



ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΣΤΗΝ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ: Αναλυτικός Υπολογισμός του Medial Axis
Transform (MAT) για συνεκτικά χωρία δυαδικών εικόνων

Στέργιος Πάτηνιος

ΑΕΜ: 205

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Χ.Στρουθόπουλος

Καθηγητής

ΣΕΡΡΕΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2023

Πρόλογος

Η διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο της φοίτησης μου για την απόκτηση μεταπτυχιακού διπλώματος στην *Εφαρμοσμένη Πληροφορική*. Ο τίτλος της εργασίας είναι «Αναλυτικός Υπολογισμός του Medial Axis Transform (MAT) για συνεκτικά χωρία δυαδικών εικόνων». Ο MedialAxisTransform (MAT) είναι το σύνολο όλων των σημείων που έχουν περισσότερα από ένα πλησιέστερα από την οριακή γραμμή (περίγραμμα) ενός αντικειμένου. Αρχικά αναφέρεται ως τοπολογικός σκελετός και προτάθηκε το 1967 από τον HarryBlum(Habl). Η αναλυτική περιγραφή για σχήματα με αλγεβρική περιγραφή συντελεί στην θεμελιωμένη εξαγωγή χρήσιμων χαρακτηριστικών για την αναγνώριση των σχημάτων.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, αρχικά, τους καθηγητές μου που με ενέπνευσαν να ασχοληθώ με τον τομέα της Πληροφορικής και στάθηκαν δίπλα μου στο ταξίδι αυτό από την αρχή μέχρι το τέλος του. Τους συμφοιτητές μου που εμπλούτισαν την ακαδημαϊκή μου εμπειρία με τις ιδέες και τις προοπτικές τους καθώς και την οικογένειά μου και τους φίλους μου που με ενθάρρυναν και πίστεψαν σε μένα, ακόμη κι όταν ο δρόμος μπροστά μου φαινόταν αβέβαιος και δύσβατος. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στον επιβλέπων καθηγητή μου κ. Στρουθόπουλο του οποίου η συνεισφορά ήταν μεγάλη και με βοήθησε να φέρω εις πέρας την διπλωματική μου εργασία.

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο της φοίτησης μου για την απόκτηση μεταπτυχιακού διπλώματος στην *Εφαρμοσμένη Πληροφορική*. Ο τίτλος της εργασίας είναι «Αναλυτικός Υπολογισμός του Medial Axis Transform (MAT) για συνεκτικά χωρία δυαδικών εικόνων». Ο MedialAxisTransform (MAT) είναι το σύνολο όλων των σημείων που έχουν περισσότερα από ένα πλησιέστερα από την οριακή γραμμή (περίγραμμα) ενός αντικειμένου. Αρχικά αναφέρεται ως τοπολογικός σκελετός και προτάθηκε το 1967 από τον HarryBlum(Habl). Η αναλυτική περιγραφή για σχήματα με αλγεβρική περιγραφή συντελεί στην θεμελιωμένη εξαγωγή χρήσιμων χαρακτηριστικών για την αναγνώριση των σχημάτων.Ειδική περίπτωση τέτοιας εφαρμογής είναι τα γράμματα ενός κειμένου στα οποία το πάχος του μολυβιού (strokewidth) παραμένει πρακτικά σταθερό. Η ύπαρξη αυτή της ιδιότητας αυξάνει την πιθανότητα το σχήμα να ανήκει σε γράμμα και αποτελεί ένα καλό χαρακτηριστικό για τον εντοπισμό των περιοχών ενός ψηφιοποιημένου εγγράφου μικτού τύπου (το μικτό έγγραφο περιέχει κείμενο και εικόνες).

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες και οι ορισμοί που εμπλέκονται στο θέμα. Ακολουθεί μια αναφορά σε σημαντικές εργασίες που προήγαγαν το αναλυτικό και υπολογιστικό προσδιορισμό του MAT σε τυχαία σχήματα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο αναλυτικός προσδιορισμός του MATσε βασικά σχήματα που μπορούν να αποτελέσουν δομικά στοιχεία της μορφής ενός γράμματος, π.χ. ράβδοι, δακτύλιοι, κ.λπ.

Summary

The thesis was prepared as part of my studies to obtain a master's degree in Applied Informatics. The title of thesis is the "Analytical Calculation of the Medial Axis Transform (MAT) for connected components in binary images". The Medial Axis Transform (MAT) is the set of all points that are more than one closest to the boundary line (contour) of an object. Originally was referred as topological skeleton and it was proposed in 1967 by Harry Blum (Habl). The analytical description for shapes with an algebraic description contributes to the well-founded extraction of useful features for the recognition of the shapes. A special case of such an application is in the characters of a text in which the thickness of the pencil (stroke width) remains practically constant. This property increases the probability that the shape belongs to a character and is a good feature for the identification of pure text regions in a mixed type digital document (mixed document contains text and images).

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1	1
1.1 Βασικές έννοιες, ιστορική επισκόπηση.....	1
Κεφάλαιο 2	12
2.1 Χρήσεις του MAT σε διάφορους τομείς.....	13
2.2 Χρήσεις του MAT στην Ιατρική	14
2.3 Συμπεράσματα	15
Κεφάλαιο 3	17
3.1. Ράβδος.....	17
3.2. Δακτύλιος.....	20
3.3. Ισαπέχουσες καμπύλες.....	21
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	24

Εισαγωγή

Ο MedialAxisTransform (MAT) είναι το σύνολο όλων των σημείων που έχουν περισσότερα από ένα πλησιέστερα από την οριακή γραμμή (περίγραμμα) ενός αντικειμένου. Αρχικά αναφέρεται ως τοπολογικός σκελετός και προτάθηκε το 1967 από τον Harry Blum (Habl) ως εργαλείο αναγνώρισης βιολογικών σχημάτων. Στις δύο διαστάσεις ο MAT ενός υποσυνόλου S που οριοθετείται από την επίπεδη καμπύλη C είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που είναι εφαπτόμενοι στην καμπύλη C σε δύο ή περισσότερα σημεία. Όλοι αυτοί οι κύκλοι περιέχονται στο S και ίδιος ο MAT περιέχεται στο S . Ο MAT οδηγεί στην δημιουργία του σκελετού της μορφής που περιγράφεται από το S και ως εκ τούτου αποτελεί ισχυρό εργαλείο στην ταξινόμηση αντικειμένων που περιέχονται σε ψηφιακές εικόνες. Ο MAT παίζει σημαντικό ρόλο στην αναγνώριση προτύπων, στην μηχανική και ρομποτική όραση και στην πλοήγηση οχημάτων.

Σκοπός της εργασίας είναι ο θεωρητικός υπολογισμός του MAT σε βασικά σχήματα που υπάρχουν συχνά σε εικόνες όπως ράβδοι, τόξα, κύκλοι, μηνίσκοι. Τα σχήματα αυτά είναι πολύ συχνά τμήματα γραμμμάτων και επιδιώκεται να υπολογισθεί αναλυτικά το πηλίκο του μήκους του περιγράμματος του σχήματος προς το μήκος του MAT.

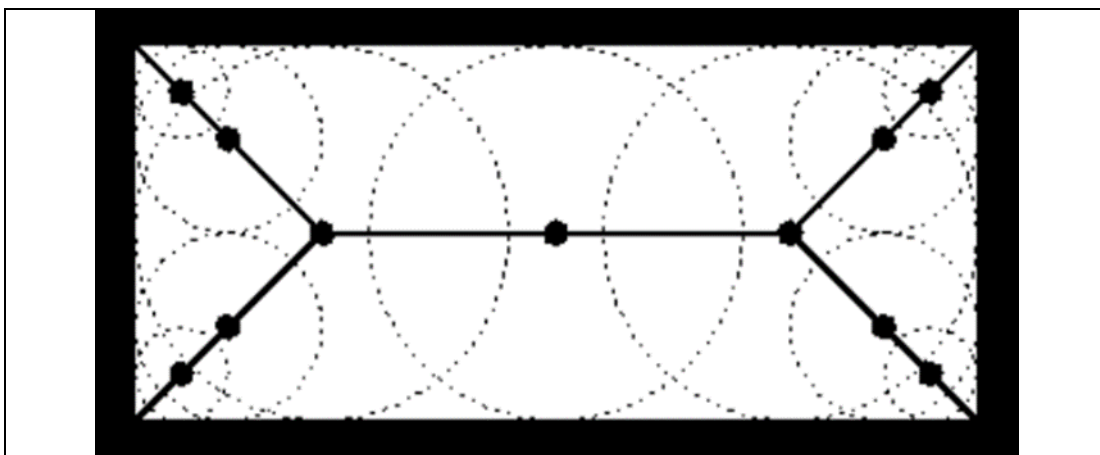
Κεφάλαιο 1

1.1 Βασικές έννοιες, ιστορική επισκόπηση

Ο medialaxisενός αντικειμένου είναι το σύνολο όλων των σημείων που έχουν περισσότερα από ένα κοντινότερα σημεία στα όρια του αντικειμένου. Αρχικά, ο όρος αναφέρεται ως τοπολογικός σκελετός (topologicalskeleton) και εισήχθη το 1967 από τον HarryBlumως εργαλείο για την αναγνώριση σχημάτων.Στα μαθηματικά η έννοια του medialaxisείναι γνωστή και ως cutlocus. Ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα στην παγκόσμια διαφορική γεωμετρία είναι η ακριβής περιγραφή και προσδιορισμός του cutlocuseνός συνόλου.

Στο χώρο των δύο διαστάσεων (2D), ο medialaxisενός υποσυνόλου S που οριοθετείται από την επίπεδη καμπύλη C είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στην καμπύλη C σε δύο ή περισσότερα σημεία, με όλους αυτούς τους κύκλους να περιέχονται στο S . Συνεπάγεται ότι και ο ίδιος ο medialaxisπεριέχεται στο S . Για παράδειγμα, ο medialaxisενός απλού πολυγώνου

μοιάζει με ένα δέντρο του οποίου τα φύλλα είναι οι κορυφές του πολυγώνου και οι ακμές του είναι είτε ευθύγραμμα τμήματα είτε τόξα παραβολών.



Σχήμα 1.1.1. Ο MAT ορθογωνίου παραλληλογράμμου

Ο medialaxis μαζί με την σχετική συνάρτηση ακτίνας των εγγεγραμμένων δίσκων ονομάζεται medialaxistransform (MAT). Ο medialaxistransform αποτελεί μια πλήρης περιγραφή ενός σχήματος, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανακατασκευή του σχήματος αυτού και υπάρχει ένας μοναδικός MAT για κάθε αντικείμενο.

Ο MAT χαρακτηρίζεται από τις παρακάτω ιδιότητες:

- *Μοναδικότητα.* Υπάρχει ένας μοναδικός MAT για κάθε αντικείμενο
- *Αντιστρεψιμότητα.* Με δεδομένο τον άξονα και την σχετική συνάρτηση ακτίνας μπορεί κανείς να ανακατασκευάσει το αντικείμενο.
- *Μείωση διαστάσεων.* Η διάσταση του MAT είναι μικρότερη από εκείνη του αντικειμένου του.
- *Τοπολογική ισοδυναμία.* Ο MAT είναι τοπολογικά ισοδύναμος με το αντικείμενό του.

Ο medialaxis γενικεύεται σε υπερεπιφάνειες διαστάσεων k αντικαθιστώντας τους 2D κύκλους με υπερσφαίρες διαστάσεων k . Ο 2D medialaxis είναι πολύ χρήσιμος για την αναγνώριση χαρακτήρων και αντικειμένων, ενώ ο 3D medialaxis βρίσκει εφαρμογές στην ανακατασκευή επιφανειών για φυσικά μοντέλα και για την μείωση διαστάσεων σε σύνθετα μοντέλα. Αξίζει να σημειωθεί πως σε οποιαδήποτε

διάσταση, ο medialaxis ενός οριοθετημένου συνόλου είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με το αρχικό σύνολο.

Ο medialaxis αποτελεί επέκταση της θεωρίας των διαγραμμάτων Voronoi που εισήχθη από τον Voronoi. Το διάγραμμα Voronoi ορίστηκε αρχικά για ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων στον χώρο R^2 και στην πραγματικότητα αυτό και όλες οι σχετικές έννοιες εντοπίζονται ήδη από τον Dirichlet.

Ο MAT εισήχθη και εξερευνήθηκε αρχικά από τον Blum (Blu67, Blu73, BN78) με σκοπό να περιγράψει διάφορα σχήματα. Αμέσως μετά την εισαγωγή του αναπτύχθηκαν αρκετοί αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του MAT για συγκεκριμένες επίπεδες επιφάνειες. Ο Montanari (Mon69) ανέπτυξε έναν αλγόριθμο για να υπολογίσει τον MAT ενός πολύπλοκου πολυγωνικού σχήματος. Ο αλγόριθμός του προχωρά εντοπίζοντας τα σημεία διακλάδωσης και διαδίδοντας το οριακό περίγραμμα προς τα μέσα καθώς συνδέει τα σημεία διακλάδωσης με κατάλληλα γραμμικά ή παραβολικά τμήματα. Ένας πιο αποτελεσματικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του MAT ενός κυρτού πολυγωνικού σχήματος στον $O(n \log n)$ παρουσιάστηκε από τον Preparata (Pre77) μαζί με έναν αλγόριθμο στον $O(n^2)$ για μη κυρτά πολύγωνα. Ο Lee (Lee82) ανέπτυξε έναν αλγόριθμο στον $O(n \log n)$ για πολύγωνα με μη κυρτές γωνίες. Οι Srinivasan και Nackman (SN87) παρουσίασαν έναν αλγόριθμο στον $O(nh + n \log n)$ για πολύπλοκα πολύγωνα με τρύπες h . Πιο πρόσφατα οι Gurosoy (Gur89) και Gurosoy και Patrikalakis (PG90) ανέπτυξαν έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του MAT ενός πολυγωνικού επίπεδου σχήματος που οριοθετείται από ευθύγραμμα τμήματα και κυκλικά τόξα και χρησιμοποίησαν αυτόν τον αλγόριθμο για να δημιουργήσουν πλέγματα πεπερασμένων στοιχείων αυτόματα και να καθορίσουν τα γενικά χαρακτηριστικά ενός σχήματος (GP91, GP92a, GP92b). Οι Guibas και Stolfi (GS85) διερεύνησαν την σχέση μεταξύ του διαγράμματος Voronoi και του τριγωνισμού Delaunay και ανέπτυξαν μια δομή δεδομένων τετραπλής ακμής για να τα αναπαραστήσουν. Ο Sugihara (Sug93) μελέτησε την χρήση των διαγραμμάτων Voronoi στην εύρεση του MAT ενώ το βιβλίο του Held περιέχει μια περιεκτική ανασκόπηση των αλγορίθμων Voronoi τους οποίους χρησιμοποίησε. Άλλες αναθεωρήσεις των αλγορίθμων Voronoi έχουν γίνει από τους Aurenhammer (Aur91) και Fortune (For92).

Άλλες εργασίες επικεντρώθηκαν σε διακριτές και κατά προσέγγιση προσεγγίσεις για τον προσδιορισμό του MAT. Ο Nackman (Nac82) πρότεινε έναν

τριδιάστατο (3D) αλγόριθμο όπου χρησιμοποιεί μια πολυεδρική προσέγγιση ενός ομαλού ορίου προκειμένου να προκύψει μια πολυεδρική προσέγγιση του σκελετού του (και κατ' επέκταση του MAT). Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος είναι μια επέκταση της γραμμικής «σκελετικής» προσέγγισης του Bookstein(Boo79) σε 3D. Λαμβάνει ως είσοδο μια πολυεδρική επιφάνεια που αποτελείται από κυρτά πολύγωνα και δημιουργεί ένα γράφημα κυρτών πολυγώνων που προσεγγίζουν το MAT του αρχικού αντικειμένου. Εφόσον το πολύεδρο εισόδου υποτίθεται ότι είναι μια προσέγγιση ενός λείου καμπύλου αντικειμένου, έτσι και η έξοδος δεν είναι ο σκελετός του ίδιου του πολυέδρου αλλά μια συλλογή πολυγώνων σχεδόν εφαπτομένων στον σκελετό του αληθινού αντικειμένου. Ο Lavender (LBD+92) χρησιμοποίησε μια προσέγγιση βασισμένη σε οκτάδες για τον προσδιορισμό του διαγράμματος Voronoi. Ο αλγόριθμός του λειτουργεί σε στερεά μοντέλα θεωρητικών συνόλων, που αποτελούνται από συνενώσεις, διασταυρώσεις και διαφορικά πρωτόγονων περιοχών που αντιπροσωπεύονται από μια συλλογή πολυωνυμικών ανισοτήτων και παράγει ένα octree (ή quadtrees σε 2-διαστάσεις) που χωρίζει το χώρο σε περιοχές Voronoi. O Scott αναφέρει μια μέθοδο για τον προσδιορισμό του Άξονα Συμμετρίας (ένα υπερσύνολο του MAT) η οποία βασίζεται σε μια συνδυασμένη διαδικασία διάχυσης κύματος στο επίπεδο. Ο αλγόριθμός του προχωρά εκχωρώντας σε κάτι οριακό εικονοστοιχείο (pixel) μια μοναδιαία μετατόπιση πάνω στο επίπεδο και σε κάθε άλλο εικονοστοιχείο μια μηδενική μετατόπιση κι έπειτα διαδίδει ένα κύμα από το όριο. Το κύμα αυτό εξασθενεί από μια διαδικασία διάχυσης προκειμένου να μειωθεί το αριθμητικό σφάλμα και τα τοπικά μέγιστα του κύματος θεωρείται ότι βρίσκονται πάνω στον Άξονα Συμμετρίας. Ωστόσο, παρά την χρησιμότητα του αλγορίθμου σε δυαδικές εικόνες χαμηλής ανάλυσης, το σφάλμα μπορεί να είναι μεγάλο για υψηλότερες αναλύσεις καθώς κι οι απαιτήσεις μνήμης και επεξεργασίες τείνουν να γίνουν κι αυτές αρκετά υψηλές.

Ο Brandt (Bra91, Bra92) βρήκε μια προσέγγιση του σκελετού τόσο στο επίπεδο όσο και στο τρισδιάστατο χώρο κάνοντας πρώτα διακριτοποίηση του ορίου. Δειγματίζει το όριο σε μια δεδομένη πυκνότητα δειγματοληψίας, δίνοντας ένα σύνολο διακριτών σημείων που σχηματίζουν προσεγγιστικά το όριο. Στο επόμενο βήμα εκτελεί ένα διάγραμμα Voronoi στο σύνολο των σημείων. Τελικά, τα τμήματα του σκελετού που προκύπτουν από τα αποτελέσματα της κβαντοποίησης απορρίπτονται. Δεδομένου ότι ισχύει πως οι νόθες διακλαδώσεις του σκελετού έχουν μια ταχέως μεταβαλλόμενη συνάρτηση ακτίνας, ο λόγος μεταξύ της συνάρτησης

ακτίνας δύο γειτονικών κορυφών και της απόστασης μεταξύ των δύο κορυφών μπορεί να υπολογιστεί. Αυτή η αναλογία είναι μια προσέγγιση της κλίσης της συνάρτησης ακτίνας. Αν η αναλογία αυτή τείνει στο 1 τότε η κορυφή με την μικρότερη ακτίνα μπορεί να απορριφθεί. Μια άλλη στρατηγική για την απομάκρυνση τέτοιων νόθων διασταυρώσεων αναλύεται στον αλγόριθμο Bra92. Αυτή η προσέγγιση επιχειρεί να ταξινομήσει κάθε μια από τις κορυφές στο εσωτερικό διάγραμμα Voronoϊ σύμφωνα με το πόσα ίχνη (ορθή προβολή ή ίχνος ενός σημείου A πάνω σε μια ευθεία ϵ ονομάζεται το σημείο τομής A' της ευθείας ϵ με την κάθετη προς αυτήν που διέρχεται από το A.) έχει η κορυφή. Ο αριθμός των ιχνών προσδιορίζεται λαμβάνοντας την μέγιστη σφαίρα στην κορυφή, αυξάνοντας την ακτίνα ελαφρά και τέμνοντας την διευρυμένη σφαίρα με το όριο. Αυτή η τομή χωρίζει την επιφάνεια της σφαίρας σε περιοχές που βρίσκονται είτε εντός είτε εκτός της περιοχής. Κάθε περιοχή που βρίσκεται έξω από το όριο θεωρείται ότι αντιστοιχεί σε ένα ίχνος. Δεδομένου ότι στην πλειοψηφία των σκελετών προκύπτουν 2 ίχνη με αυτή την διαδικασία, μόνο τα σημεία αυτά διατηρούνται και τα υπόλοιπα απορρίπτονται.

Ο Chiang (Chi92) παίρνει μια επίπεδη περιοχή που οριοθετείται από C^* καμπύλες και εκτελεί αποσύνθεση στοιχείων του επιπέδου σε μια γειτονική περιοχή. Σε κάθε στοιχείο εκχωρείται μια κατά προσέγγιση απόσταση από το πλησιέστερο σημείο στο όριο της περιοχής χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο που οφείλεται στον Danielson (Dan80) ο οποίος υπολογίζει τον Ευκλείδειο μετασχηματισμό της απόστασης. Αυτές οι πληροφορίες χρησιμοποιούνται αργότερα για την εύρεση ενός αρχικού σημείου για ανίχνευση των αξονικών διακλαδώσεων σε δύο διαστάσεις και για αναγνώριση του πότε η ιχνηλάτηση έχει περάσει από το τέλος μιας διακλάδωσης. Η ανίχνευση χρησιμοποιεί τις πληροφορίες αυτές για να καθορίσει σε ποιο όριο βρίσκονται τα ίχνη του εκάστοτε MAT. Σε περίπτωση που αυτά τα στοιχεία είναι γνωστά, σχηματίζεται ένα σύνολο εξισώσεων που περιγράφουν τη δομή του MAT κοντά στο δεδομένο σημείο. Χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις για τον προσδιορισμό της εφαπτομένης στο MAT στο δεδομένο σημείο, διανύεται μια μικρή απόσταση κατά μήκος της εφαπτομένης, το σημείο βελτιώνεται με την επανάληψη Newton και πραγματοποιείται το επόμενο βήμα ανίχνευσης. Σε κάθε βήμα, οι πληροφορίες για την απόσταση χρησιμοποιούνται για να καθοριστεί αν η τρέχουσα διακλάδωση είναι ανενεργή ή όχι. Αν ναι, τότε έχει βρεθεί ένα σημείο διακλάδωσης ή ένα τελικό σημείο κι η ιχνηλάτηση είτε συνεχίζεται σε άλλη διακλάδωση είτε σταματάει. Παρόλο που η ιχνηλάτηση δεν επεκτείνεται σε 3-

διαστάσεις, ο Chiang αναφέρει ότι ο ίδιος Ευκλείδειος μετασχηματισμός της απόστασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό μιας προσέγγισης του MAT. Ένας απλός τρόπος χρήσης του μετασχηματισμού της απόστασης είναι να προσδιορίσουμε εκείνα τα σημεία που έχουν τοπικά μέγιστες τιμές απόστασης μετά την πραγματοποίηση του μετασχηματισμού. Τέτοια σημεία είναι σαφώς κοντά στα κέντρα των μέγιστων δίσκων κι έτσι μπορεί να θεωρηθεί ότι παρέχουν μια προσέγγιση του MAT.

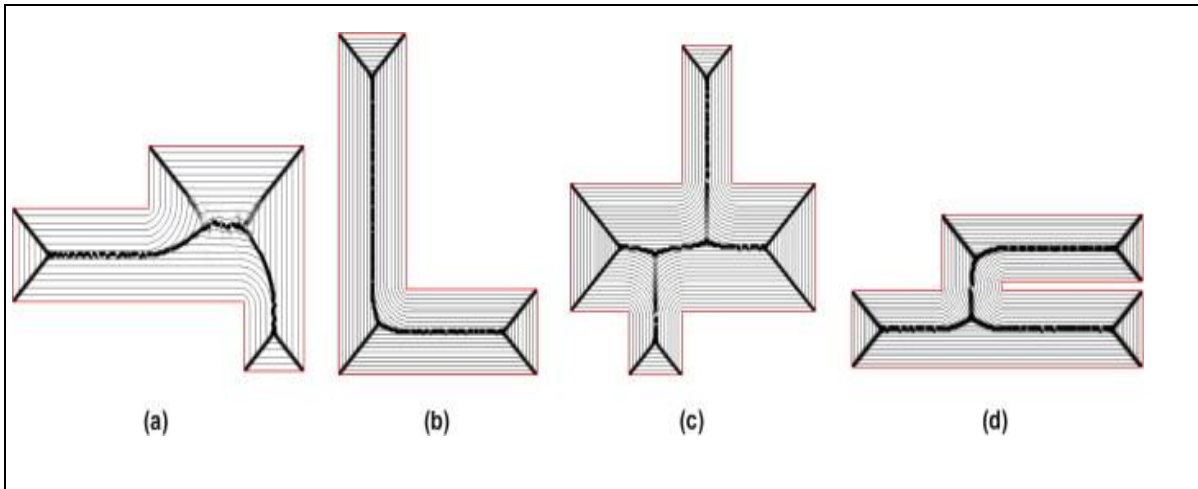
Ο Sudhalkar (SGP93) εισάγει ένα σύνολο που ονομάζεται *boxskeleton* το οποίο υποστηρίζει ότι έχει ιδιότητες που καθιστούν τον MAT ιδανικό ως εναλλακτική αναπαράσταση του σχήματος. Συγκεκριμένα, το *boxskeleton* παρουσιάζει μείωση διαστάσεων, ομοιοτική ισοδυναμία και αντιστρεψιμότητα. Ωστόσο, ο σκελετός ορίζεται χρησιμοποιώντας την L_∞ νόρμα (*boxnorm*) αντί για την Ευκλείδεια νόρμα κι έτσι μπορεί να προκύπτει κάτι αρκετά διαφορετικό από τον MAT. Ο αλγόριθμος του για τον προσδιορισμό του σκελετού λειτουργεί σε διακριτά αντικείμενα κατασκευασμένα από τετράγωνα (ή κύβους σε 3-διαστάσεις) και προχωρά λεπτύνοντας το αντικείμενο διατηρώντας παράλληλα ομοιοτική ισοδυναμία με το αρχικό αντικείμενο. Για να γίνει αυτή η λέπτυνση το αντικείμενο μετατρέπεται σε γραφική παράσταση στο επίπεδο. Τα όρια μεταξύ γειτονικών *pixels* θεωρούνται ακμές του γραφήματος και οι τομές αυτών των ακμών είναι οι κορυφές του γραφήματος. Το πρώτο βήμα λέπτυνσης ξεκινά αντικαθιστώντας το γράφημα από το τμήμα του γραφήματος που είναι εσωτερικό στο αρχικό γράφημα. Δεδομένου ότι αυτή η διαδικασία και μόνο μπορεί να οδηγήσει σε έναν αποσυνδεδεμένο σκελετό, το όριο “συρρικνώνεται” γύρω από τον σκελετό καθώς λεπταίνει. Διαδικασίες που βασίζονται σε αυτές τις ιδέες έχουν αναπτυχθεί τόσο για 2D όσο και για 3D διακριτά αντικείμενα.

Οι περισσότεροι από τους τρισδιάστατους αλγόριθμους (όπως οι παραπάνω) είναι διακριτοί αλγόριθμοι. Απ’ ό,τι γνωρίζουμε, ελάχιστες προσεγγίσεις έχουν προταθεί, λόγω κυρίως της υπολογιστικής πολυπλοκότητας που τις διέπει. Μία από τις λίγες τέτοιες τεχνικές αναπτύχθηκε από τον Hoffmann (Hof94), ο οποίος πρότεινε μια μέθοδο για τη συναρμολόγηση του MAT ενός CSG αντικειμένου. Η μέθοδός του προχωρά απορρίπτοντας σημεία πλησιέστερης προσέγγισης μεταξύ ζευγών οριακών στοιχείων και ελέγχει αυτά τα σημεία για να βεβαιωθεί ότι πραγματικά ανήκουν στον MAT. (Κάθε ένα από αυτά τα σημεία ανήκει στον MAT αν και μόνο αν η απόσταση από το ζεύγος των στοιχείων είναι μικρότερη ή ίση με τις αποστάσεις από τα άλλα

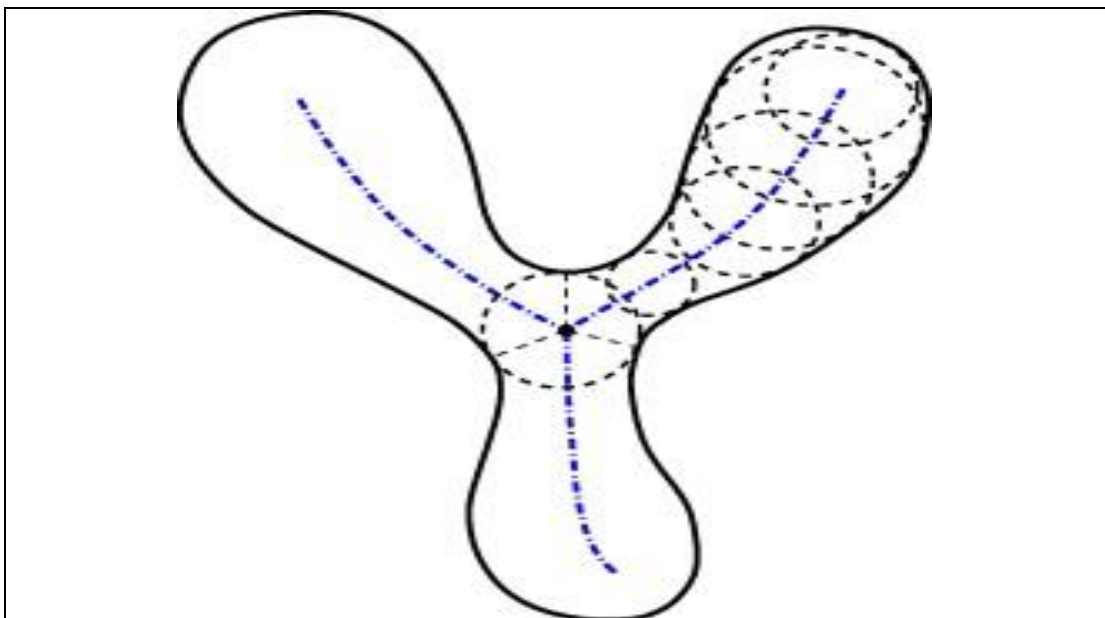
οριακά στοιχεία.) Στη συνέχεια, τα σημεία ταξινομούνται σε σειρά αυξανόμενης απόστασης από το όριο και γίνεται μια τοπική ανάλυση γύρω από κάθε σημείο με σκοπό να προσδιοριστεί αν τα σημεία βρίσκονται σε μια άκρη ή κάποια κορυφή του MAT. Αυτός ο προσδιορισμός γίνεται με την αναγνώριση όλων των οριακών στοιχείων που βρίσκονται στην ίδια ελάχιστη απόσταση από το σημείο και σχηματίζουν ένα σύνολο εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν το ισαπέχον σύνολο στο οποίο ανήκει το σημείο. Με την χρήση της θεωρίας του Jacobγια τέτοιου είδους εξισώσεις προβλέπεται αν το σημείο βρίσκεται σε μια άκρη ή σε κάποια κορυφή του σκελετού. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή φαίνεται πως δεν αναπτύχθηκε και εφαρμόστηκε περαιτέρω. Επιπλέον, είναι απαραίτητο στη μέθοδο να ενωθούν τα ισαπέχοντα σημεία μεταξύ τους ώστε να απορριφθούν τμήματα που δεν ανήκουν στον MATκάτι που απαιτεί επιπλέον υπολογιστικό κόστος.

Οι ReddyκαιTurkiyyah(RT94) πρότειναν πρόσφατα έναν αλγόριθμο για τον προσδιορισμό του MATενός τρισδιάστατου πολυέδρου σχετικά βασισμένοιστη γενίκευση του διαγράμματος Voronoi. Αυτοί υπολόγισαν έναν αφηρημένο τριγωνισμό Delaunayτου πολυέδρου και χρησιμοποίησαν το αποτέλεσμα για να βρουν το γενικευμένο διάγραμμα Voronoi. Ο MATτου πολυέδρου προκύπτει με την απόρριψη ορισμένων στοιχείων του γενικευμένου διαγράμματος Voronoi. Ο αλγόριθμος μπορεί να προσδιορίσει ρητά ορισμένα κρίσιμα σημεία του σκελετού, αλλά δεν περιέχει ακριβείς αναπαραστάσεις των καμπυλών και των επιφανειών συνθέτοντας τον MAT.

Κατά τον καθορισμό μιας μεθόδου για τον υπολογισμό του MAT σε 3-διαστάσεις είναι αναγκαίο να λάβουμε υπόψιν τα χαρακτηριστικά των παραπάνω τεχνικών. Πολλές από τις παραπάνω τεχνικές έχουν σημεία που μπορεί να μας βοηθήσουν στην ανάπτυξη μιας ολοκληρωμένης προσέγγισης. Αν και η προσέγγιση του Brandt (Bra91, Bra92) είναι κάπως περιορισμένη στην κβαντοποίηση, το έργο του για την ταξινόμηση των σημείων του σκελετού φαίνεται αρκετά ολοκληρωμένο. Το έργο του Chiang (Chi92) σχετικά με το πρόβλημα των 3-διαστάσεων είναι προκαταρκτικό, αλλά η βασική του ιδέα για την ανίχνευση διασταυρώσεων σε 2-διαστάσεις χρησιμοποιώντας ένα σύνολο πολυωνυμικών εξισώσεων που είναι επεκτάσιμες σε 3-διαστάσεις καθώς και ο Ευκλείδειος μετασχηματισμός της απόστασης θα μπορούσε να είναι σημαντικό για τη μείωση του χρόνου εκτέλεσης ενός αλγορίθμου.

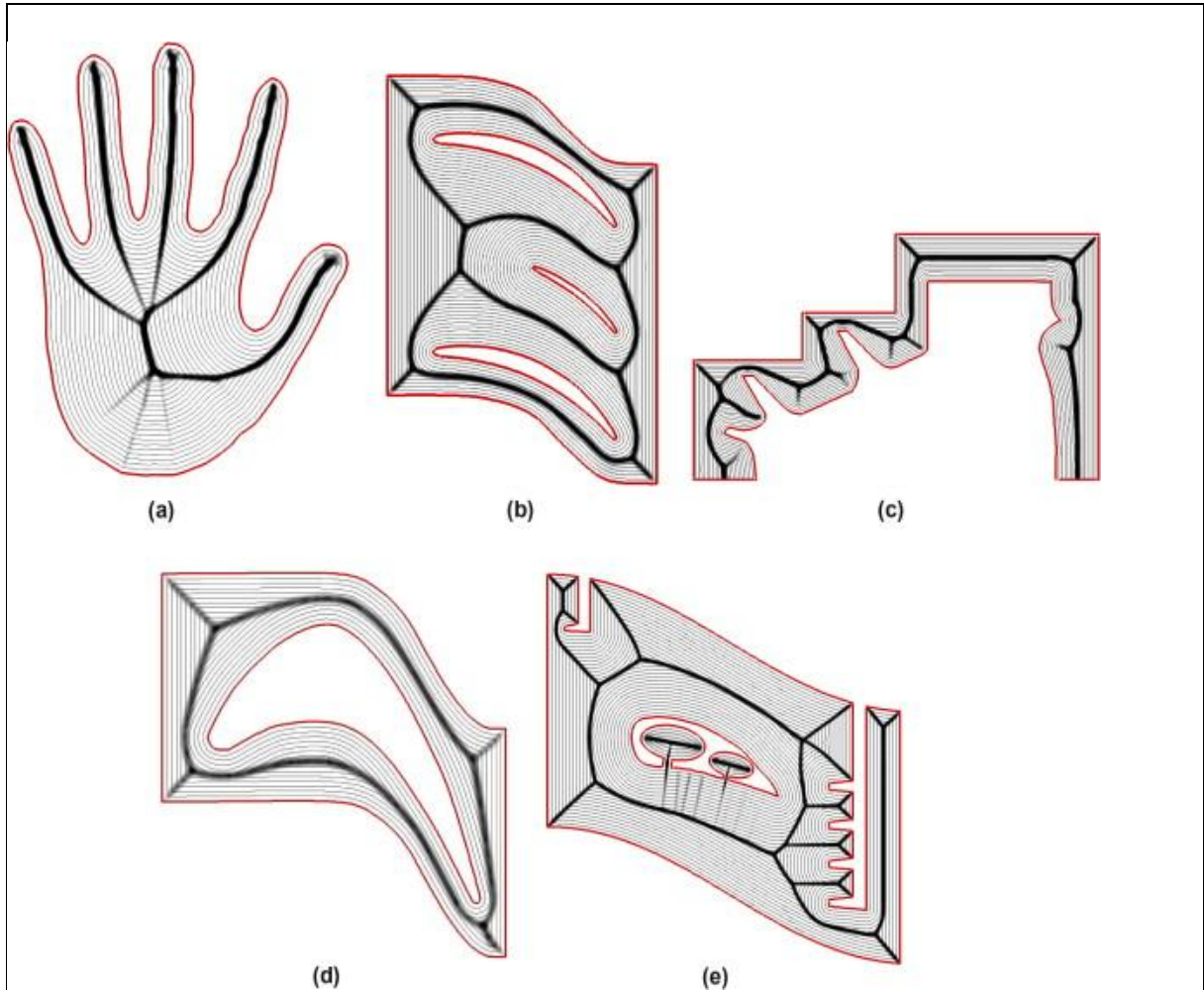


Αρκετές εργασίες αναλύουν επίσης ορισμένες από τις μαθηματικές ιδιότητες του MAT και τις μετατροπές από μια αναπαράσταση MAT σε μια αναπαράσταση συνόρων. Ο Welter (Wol92) παρέχει μια διεξοδική ανάλυση των τοπολογικών ιδιοτήτων του MAT και αποδεικνύει τη σχέση μεταξύ του MAT και των σχετικών συνόλων συμμετρίας όπως ο γεωμετρικός τύπος. Οι Chiang και Brandt μελέτησαν πολλές από τις μαθηματικές ιδιότητες του MAT, ιδιαίτερα για τους δισδιάστατους χώρους. Το πρόβλημα των 3-διαστάσεων εξετάζεται λεπτομερώς από τον Nackman (Nac82), ο οποίος επίσης εξάγει σχέσεις μεταξύ της καμπυλότητας του συνόρου, του MAT και της συνάρτησης ακτίνας. Οι Vermeer (Ver94) και Gelston και Dutta (GD95) μελέτησαν την μετατροπή από μια αναπαράσταση MAT σε μια αναπαράσταση συνόρων.



Σχήμα 1.1.2. Σχηματική απεικόνιση του MAT μιας κλειστής επιφάνειας στις 2-διαστάσεις.

Σχήμα 1.1.3. Σχηματική απεικόνιση του MAT για απλές επιφάνειες: (a,b) Laplacianbased MAT (c,d) Hessianbased MAT



Σχήμα 1.1.4. Σχηματική απεικόνιση του MAT για σύνθετες επιφάνειες

Το παραπάνω κείμενο αποτελεί αντικείμενο μελέτης κι έχει γραφεί στο paper με τίτλο «Computation of the Medial Axis Transform of 3-D Polyhedra» και συγγραφείς τους Evan C. Sherbrooke, Nicholas M. Patrikalakis and Erik Brisson.(ENE)

Πέρα από τις προαναφερθείσες μεθόδους και αλγορίθμους υπολογισμού του MAT υπάρχουν δύο επιπλέον, πιο πρόσφατες, προσεγγίσεις για τον υπολογισμό του MAT.

Η πρώτη καταγράφεται στο παρρημετίτλο «Q-MAT: Computing Medial Axis Transform by Quadratic Error Minimization» και συγγραφείς τους PanLiandBinWang, FengSun, XiaohuGuo,

CaimingZhangandWenpingWangηοποίαχρησιμοποιεί την διόρθωση τετραγωνικού σφάλματος (QEM) προκειμένου να υπολογίσει τον MAT. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος (Q-MAT) ακολουθεί την διόρθωση τετραγωνικού σφάλματος (Garland και Heckbert 1997) με βάση την απόρριψη των ακμών. Όλες οι ακμές ταξινομούνται σύμφωνα με τις τιμές κόστους τους και η ακμή με το μικρότερο κόστος απορρίπτεται επαναληπτικά με σκοπό να προκύψει μια νέα σφαίρα m_g ως αποτέλεσμα της συγχώνευσης των δύο τελικών σημείων της ακμής. Στην πορεία του αλγορίθμου υπολογίζεται η βέλτιστη θέση της νέας σφαίρας m_g όταν μια ακμή απορρίπτεται καθώς και το κόστος απόρριψης c_{ij} μιας ακμής e_{ij} ώστε να καθοριστεί η προτεραιότητά της για συγχώνευση. Η προσέγγιση αυτή βασίστηκε βέβαια και σε κάποιες προηγούμενες προσπάθειες υπολογισμού του MAT. Αρχικά, η μέθοδος Angle-based filtering (Am96) υπολογίζει, για κάθε σημείο του medial axis, τη γωνία που σχηματίζεται από τα δύο πλησιέστερα σημεία του στο όριο του σχήματος. Αφαιρεί ένα σημείο του medial axis αν η γωνία που σχηματίζεται με αυτό το σημείο είναι μικρότερη από μια τιμή που καθορίζεται από τον χρήστη. Από την μέθοδο αυτή προκύπτει συνήθως ένας απλοποιημένος medial axis με διαφορετική τοπολογία από τον αρχικό, αν και μπορεί να διατηρεί αρκετά καλά τα τοπικά χαρακτηριστικά του. Επιπλέον, η μέθοδος λ-medial axis (Chazal and Lieutier 2005) χρησιμοποιεί την ακτίνα της σφαίρας που περιβάλλει τα πλησιέστερα σημεία του medial axis σαν κριτήριο απόρριψης. Ένα σημείο του medial axis αφαιρείται αν η ακτίνα της σφαίρας στην οποία ανήκει το σημείο αυτό είναι μικρότερη από ένα δεδομένο όριο λ . Για μικρές τιμές του λ διατηρείται η τοπολογία του medial axis αλλά αυτό το κριτήριο δεν μπορεί να διατηρήσει τα χαρακτηριστικά του σε διαφορετικές κλίμακες. Μια άλλη μέθοδος που λέγεται Scale Axis Transform (SAT) (Miklosetal. 2010) είναι πιο αποτελεσματική από τις προηγούμενες. Στη μέθοδο αυτή, αρχικά, όλες οι σφαίρες κλιμακώνονται κατά έναν παράγοντα $s > 1$. Μετά την κλιμάκωση, μια σφαίρα απορρίπτεται αν περιέχεται σε μια άλλη σφαίρα. Σε αυτό το βήμα μπορεί να χαθούν κάποια ομοιοτικά χαρακτηριστικά του αρχικού αντικειμένου διότι μπορεί να καλυφθούν τυχόν στενά κενά ή μικρές τρύπες που υπήρχαν. Το τελικό αντικείμενο προκύπτει με κλιμάκωση προς τα πίσω των σφαιρών που έχουν απομείνει κατά τον παράγοντα $1/s$. Αν η τιμή του s οριστεί να είναι αρκετά μεγάλη θα προκύψει ένας αρκετά συμπαγής MAT με τον κίνδυνο βέβαια της απώλειας πολλών γεωμετρικών χαρακτηριστικών. Οι περισσότερες από τις υπάρχουσες μεθόδους απλοποίησης του MAT συνδέουν τον medial axis με την ένωση των σφαιρών και απλοποιούν τον MAT

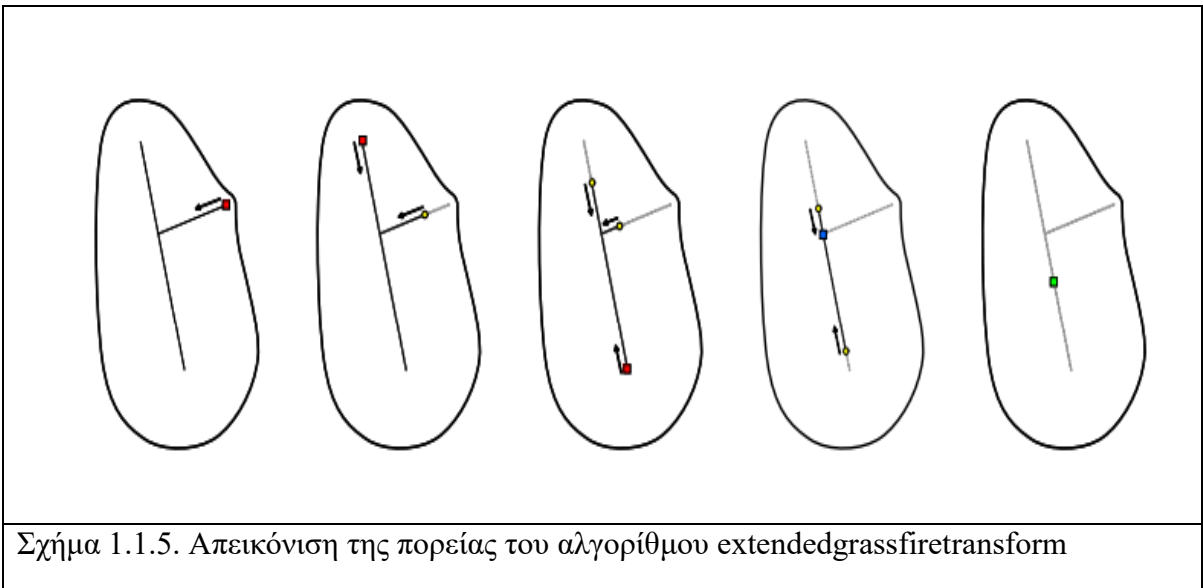
χρησιμοποιώντας ένα δεδομένο όριο. Αντίθετα, ο αλγόριθμος Q-MAT χρησιμοποιεί την παρεμβολή σφαιρών του medialaxis για να ορίσει ένα κομμάτι του MAT. Επιπλέον, η υιοθέτηση μιας μέτρησης τετραγωνικών σφαλμάτων επιτρέπει την επίτευξη πιο άμεσης και ακριβέστερης απλοποίησης του MAT.

Όσον αφορά την δεύτερη μέθοδο, περιγράφεται στο paper με τίτλο «Medial Axis Computation for Planar Free-Form Shapes» και συγγραφείς τους O. Aichholzer, W. Aigner, F. Aurenhammer, T. Hackl, B. Juttler, M. Rabl (MacP) και είναι μια απλή και γρήγορη μέθοδος που απαιτεί λιγότερα δεδομένα κάτι που την καθιστά αποτελεσματικότερη. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί μια προσέγγιση του ορίου του σχήματος με προσαρμοσμένο τρόπο και ο αλγόριθμος λειτουργεί άμεσα σε σχήματα που οριοθετούνται από κυκλικά τόξα. Αυτό έχει δύο σημαντικά πλεονεκτήματα: (1) Για την ακρίβεια της προσέγγισης, ο θόρυβος των δεδομένων μεταπίπτει από N σε $n = O(N^{2/3})$ σε σχέση με την χρήση πολυγωνικής περιγραφής. (2) Μπορεί να διατηρείται η μονοτονία της καμπυλότητας του πρωτότυπου σχήματος κάτι που κάνει τον υπολογισμένο medialaxis να συγκλίνει προς τον πραγματικό medialaxis. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο medialaxis ενός σχήματος με τμηματικά κυκλικό όριο αποτελείται από κωνικά τόξα και έτσι έχει την ίδια αναλυτική πολυπλοκότητα με τις πολυγωνικές επιφάνειες. Ο αλγόριθμος υιοθετεί την προσέγγιση αποσύνθεσης σχήματος και έτσι γίνεται απλούστερος. Καθώς η αποσύνθεση γίνεται από εγγεγραμμένους δίσκους, η μέθοδος είναι κατάλληλη για σχήματα με τμηματικά κυκλικά όρια. Ο αλγόριθμος εκτελείται στον αναμενόμενο χρόνο $O(n \log n)$ εφόσον πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις σχετικά με τη διάμετρο του medialaxis.

Σήμερα οι δύο επικρατέστεροι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του MAT είναι ο `minimum distance transform` και ο `extended grassfire transform`. Στην πρώτη μέθοδο ο MAT προκύπτει υπολογίζοντας την απόσταση δλώνοντας ένα σύνολο εξισώσεων με τις λύσεις να προκύπτουν σε καρτεσιανό σύστημα. Στη συνέχεια εξάγονται σημεία του MAT με βάση τις λύσεις για την απόσταση μέσω ενός κριτηρίου, της Λαπλασιανής ή Εσσιανής ορίζουσας των d . Αυτό το σύνολο σημείων λεπτύνεται περαιτέρω σε καμπύλες και επιφάνειες με ειδικούς αλγορίθμους.

Σχετικά με τον δεύτερο αλγόριθμο, αυτός παρομοιάζει τον medialaxis με ένα λεπτό νήμα από χόρτο. Κάθε άκρο που ανήκει στο νήμα αναφλέγεται τη στιγμή που η

φωτιά, που όρισε ο Blum, φτάνει εκεί. Η φωτιά διαδίδεται από εκείνα τα άκρα κατά μήκος του medialaxis με σταθερή ταχύτητα. Όταν ένα μέτωπο πυρκαγιάς φτάσει σε μια διασταύρωση συνεχίζει αν έχει απομείνει ακριβώς ένα κλαδί που δεν έχει καεί και εξαφανίζεται εάν απομένουν δύο ή περισσότερα κλαδιά. Όταν συναντώνται πολλά μέτωπα πυρκαγιάς στο ίδιο σημείο και εφόσον δεν έχουν απομείνει άκαυστα κλαδιά τα μέτωπα της φωτιάς σβήνουν εκεί. Η διαδικασία τερματίζεται όταν κανένα μέτωπο πυρκαγιάς δεν είναι πλέον ενεργό. Ένα απλό παράδειγμα φαίνεται στην παρακάτω αλληλουχία εικόνων.



Κεφάλαιο 2

Διάφορες χρήσεις και επεκτάσεις του MAT

2.1 Χρήσεις του MAT σε διάφορους τομείς

Ο MAT είναι μια ευρέως χρησιμοποιούμενη και καλά θεμελιωμένη μαθηματική έννοια η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε διάφορους τομείς, όπως:

1. **Computervision:** Ο MAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή του σκελετού ενός αντικειμένου σε μια εικόνα, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση αντικειμένων, την ανάλυση σχήματος ή την ανίχνευση μοτίβων σε εικόνες.
2. **Ρομποτική:** Ο MAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποφυγή εμποδίων, τον σχεδιασμό διαδρομής και την πλοήγηση για ρομπότ σε πολύπλοκα περιβάλλοντα.
3. **Γεωμετρία:** Ο MAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απλοποίηση σχημάτων και πλεγμάτων σε τρισδιάστατα μοντέλα, διευκολύνοντας την εργασία και την οπτικοποίησή τους.
4. **Επεξεργασία εικόνας:** Ο MAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τμηματοποίηση και ανάλυση εικόνας, όπου μπορεί να βοηθήσει στον εντοπισμό περιοχών ενδιαφέροντος σε μια εικόνα, καθώς και για συμπίεση εικόνας, όπου μπορεί να βοηθήσει στη μείωση του αριθμού των σημείων σε ένα πλέγμα διατηρώντας παράλληλα το σχήμα του.
5. **Ιατρική απεικόνιση:** Ο MAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση ιατρικών εικόνων, όπως αξονικές τομογραφίες και μαγνητικές τομογραφίες, για τον εντοπισμό και την αναγνώριση σημαντικών δομών, όπως οστά, αιμοφόρα αγγεία και όργανα.
6. **GIS (Συστήματα Γεωγραφικών Πληροφοριών) και χαρτογραφία:** Ο MAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απλοποίηση της αναπαράστασης δεδομένων εδάφους, διευκολύνοντας τη δημιουργία χαρτών και την εκτέλεση χωρικής ανάλυσης.
7. **Παιχνίδια και κινούμενα σχέδια:** Ο MAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία κινούμενων εικόνων και παιχνιδιών, τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία πολύπλοκων, ευέλικτων και δυναμικών

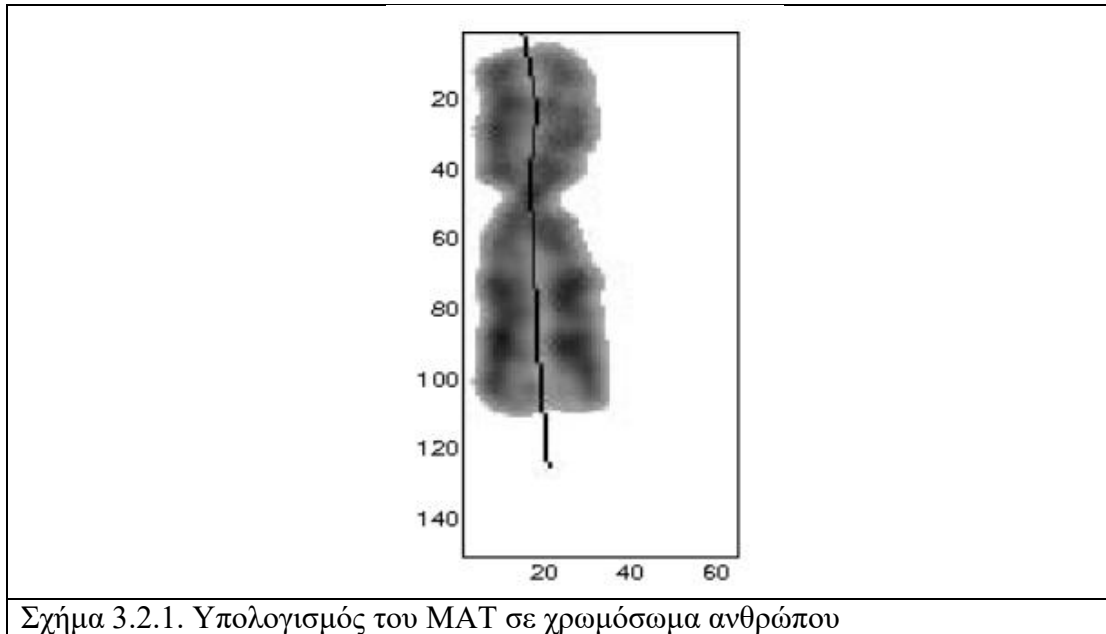
κινούμενων εικόνων ή για τη δημιουργία ρεαλιστικών φυσικών προσομοιώσεων.

2.2 Χρήσεις του MAT στην Ιατρική

Στην ιατρική, οMAT θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση ιατρικών εικόνων όπως αξονικές τομογραφίες, μαγνητικές τομογραφίες και ακτινογραφίες για την εξαγωγή της δομής των οστών, των οργάνων και των ιστών. Για παράδειγμα, οMAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την τμηματοποίηση των οστών σε μια ιατρική εικόνα και για τον προσδιορισμό της κεντρικής γραμμής ή του άξονα του οστού. Αυτές οι πληροφορίες μπορούν στη συνέχεια να χρησιμοποιηθούν για τη μέτρηση του πάχους και του μήκους των οστών, την αξιολόγηση του βαθμού στένωσης του χώρου της άρθρωσης ή για την ανίχνευση τυχόν παραμορφώσεων ή ανωμαλιών.

Ο MAT θα μπορούσε επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον εντοπισμό και την ανάλυση του σχήματος των αιμοφόρων αγγείων, των νεύρων και άλλων δομών σε ιατρικές εικόνες, οι οποίες μπορούν να παρέχουν σημαντικές πληροφορίες για τη διάγνωση και τον σχεδιασμό της θεραπείας. Επιπλέον, το MAT θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στον χειρουργικό σχεδιασμό και την προσομοίωση, για να βοηθήσει στον εντοπισμό κρίσιμων δομών και στον σχεδιασμό της ασφαλέστερης και αποτελεσματικότερης χειρουργικής προσέγγισης.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι ενώ οι πιθανές εφαρμογές του MAT στην ιατρική είναι ελπιδοφόρες, απαιτείται ωστόσο περαιτέρω έρευνα και ανάπτυξη για την πλήρη αξιοποίηση των δυνατοτήτων του και τη μετατροπή του σε πρακτικά και αξιόπιστα κλινικά εργαλεία.



Σχήμα 3.2.1. Υπολογισμός του MAT σε χρωμόσωμα ανθρώπου

2.3 Συμπεράσματα

Συμπερασματικά, ο Medial Axis Transform (MAT) είναι ένα ισχυρό εργαλείο για ανάλυση εικόνας και την Μηχανική Όραση. Η ικανότητά του να εξάγει τη σκελετική δομή των αντικειμένων σε μια εικόνα παρέχει πολύτιμες πληροφορίες για ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών. Ο MAT έχει αποδειχθεί ότι είναι μια αποτελεσματική και θεμελιωμένη μέθοδος, καθιστώντας τον μια εξαιρετικά δημοφιλή επιλογή για εργασίες επεξεργασίας εικόνας.

Στον τομέα των γραφικών υπολογιστών, ο MAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση και το χειρισμό σχημάτων, βοηθώντας στη δημιουργία πιο ρεαλιστικών και ελκυστικών εικόνων. Στη ρομποτική, ο MAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση αντικειμένων και τον προσδιορισμό του σχήματος, του μεγέθους και του προσανατολισμού τους, κάτι που είναι κρίσιμο για την αυτόνομη πλοήγηση. Στην αναγνώριση μοτίβων, ο MAT μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μείωση της διάστασης μιας εικόνας, καθιστώντας ευκολότερη την ταξινόμηση και την αναγνώριση αντικειμένων.

Ο MAT έχει μελετηθεί και εφαρμοστεί ευρέως σε διάφορους τομείς και η χρησιμότητά του συνεχίζει να διερευνάται με νέους και καινοτόμους τρόπους. Καθώς οι τεχνολογίες επεξεργασίας εικόνας και υπολογιστικής γεωμετρίας συνεχίζουν να

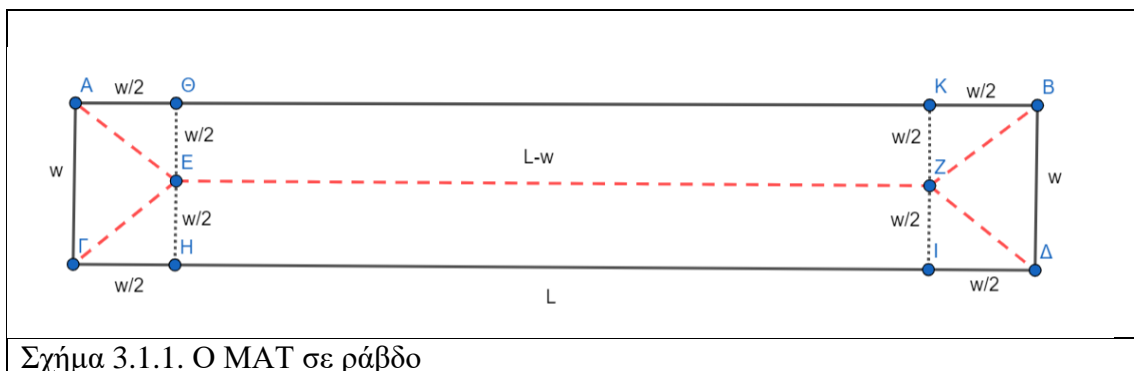
προοδεύουν, είναι πιθανό ότι ο MAT θα διαδραματίσει ολοένα και πιο σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση του μέλλοντος αυτών των τομέων.

Συνολικά, ο Medial Axis Transform είναι ένα πολύτιμο εργαλείο για την ανάλυση και την κατανόηση της δομής των αντικειμένων στις εικόνες. Η ευελιξία, η αποτελεσματικότητα και η στιβαρότητά του το καθιστούν σημαντική προσθήκη σε κάθε εφαρμογή επεξεργασίας εικόνας καθώς και σε άλλους είδους εφαρμογές.

Κεφάλαιο 3

Η σχέση του μήκους του ενδιάμεσου άξονα με το μήκος του περιγράμματος

3.1.Ράβδος



Από τη χρήση του πυθαγορείου θεωρήματος για τις πλευρές ισχύει ότι:

$$AE = GE = ZB = ZD = w\sqrt{2}/2$$

Για το μήκος περιγράμματος του παραλληλογράμμου (contourLength) ισχύει ότι:

$$c = 2 * (L + w)(1)$$

Για το μήκος του σκελετού έχουμε ότι:

$$S = L - w + \frac{4w\sqrt{2}}{2} = L - w + 2w\sqrt{2} \quad (2)$$

Οπότε διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{S}{C} = \frac{L - w + 2w\sqrt{2}}{2 * (L + w)}$$

Έστω $L=aw$ με $a>1$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

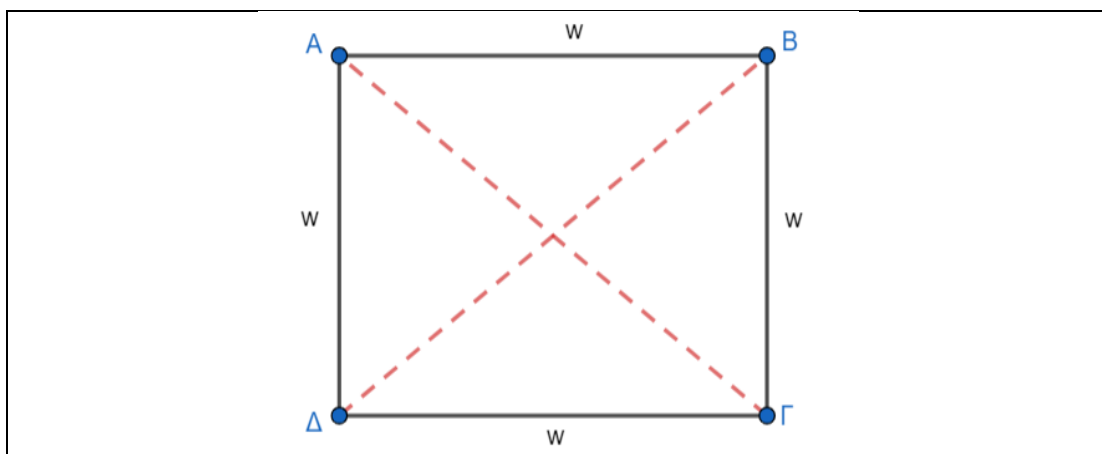
$$\frac{S}{C} = \frac{aw - w + 2w\sqrt{2}}{2 * (aw + w)} = \frac{aw - w + 2w\sqrt{2}}{2aw + 2w} = \frac{\alpha - 1 + 2\sqrt{2}}{2\alpha + 2} \quad (3)$$

Θέτω την (3): $f(a) = \frac{\alpha - 1 + 2\sqrt{2}}{2\alpha + 2}$ και θα έχω ότι:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha - 1 + 2\sqrt{2}}{2\alpha + 2} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

Παρακάτω παραθέτω συγκεκριμένα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.1.1 Αν $\alpha=1$ και $L=w$. Αρχικά, το σχήμα που προκύπτει είναι ως εξής:



Σχήμα 3.1.2. Ο MAT σε ράβδο με ίσες πλευρές

Στην περίπτωση αυτή εύκολα υπολογίζεται ότι $c = 4w$ και $s = 2w\sqrt{2}$.

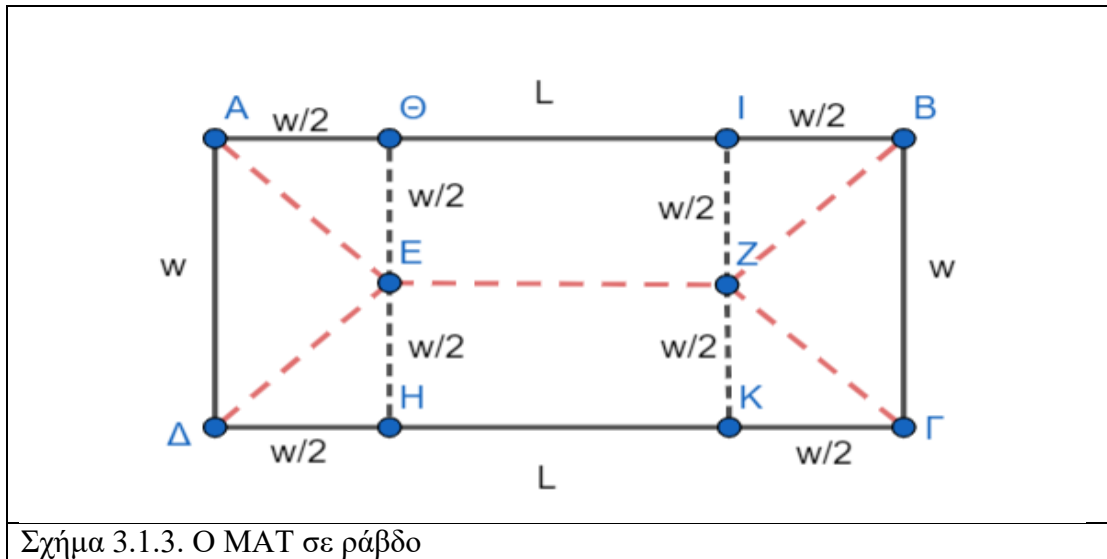
Οπότε, διαιρώντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\frac{S}{C} = \frac{2w\sqrt{2}}{4w} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$$

Η(3) για $\alpha=1$ δίνει:

$$\frac{S}{C} = \frac{1 - 1 + 2\sqrt{2}}{2 * 1 + 2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7$$

Παράδειγμα 3.1.2 Αν $\alpha=2$ και $L=2w$. Αρχικά, το σχήμα που προκύπτει είναι ως εξής:



Σχήμα 3.1.3. Ο MAT σε ράβδο

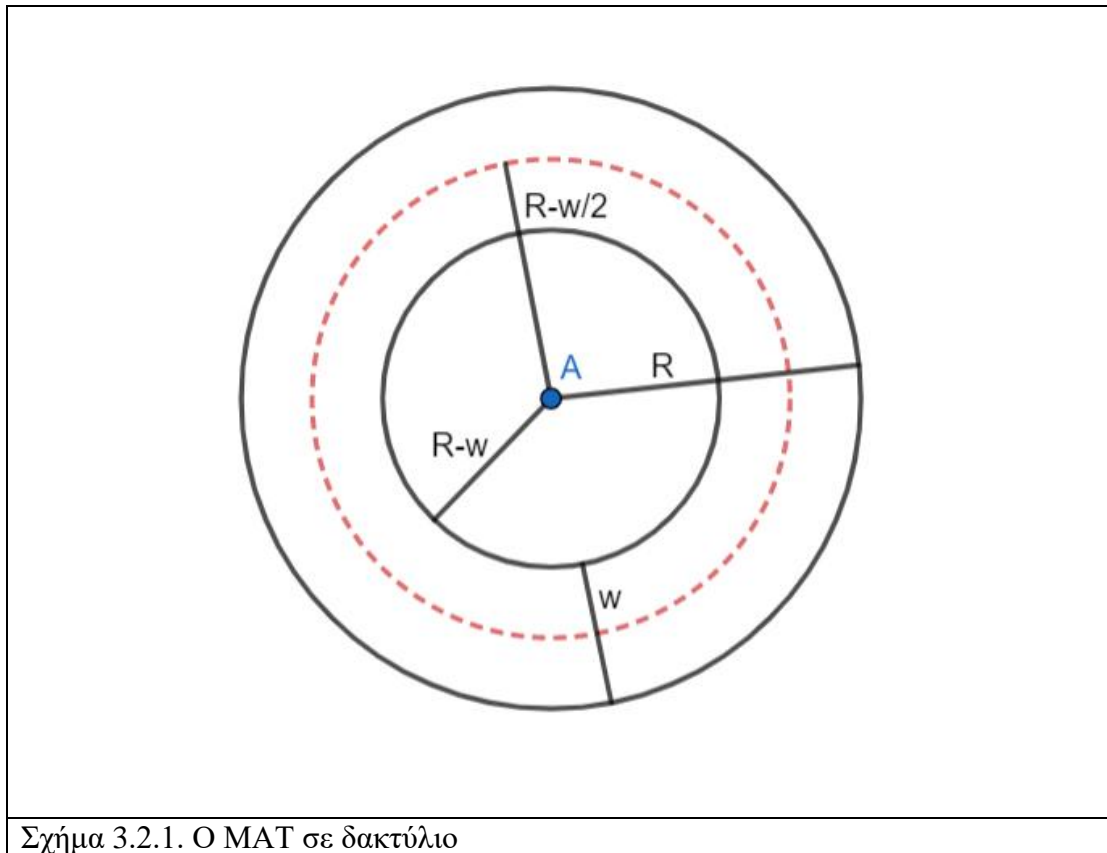
Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε ότι:

$$\frac{S}{c} = \frac{w + 2w\sqrt{2}}{6w} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} \cong 0.63$$

H(3) για $\alpha=2$ δίνει:

$$\frac{S}{C} = \frac{2 - 1 + 2\sqrt{2}}{2 * 2 + 2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} \cong 0.63$$

3.2. Δακτύλιος



Σχήμα 3.2.1. Ο MAT σε δακτύλιο

Στην περίπτωση του δακτυλίου θα ισχύουν τα παρακάτω:

$$c = 2\pi R + 2\pi(R - w) = 4\pi R - 2\pi w \quad (4)$$

$$S = 2\pi \left(R - \frac{w}{2} \right) = 2\pi R - \pi w \quad (5)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (4) και (5) κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\frac{S}{c} = \frac{2\pi R - \pi w}{4\pi R - 2\pi w} = \frac{2R - w}{4R - 2w}$$

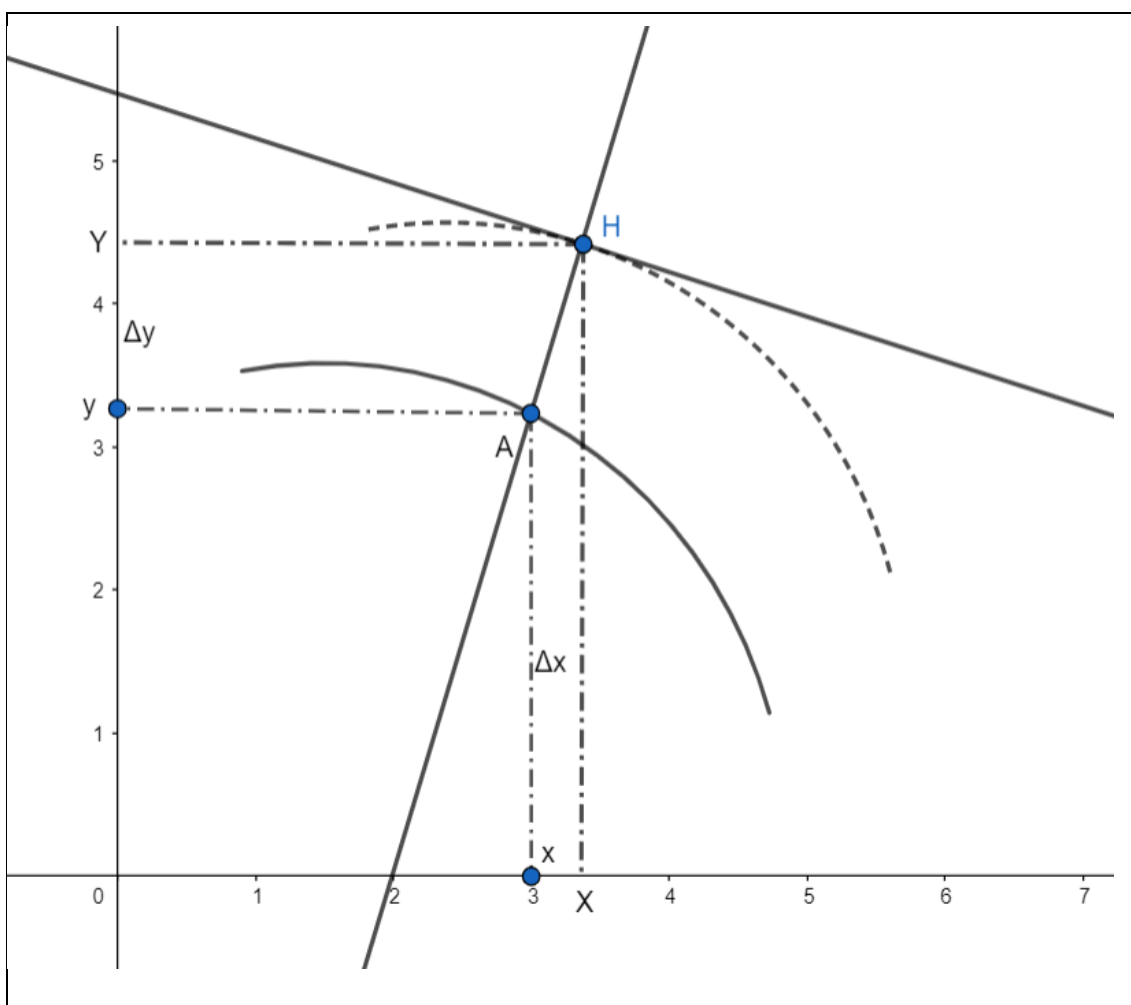
Έστω $R = \alpha w$ με $\alpha > 1$ η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{S}{c} = \frac{2\alpha w - w}{4\alpha w - 2w} = \frac{2\alpha - 1}{4\alpha - 2} = \frac{2\alpha - 1}{2(2\alpha - 1)} = \frac{1}{2}$$

3.3. Ισαπέχουσες καμπύλες

Οι ισαπέχουσες καμπύλες είναι καμπύλες που αντιπροσωπεύουν ίσες αποστάσεις από ένα σταθερό σημείο. Οι καμπύλες αυτές χρησιμοποιούνται συχνά στα μαθηματικά, τη φυσική και τη γεωγραφία για να περιγράψουν το σχήμα και το μέγεθος των αντικειμένων αλλά και για την εξήγηση διαφόρων φαινομένων στο διάστημα.

Στα μαθηματικά, συγκεκριμένα, οι ισαπέχουσες καμπύλες χρησιμοποιούνται συχνά σε δισδιάστατα συστήματα συντεταγμένων με σκοπό να περιγράψουν την απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Για παράδειγμα, εάν έχουμε ένα σημείο (x_1, y_1) κι ένα άλλο σημείο (x_2, y_2) η απόσταση μεταξύ τους μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Αυτή η απόσταση μπορεί να αναπαρασθεί γραφικά ως μια ισαπέχουσα καμπύλη σε ένα επίπεδο συντεταγμένων, όπως φαίνεται και παρακάτω.



Σχήμα 3.3.1. Ο ΜΑΤ σε ισαπέχουσες καμπύλες

Αρχικά ισχύει ότι: $\Delta y = Y - y = Y - f(x)$ και $\Delta x = X - x$ και $AH = w$.

Έχουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sigma\varphi\theta = -\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} \quad (1)$$

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow 1 + \sigma\varphi^2\theta = \frac{1}{\eta\mu^2\theta} \Rightarrow \eta\mu\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma\varphi^2\theta}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \eta\mu\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\theta}}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \varepsilon\varphi\theta \text{ και } \Delta y = \pm \frac{w}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \text{ και } \Delta x = \pm \frac{f'(x) * w}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}$$

Άρα, ισχύει ότι:

$$X = x \pm \frac{f'(x) * w}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \text{ και } Y = f(x) \pm \frac{w}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}$$

Τα X και Y είναι συναρτήσεις του x, δηλαδή X(x) και Y(x).

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dx} &= \left(x \pm \frac{f'(x) * w}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \right)' = 1 \pm \left(\frac{f''(x) * w}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} - \frac{f'(x) * w * \left(\sqrt{1 + f'^2(x)} \right)'}{1 + f'^2(x)} \right) = \\
&= 1 \pm \left(\frac{f''(x) * w}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} - \frac{f'(x) * w * 2f'(x)f''(x)}{(1 + f'^2(x)) * 2 * \left(\sqrt{1 + f'^2(x)} \right)} \right) = \\
&= 1 \pm \left(\frac{f''(x) * w * (1 + f'^2(x))}{(1 + f'^2(x)) \left(\sqrt{1 + f'^2(x)} \right)} - \frac{f'(x) * w * f'(x)f''(x)}{(1 + f'^2(x)) \left(\sqrt{1 + f'^2(x)} \right)} \right) \\
&= 1 \pm \left(\frac{f''(x) * w * (1 + f'^2(x)) - w * f'^2(x) * f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}} \right) = \\
&= 1 \pm \left(\frac{f''(x) * w}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dx} &= \left(f(x) \pm \frac{w}{\sqrt{1 + f'^2(x)}} \right)' = f'(x) \pm \frac{w * \left(\sqrt{1 + f'^2(x)} \right)'}{1 + f'^2(x)} = \\
&= f'(x) \pm \frac{w * 2f'(x)f''(x)}{(1 + f'^2(x)) * 2 * \left(\sqrt{1 + f'^2(x)} \right)} \\
&= f'(x) * \left(1 \pm \frac{f''(x) * w}{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (3)
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (2) και (3), αν τις διαιρέσουμε κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\frac{dY}{dX} = f'(x)$$

Άρα, αν το Η είναι το κοντινότερο στο Α τότε και το Α είναι το κοντινότερο στο Β.

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι δύο τέτοιες καμπύλες που απέχουν απόσταση w θα έχουν το ίδιο μήκος στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και ο ΜΑΤ θα είναι καμπύλη που θα ισαπέχει από αυτές $w/2$ (Σχήμα 2.3.1.). Αν θεωρήσουμε μεγάλο το μήκος των

καμπυλών σε σχέση με το μήκος του κλειστού σχήματος που ορίζουν τότε προφανώς $S/C = 1/2$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Aur91 F. Aurenhammer. Voronoi diagrams — a survey of fundamental geometric data structure, ACM Computing Surveys, 23(3):345-435, September 1991.
- Am96 Attali and Montanvert 1996, Amenta et al. 2001, Foskey et al. 2003, Dey and Zhao 2004; Sud et al. 2005
- Blu67 H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. Models for the Perception of Speech and Visual Form, pages 362-381, ed: Weinant Wathen Dunn MIT Press, 1967.
- Blu73 H. Blum. Biological shape and visual science (part I). Journal of Theoretical Biology, 38:205-287, 1973.
- BN78 H. Blum and R. N. Nagel. Shape description using weighted symmetric axis features. Pattern Recognition, 10(3): 167-180, 1978.
- Boo79 F. L. Bookstein. The line skeleton. Computer Graphics and Image Processing, 11: 123-137, 1979.
- Bra91 J. W. Brandt. Theory and Application of the Skeleton Representation of Continuous Shapes. PhD thesis, University of California, Davis, CA, 1991.

- Bra92 J. W. Brandt. Describing a solid with the three-dimensional skeleton. In J. D. Warren, editor, Proceedings of The International Society for Optical Engineering Volume 1830, Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics 111, pages 258-269. SPIE, Boston, Massachusetts, 1992.
- Chi92 C.-S. Chiang. The Euclidean Distance Transform. PhD thesis, Purdue University, West Lafayette, IN, August 1992.
- ENE Evan C. Sherbrooke, Nicholas M. Patrikalakis and Erik Brisson, Computation of the Medial Axis Transform of 3-D Polyhedra
- For92 S. Fortune. Voronoi diagrams and Delaunay triangulations. In D.-Z. Du and F. K. Hwang, editors, Computing in Euclidian Geometry, pages 193-233. World Scientific, 1992.
- GD95 S. M. Gelston and D. Dutta. Boundary surface recovery from skeleton curves and surfaces. Computer Aided Geometric Design, 12(1):27-51, 1995.
- GP91 H. N. Gursoy and N. M. Patrikalakis. Automated interrogation and adaptive subdivision of shape using medial axis transform. Advances in Engineering Software and Workstations, 13(5/6):287-302, September/November 1991.
- GP92a H. N. Gursoy and N. M. Patrikalakis. An automated coarse and fine surface mesh generation scheme based on medial axis transform, part I: Algorithms. Engineering with Computers, 8(3): 121-137, 1992.
- GP92b H. N. Gursoy and N. M. Patrikalakis. An automated coarse and fine surface mesh generation scheme based on medial axis transform, part II: Implementation. Engineering with Computers, 8(4): 179-196, 1992.
- GS85 L. Guibas and J. Stolfi. Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi diagrams. ACM Transactions on Graphics, 4(2):74- 123, April 1985.
- Gur89 H. N. Gursoy. Shape Interrogation by Medial Axis Transform for Automated Analysis. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, November 1989.
- Habl Blum, Harry (1967). "A transformation for extracting new descriptors of shape". In Wathen-Dunn, Weiant (ed.). Models for the Perception of Speech and Visual Form (PDF). Cambridge, Massachusetts: MIT Press. pp. 362–380.
- Hof94 C. M. Hoffmann. How to construct the skeleton of CSG objects. In A. Bowyer and J. Davenport, editors, Proceedings of the Fourth IMA Conference, The Mathematics of Surfaces, University of Bath, UK, September 1990, New York, 1994. Oxford University Press.

- LBD+92 D. Lavender, A. Bowyer, J. Davenport, A. Wallis, and J. Woodwark. Voronoi diagrams of set-theoretic solid models. *IEEE Computer Graphics & Applications*, 12(5):69-77, 1992.
- Lee82 D. T. Lee. Medial axis transformation of a planar shape. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-4(4):363-369, July 1982.
- MacP O. Aichholzer, W. Aigner, F. Aurenhammer, T. Hackl, B. Juttler, M. Rabl, Medial Axis Computation for Planar Free-Form Shapes
- Mon69 U. Montanari. Continuous skeletons from digitized images. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 16(4):534-549, October 1969.
- Nac82 L. R. Nackman. Curvature relations in three-dimensional symmetric axes. *Computer Graphics and Image Processing*, 20:43-57, 1982.
- PG90 N. M. Patrikalakis and H. N. Gursoy, Shape interrogation by medial axis transform. In B. Ravani, editor, *Proceedings of the 16th ASME Design Automation Conference, Advances in Design Automation, Computer Aided and Computational Design*, Vol. 1, pages 77-88, Chicago, IL, September 1990. New York: ASME.
- Pre77 F. P. Preparata. The medial axis of a simple polygon. In G. Goos and J. Hartmanis, editors, *Lecture Notes in Computer Science: Mathematical Foundations of Computer Science*, pages 443-450. Springer-Verlag, 1977.
- RT94 J. M. Reddy and G. Turkiyyah, Computation of 3d skeletons by a generalized Delaunay triangulation technique. *Computer Aided Design*, October 1994. To appear.
- SGP93 A. Sudhalkar, L. Gursoz, and F. Prinz. Continuous skeletons of discrete objects, Montreal, Canada, May 1993. In J. Rossignac, J. Turner, and G. Allen, editors, *Proceedings of the Second Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 85-94, New York, 1993. ACM.
- SN87 V. Srinivasan and L. R. Nackman, Voronoi diagram for multiply connect polygonal domains, I: Algorithm. *IBM Journal of Research and Development*, 31(3):361-372, May 1987.
- Sug93 K. Sugihara. Approximation of generalized Voronoi diagrams by ordinary Voronoi diagrams. *Computer Vision, Graphics and Image Processing: Graphical Models and Image Processing*, 55(6):522-531, November 1993.
- Ver94 P. J. Vermeer. Medial Axis Transform to Boundary Representation Conversion. PhD thesis, Purdue University, May 1994.

Wo192

F.-E. Welter. Cut locus and medial axis in global shape interrogation and representation. *Computer Aided Geometric Design*, 1992. To appear. Also available as MIT Ocean Engineering Design Laboratory Memorandum 92-2, January 1992.