δασκαλοκεντρική η διδασκαλία του ψηφιακού μαθήματος.



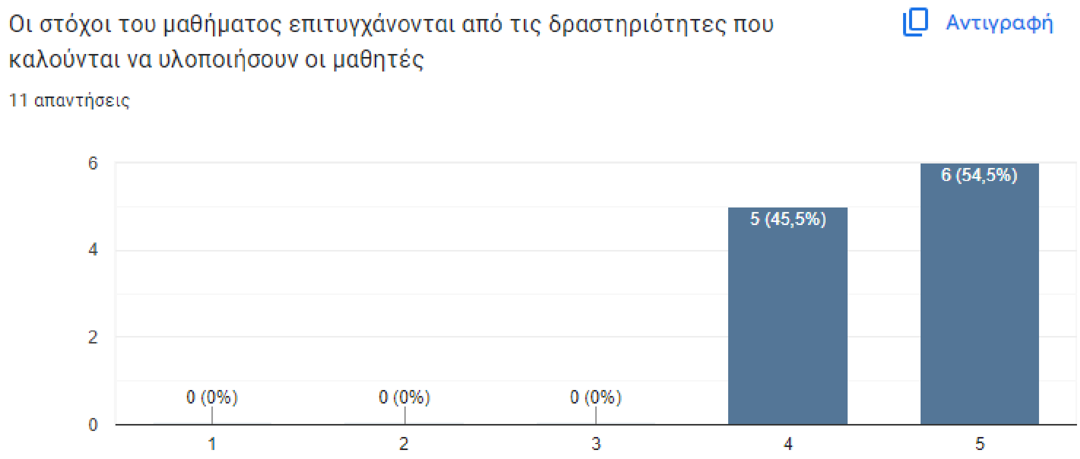
Εικόνα 21: Απαντήσεις στην ερώτηση "Το μάθημα ήταν δασκαλοκεντρικό"

Η δομή του μαθήματος μάλλον ευνόησε και επέτρεψε την ανακαλυπτική μέθοδο μιας και 8 στους 11 μαθηματικούς βαθμολόγησαν με βαθμό από 4 έως 5 στην κλίμακα του Likert.



Εικόνα 22: Απαντήσεις στην ερώτηση "Η δομή του μαθήματος επέτρεψε την ανακαλύπτική μέθοδο"

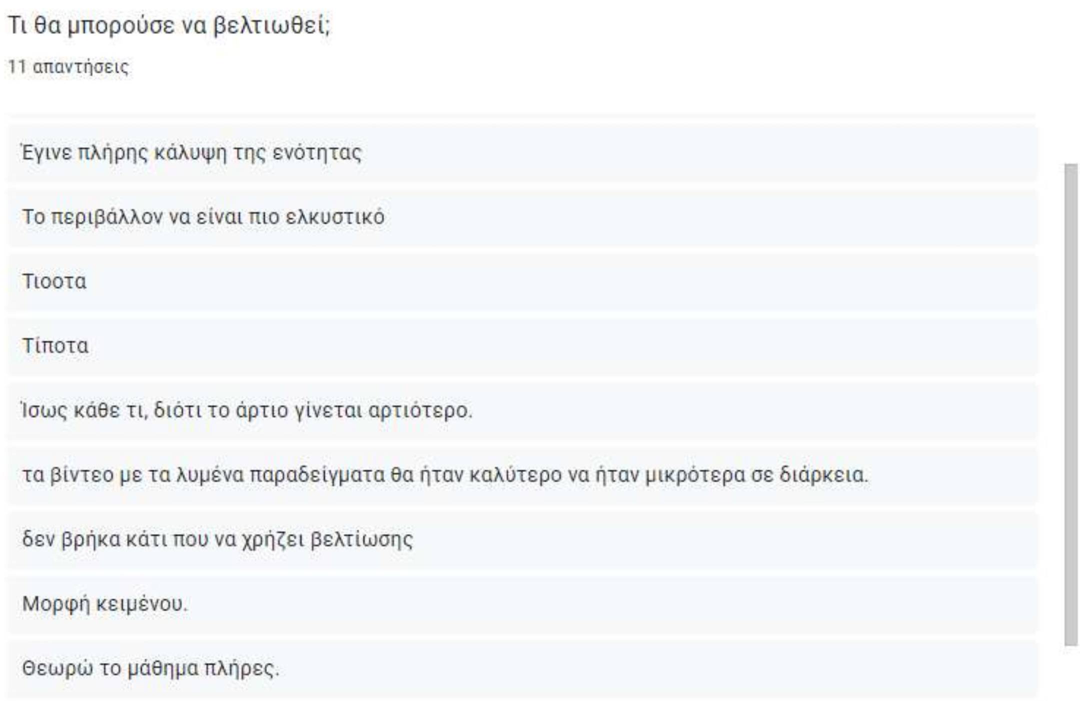
Οι στόχοι του μαθήματος επετεύχθησαν από τις δραστηριότητες στις οποίες κλήθηκαν να υλοποιήσουν οι μαθητές καθώς οι 5 απάντησαν «Αρκετά» και οι υπόλοιποι 6 «Πάρα πολύ».



Εικόνα 23: Απαντήσεις στην ερώτηση "Οι στόχοι του μαθήματος επιτυγχάνονται από τις δραστηριότητες που καλούνται να υλοποιήσουν οι μαθητές"

Στην ελεύθερη ερώτηση «Τί θα μπορούσε να βελτιωθεί» οι απαντήσεις που δόθηκαν ήταν οι εξής:

«Τίποτα, έγινε πλήρης κάλυψη της ενότητας» , «Η επικοινωνία με τους μαθητές», «Να γίνει πιο διαδραστικό για τους μαθητές» και «Τα βίντεο να ήταν πιο σύντομα» , «ίσως το κάθε τι, διότι το άρτιο γίνεται αρτιότερο», «η μορφή του κειμένου», «η επικοινωνία».



Εικόνα 24: Απαντήσεις στην ερώτηση "Τι θα μπορούσε να βελτιωθεί"

Στην επίσης ελεύθερη ερώτηση «Τι θα μπορούσε να προστεθεί» οι συνάδελφοι απάντησαν τα εξής:

«Να γίνει υπενθύμιση προηγούμενης ύλης (ταυτότητες, δυνάμεις κτλ)», «Η περίπτωση της ελλιπούς δευτεροβάθμιας $x^2 = \theta$ με την επίλυση της με χρήση τετραγωνικής ρίζας», «Οπτικοακουστικό υλικό», «Διαδραστικές δραστηριότητες», «Στην παραγοντοποίση του τριωνύμου θα μπορούσε να παρουσιαστεί η πλήρης απόδειξη. Στην περίπτωση που είναι Δ < 0 μπορεί να εξηγηθεί γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη και το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται», «Να υπάρχουν ενθαρρυντικά και υποστηρικτικά σχόλια προς τις προσπάθειες των μαθητών», «ενδεχομένως να προσέθετα και ορισμένες εξισώσεις όπου οι συντελεστές α,β,γ να είναι δεκαδικοί, κλάσματα ή άρρητοι», «τίποτα», «projects κατασκευή προβλημάτων με λύση τριώνυμο», .

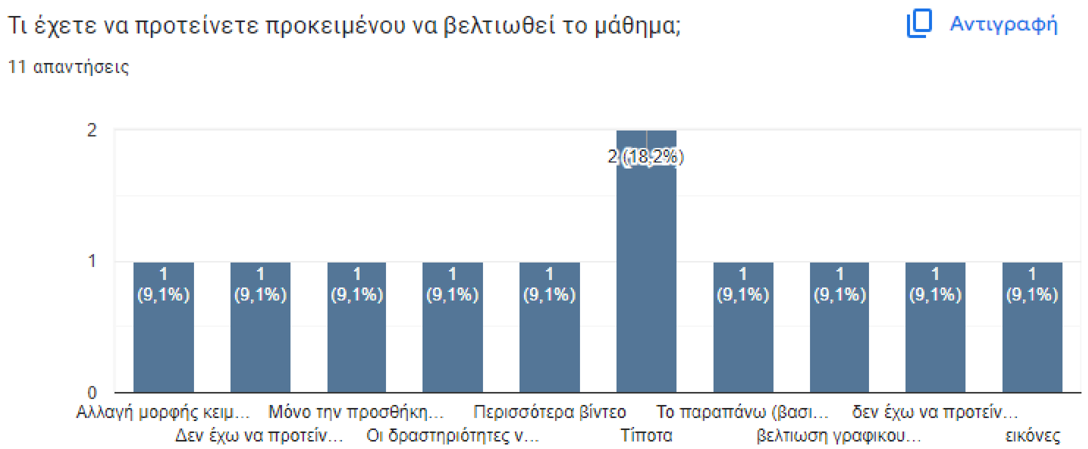
Τι θα μπορούσε να προστεθεί;

11 απαντήσεις

- διαδραστικές δραστηριότητες
- Ίσως, υπενθύμιση βασικής προαπαιτούμενης ύλης(δυνάμεις, ταυτότητες, επιμεριστική ιδιότητα, ΕΚΠ)
- Περισσότερα βίντεο
- Τιποτα
- Τίποτα
- Στην παραγοντοποίηση του τριωνύμου θα μπορούσε να παρουσιαστεί η πλήρης απόδειξη. Στην περίπτωση που είναι Δ < 0 μπορεί να εξηγηθεί γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη και το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.
- θα μπορούσε να υπάρχουν σχόλια ενθαρρυντικά και υποστηρικτικά προς τις προσπάθειες των μαθητών.
- ενδεχομένως να προσέθετα και ορισμένες εξισώσεις όπου οι συντελεστές α,β,γ να είναι δεκαδικοί, κλάσματα ή άρρητοι.

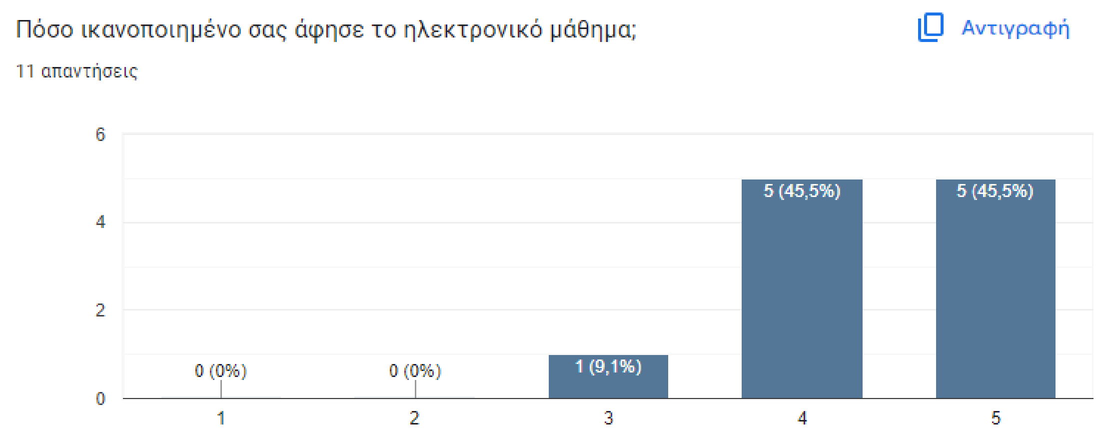
Εικόνα 25: Απαντήσεις στην ερώτηση "Τι θα μπορούσε να προστεθεί"

Στην ερώτηση «Τι έχετε να προτείνετε προκειμένου να βελτιωθεί το μάθημα», οι περισσότεροι είχαν καλυφθεί με την απάντησή τους στο προηγούμενο ερώτημα ενώ κάποιοι απάντησαν «Εικόνες», «Βελτίωση γραφικού περιβάλλοντος» και « Οι δραστηριότητες να είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας».



Εικόνα 26: Απαντήσεις στην ερώτηση "Τι θα προτείνατε προκειμένου να βελτιωθεί το μάθημα

Συνολικά, το μάθημα άφησε ικανοποιημένους τους συνάδελφους που το αξιολόγησαν όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



Εικόνα 27: Απαντήσεις στην ερώτηση "Πόσο ικανοποιημένο σας άφησε το ηλεκτρονικό μάθημα"

Τέλος, αν και όλοι έχουν διδάξει το αντικείμενο στο παρελθόν, τη φετινή χρονιά οι 7 από τους 11 εξ αυτών μπαίνουν σε τάξεις της Γ Γυμνασίου.

Κεφάλαιο 5ο – Συμπεράσματα και Προτάσεις

5.1 Εξ αποστάσεως εκπαίδευση

Η εξ αποστάσεως εκπαίδευση δεν είναι μια νέα έννοια. Οι ρίζες της φτάνουν στις αρχές του 19ου αιώνα όταν το Πανεπιστήμιο του Ουισκόνσιν ηχογραφούσε φωνογράφους και τους έστελνε ταχυδρομικώς στους ενδιαφερόμενους φοιτητές. Σε αυτή την περίπτωση η επικοινωνία εκτός από τη μεγάλη καθυστέρηση χαρακτηριζόταν και από την παντελή έλλειψη επικοινωνίας μεταξύ των εκπαιδευομένων. Λίγο αργότερα, με την αρωγή του Τόμας Έντισον, οι τηλεφωνικές γραμμές γίνεται το όχημα για την εξέλιξη της εκπαίδευσης και δόθηκε η δυνατότητα σε πανεπιστήμια να παραδίδουν μαθήματα ιατρικής τηλεφωνικά.

Η τεχνολογική εξέλιξη, με την είσοδο των πολυμέσων, τους ισχυρούς επεξεργαστές αλλά και την αναβάθμιση των επικοινωνιών έκανε δυνατή και εύκολα πραγματοποιήσιμη την ηλεκτρονική πια μάθηση, δίνοντας την ευκαιρία της εύκολης, ευέλικτης και προσιτής μετάδοσης της γνώσης σε κάθε βαθμίδα της εκπαίδευσης (πρωτοβάθμια έως τριτοβάθμια αλλά και σε επίπεδο επιμόρφωσης εργαζομένων).

Η τηλεκπαίδευση βρήκε την ευκαιρία να παγιωθεί ως θεσμός με την εμφάνιση της πανδημίας του κορονοϊού η οποία οδήγησε στο κλείσιμο όλων των σχολείων και των δομών εκπαίδευσης. Άμεση συνέπεια του κλεισίματος ήταν η έναρξη μαθημάτων διαδικτυακά οδηγώντας την μάθηση σε μια νέα εποχή.

Με την ποικιλία των υπηρεσιών επικοινωνίας του, το Διαδίκτυο έχει αναδειχθεί λόγω της πρόσβασης, της κοινής χρήσης, της αποθήκευσης και της χρήσης των ενεργειών παραγωγής πληροφοριών στη σύγχρονη περίοδο και έχει γίνει μια ολοένα και πιο σημαντική δομή για την εκπαίδευση και την κατάρτιση.

Το μέλλον της εξ αποστάσεως εκπαίδευσης αφορά αποκλειστικά το διαδίκτυο. Οι χρήστες έχουν πλέον εξοικειωθεί σε μεγάλο βαθμό, τόσο ώστε ξεκινούν να το διαμορφώνουν μάλιστα. Στη διαδικασία της εκπαίδευσης έχουν ήδη ενσωματωθεί λειτουργίες του Web 2.0 σε βαθμό που κάποιοι εμπνεύστηκαν τον όρο E-Learning 2.0. Η χρήση των wiki, των διαδικτυακών ημερολογίων, του RSS κ.α εργαλείων έχει γίνει ευρέως αποδεκτή από πολλές εκπαιδευτικές κοινότητες.

Το διακύβευμα της εκπαιδευτικής κοινότητας, κατά την τηλεκπαίδευση, είναι η διατήρηση της παιδαγωγικής διάστασης και των καλών πρακτικών καθώς γίνεται εύκολα αντιληπτό στο δίπολο παιδαγωγικός ρόλος και διδακτέα ύλη – διδακτικοί στόχοι η ζυγαριά γέρνει προς το δεύτερο.

Η εξ αποστάσεως εκπαίδευσης ξεκινώντας από την ιδέα τους «μαθαίνουμε πώς να μαθαίνουν» αποτελεί μια μέθοδο εκπαίδευσης που απευθύνεται σε όλους τους τομείς της εκπαίδευσης. Η αποτελεσματικότητά της προϋποθέτει τον πλήρη και λεπτομερειακό σχεδιασμό της, τόσο στο μαθησιακό όσο και στο διοικητικό τομέα, παρέχοντας υποστήριξη και καλή επικοινωνία τόσο ανάμεσα στους εκπαιδευόμενους και τους εκπαιδευτικούς, όσο και ανάμεσα στους εκπαιδευόμενους, χρησιμοποιώντας κατάλληλο εκπαιδευτικό υλικό και αναβαθμίζοντας συνεχώς τα τεχνολογικά εργαλεία που χρησιμοποιεί τόσο στην ασύγχρονη όσο στην σύγχρονη εξ αποστάσεως εκπαίδευση. (Λιοναράκης)

5.2 Τα μαθηματικά στην εξ αποστάσεως εκπαίδευση

Η εφαρμογή και μετάδοση της γνώσης των μαθηματικών μέσω της τηλεκπαίδευσης απασχολεί τους μαθηματικούς καθώς εφαρμοσμένα μαθήματα των θετικών επιστημών όπως τα μαθηματικά και η φυσική σε αντίθεση με τα θεωρητικά μαθήματα έχουν πιο απαιτητικό τρόπο διδασκαλίας. Επιπροσθέτως, στην διδασκαλία τους σημαντικό ρόλο παίζει η διάδραση μεταξύ εκπαιδευτικού – μαθητή, οι δοκιμές, τα λάθη και η αποσφαλμάτωσή τους. Μια τυπική τάξη είναι ένα περιβάλλον μάθησης όπου οι μαθηματικοί εμπλέκουν τους μαθητές μέσω μιας σειράς μεθόδων, όπως οι διαλέξεις, ομαδικές εργασίες και παρουσιάσεις. Όλα αυτά απουσιάζουν ή είναι δύσκολο να επιτευχθούν μέσω της εξ αποστάσεως εκπαίδευσης.

Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στην αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων και η αρτιότερη προετοιμασία με τα κατάλληλα λογισμικά θα βελτιώσει την εκπαιδευτική διαδικασία και θα αυξήσει την επίδραση της διαδικτυακής μάθησης. Τα παραπάνω σε συνδυασμό με την ανάπτυξη ποιοτικού ψηφιακού περιεχομένου και μαθησιακών εμπειριών από το Υπουργείο Παιδείας θα καταστήσουν την εξ αποστάσεως εκπαίδευση ένα ισχυρό εργαλείο για την αποτελεσματική διδασκαλία των μαθηματικών προσφέροντας εξατομίκευση και δυνατότητες συνεργασίας σε ποιοτικό περιεχόμενο.

5.3 Μελέτη περίπτωσης

Στην περίπτωση της ύλης που αφορά την Δευτεροβάθμια Εξίσωση και την Παραγοντοποίηση του Τριωνύμου, έγινε αντιληπτό ότι η εξ αποστάσεως εκπαίδευση με αρωγό το OpenEclass(η-τάξη)δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές μέσω των δραστηριοτήτων και των ψηφιακών εργαλείων να λάβουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας μιας τυπικής τάξης. Τα διαδικτυακά φόρουμ και τα ψηφιακά εργαλεία ενθαρρύνουν και επιτρέπουν στους μαθητές να συνεργάζονται σε ασκήσεις και projects. Οι στόχοι του μαθήματος επιτυγχάνονται και ένα μεγάλο όφελος αυτής της διαδικασίας είναι η επανάληψη και μελέτη του υλικού που παράχθηκε σε χρόνο που επιτρέπει τον κάθε μαθητή ξεχωριστά.

Βιβλιογραφία

2ο ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ, Π. (2011). *ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΕΡΟΣ Α.*

Hojgaard, N. &. (2019). Mathematical competencies revisited. *EduStuMath* , σσ. 9-28.

Jesper Boesen, J. L. (2018). Αξιολόγηση μαθηματικών ικανοτήτων: Ανάλυση των εθνικών μαθηματικών τεστ της Σουηδίας. *Scandinavian Journal of Educational Research* , σσ. 109-124.

OpenEclass.org. (n.d.). *Open eClass Documentation*. Ανάκτηση από https://docs.openeclass.org/el/3.5/detail_descr

Αργυράκης, Δ. Β. (n.d.). *Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία.* Ανάκτηση 03 15, 2024, από Βιβλίο Μαθηματικών Γ Γυμνασίου: http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2212/Mathimatika_G-Gymnasiou_html-empl/indexB2_3.html

Ε.Πιλάβη, Μ. (2011). *Ένα Moodle για το Moodle.* Πάτρα: Τμήμα Ηλεκτρονικών Υπολογιστικών Συστημάτων Α.Τ.Ε.Ι Πειραιά.

Καραγιάννης, Ι. (n.d.). *Μαθηματικός Περιηγητής.* Ανάκτηση 02 22, 2024, από https://blogs.sch.gr/iokaragi/files/2015/04/%CE%98%CE%95%CE%9C%CE%91%CE%A4%CE%91-%CE%A0%CE%A1%CE%9F%CE%91%CE%93%CE%A9%CE%93%CE%99%CE%9A%CE%A9%CE%9D-%CE%9A%CE%91%CE%99-%CE%91%CE%A0%CE%9F%CE%9B%CE%A5%CE%A4%CE%97%CE%A1%CE%99%CE%A9%CE%9D-%CE%95%CE%9E%CE%95%CE

Λιοναράκης, Α. ,. (n.d.). *The Journal for Open and Distance Education and Educational Technology.* Ανάκτηση από Διακήρυξη για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση.: ejournals.epublishing.ekt.gr/index.php/openjournal/article/viewFile/23741/19868

Μ.Καπετανίδου, Δ. &. (2007). *Θεωρίες μάθησης και εκπαιδευτική πράξη.* Αθήνα: Αυτοέκδοση.

Πάτσος, Χ. (2011, 11 25). *Θεωρίες - Μέθοδοι και Μορφές Διδασκαλίας*. Ανάκτηση 03 25, 2024, από https://christospatsos.wordpress.com/2011/11/25/