ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μαθηματικά Μοντέλα και Προσομοίωση του Ανταγωνισμού στους Εξοπλισμούς

Φοιτητής : Δημήτριος Αμανατίδης 3461

Επιβλέπων Καθηγητής : Χρήστος Αναστασίου

ΣΕΡΡΕΣ 2021

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εικόνες

Προσομοιώσεις

Διαγράμματα

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η έρευνα και η μελέτη συστημάτων, μαθηματικών μοντέλων και προσομοίωσης του ανταγωνισμού στους εξοπλισμούς. Γίνεται εκτενής ανάλυση των όρων του συστήματος και του μοντέλου. Δίνονται διάφορα παραδείγματα για την κατάταξη τους σε διαφορετικές κατηγορίες, και επισημαίνονται οι λόγοι που χρησιμοποιούνται τα μοντέλα συστημάτων από τους αναλυτές έναντι των ίδιων των συστημάτων.

Δίνεται ο ορισμός της προσομοίωσης, η οποία είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται για την ανάλυση και την εξαγωγή συμπερασμάτων, καθώς επίσης αναφέρονται και οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να φανεί χρήσιμη στους αναλυτές για την μελέτη μαθηματικών μοντέλων.

Γίνεται αναφορά στις μελέτες θεωρίας συγκρούσεων, και αναλύονται οι αναλυτικές προσεγγίσεις καθώς και οι περιοχές εφαρμογών αυτών. Στις περιοχές εφαρμογών βρίσκονται τα δύο μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για ανάλυση και μελέτη αυτής της εργασίας, τα μοντέλα ανταγωνισμού των εξοπλισμών.

Κατά τη διάρκεια του Α' Παγκοσμίου Πολέμου ο Lewis Fry Richardson (1881-1953) επιχείρησε να εφαρμόσει το μαθηματικό μοντέλο χρησιμοποιώντας δεδομένα των στρατιωτικών δαπανών εκείνης της εποχής, για να προβλέψει την πιθανότητα πολεμικής σύρραξης. Το μαθηματικό μοντέλο του Richardson βασίζεται σε ένα ζεύγος διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες εξηγούν την διαδικασία με την οποία δύο γειτονικά έθνη διαχειρίζονται τα έξοδα για τους στρατιωτικούς εξοπλισμούς τους συναρτήσει του χρόνου. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να γίνει πρόβλεψη του χρονικού σημείου εκκίνησης της πολεμικής σύγκρουσης. Παρόλα αυτά το μοντέλο μελετάται και εφαρμόζεται σε πληθώρα προβλημάτων, όπως τον ανταγωνισμό δύο εταιριών σε διάφορες αγορές, δύο είδη ζώων που προσπαθούν να επιβιώσουν στο οικοσύστημα που ανήκουν και σε άλλα πεδία.

Επίσης κατά τη διάρκεια του Α' Παγκοσμίου Πολέμου, ο F.W. Lanchester, ένας Βρετανός μηχανικός, σχεδίασε ένα μαθηματικό μοντέλο μάχης, το οποίο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο δύο δυνάμεις έρχονται αντιμέτωπες, καθώς και την έκβαση της μάχης αυτής. Είναι ευρύτερα γνωστό ως «οι νόμοι του Lanchester» και αποτελείται κι αυτό από ένα ζεύγος διαφορικών εξισώσεων, ένα για κάθε νόμο. Αποτελείται από τον τετραγωνικό και τον γραμμικό νόμο, και κάθε ένας από αυτούς μελετάει μια διαφορετική άποψη μιας μάχης.

Συνεπώς στην εργασία αυτή, θα μελετηθούν εκτενώς και τα δύο μοντέλα με τη μέθοδο της προσομοίωσης, και θα εξαχθούν διάφορα συμπεράσματα.

Εισαγωγή

Στις θετικές επιστήμες, προκειμένου να μελετηθεί ένα *σύστημα* επακριβώς, απαιτείται να είναι γνωστό εκ των προτέρων από ποια στοιχεία αποτελείται το σύστημα που είναι υπό μελέτη, όπως επίσης και η δυνατότητα να αναπαρασταθεί αυτό το σύστημα μέσω μαθηματικών *μοντέλων*. Επομένως, η διαδικασία αυτή θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί δύσκολη και επίπονη, καθώς στις περισσότερες περιπτώσεις τα συστήματα είναι αρκετά μεγάλα και πολύπλοκα έτσι ώστε να επιτευχθεί η διεξοδική μελέτη τους.

Για την εξαγωγή συμπερασμάτων και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς των συστημάτων, οι επιστήμονες των κλάδων της πληροφορικής και μαθηματικών βασίζονται σε συγκεκριμένες μεθοδολογίες οι οποίες αν και δεν είναι όσο ακριβείς όσο είναι οι μαθηματικές μέθοδοι, προσφέρουν ευελιξία και διάφορα άλλα πλεονεκτήματα. Η μοντελοποίηση και η προσομοίωση αυτών των συστημάτων είναι κάποιες από αυτές τις μεθόδους που δίνουν λύσεις. Χρησιμοποιούνται στην ουσία κάποιες μαθηματικές απεικονίσεις των συστημάτων γνωστές και ως μαθηματικά μοντέλα. Με τη βοήθεια της επιστήμης των υπολογιστών και την εξέλιξη τους τον τελευταίο μισό αιώνα, προγραμματιστές, αναλυτές συστημάτων, μαθηματικοί κ.α, χρησιμοποιώντας εξειδικευμένο λογισμικό, μπορούν να απεικονίσουν και να προβάλουν αυτά τα μοντέλα σε ψηφιακό περιβάλλον, να προσομοιάσουν τα μοντέλα που θέλουν, να 'παίξουν' με αυτά, και αναλύοντας τα, να εξάγουν συμπεράσματα.

Οι λόγοι για τους οποίους η προσομοίωση – σε επόμενο κεφάλαιο θα αναλυθεί εκτενώς τι καλείται προσομοίωση - είναι η ιδανική λύση στην μελέτη των συστημάτων, είναι διότι αποτελεί μια πειραματική μέθοδο που σκοπός της είναι η βελτιστοποίηση τους, η ανάλυση της ευαισθησίας τους και η μελέτη της λειτουργίας τους. Παρόλα αυτά, καθοριστικό ρόλο για την εγκυρότητα αυτής της μελέτης παίζει το μοντέλο του συστήματος στο οποίο βασιζόμαστε. Στα επόμενα κεφάλαια θα γίνει πλήρης αποσαφήνιση των εννοιών μοντέλου και συστήματος που χρησιμοποιούνται.

Αναλόγως με το σύστημα που μελετάται, διαφορετικοί παράμετροι λαμβάνονται υπόψη κάθε φορά για την εξαγωγή αξιόπιστων και πολύτιμων συμπερασμάτων. Κάθε φορά λοιπόν, που ορίζεται ένα πρόβλημα το οποίο απαιτεί την μελέτη ενός συστήματος, θα πρέπει να διευκρινίζεται τι ακριβώς αναζητείται να βρεθεί, να γίνονται οι σωστές υποθέσεις, να τεθούν σωστά οι παράμετροι, και έπειτα να αναλυθούν οι αντιδράσεις-αποκρίσεις του συστήματος κάθε φορά που μεταβάλλονται τα στοιχεία εισόδου στο σύστημα. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, είναι εύλογο κάθε φορά να απλοποιείται το μοντέλο του συστήματος ως ένα βαθμό, έτσι ώστε να μπορούν να εξαχθούν σημαντικά συμπεράσματα, να γίνεται ευκολότερη η διαχείριση του υπολογιστικού κόστους κάθε φορά και οι αποκλίσεις στα αποτελέσματα να είναι όσο το δυνατόν λιγότερες όσον αφορά τα σφάλματα τα οποία προκύπτουν (διότι σφάλματα προκύπτουν πάντα στον φυσικό κόσμο).

Συνεπώς, με τη βοήθεια μαθηματικών, λογικών ή συμβολικών σχέσεων ορίζονται κάποια μαθηματικά ή αναλυτικά μοντέλα - ο διαχωρισμός τους θα γίνει σε επόμενα κεφάλαια - τα οποία αποτελούν μια απλουστευμένη απεικόνιση του συστήματος που επρόκειτο να μελετηθεί, με αποτέλεσμα να καθορίζεται πολύ πιο εύκολα και με περισσότερη σαφήνεια από ότι ένα πραγματικό σύστημα.

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα εξηγήσουμε τι είναι η προσομοίωση. Επίσης, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε τους ορισμούς του συστήματος και του μοντέλου, να διαχωρίσουμε τις κατηγορίες αυτών, να αναφέρουμε κάποια απλά παραδείγματα έτσι ώστε να διευκολυνθεί η μελέτη μας στη συνέχεια που θα περιγράψουμε το μοντέλο του ανταγωνισμού των εξοπλισμών.

Προσομοίωση

Στις περισσότερες περιπτώσεις όπου ένα πολύπλοκο πρόβλημα χρήζει κάποιας εξήγησης και αναζητείται να βρεθεί μια λύση σε αυτό, είθισται να χρησιμοποιείται η γλώσσα των μαθηματικών. Παρόλα αυτά, κάποιες φορές δεν είναι εμφανές ή γνωστό ποιο είναι το πρόβλημα με αποτέλεσμα να μην μπορεί να ορισθεί με μαθηματικό τρόπο. Αυτό που μας απασχολεί σε τέτοιες περιπτώσεις είναι η μελέτη και η πρόβλεψη κάποιας κατάστασης στην πάροδο του χρόνου. Προκειμένου να μελετηθεί κάποια κατάσταση θα πρέπει να οριοθετήσουμε κάποια στοιχεία ενός αφηρημένου ή πραγματικού συστήματος σε ένα μοντέλο και να τα αναπαραστήσουμε συναρτήσει του χρόνου. Αυτός λοιπόν είναι και ο ορισμός της *προσομοίωσης*.

«Η προσομοίωση είναι μια μέθοδος μελέτης ενός συστήματος και εξοικείωσης με τα χαρακτηριστικά του με τη βοήθεια ενός άλλου συστήματος το οποίο στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ενας ηλεκτρονικός υπολογιστής». (Τεχνικές Προσομοίωσης, Μάνος Ρουμελιώτης)

Βασικό χαρακτηριστικό της μεθοδολογίας αυτής είναι η αποτύπωση ενός συστήματος με τη βοήθεια λογικών σχέσεων, διαγραμμάτων και προγραμμάτων στον υπολογιστή και εν τέλει της λήψης βέλτιστων αποφάσεων με την εκτέλεση πειραμάτων, τη δειγματοληψία και την ανάλυση δεδομένων. (https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/2489/1/02_chapter_1.pdf)

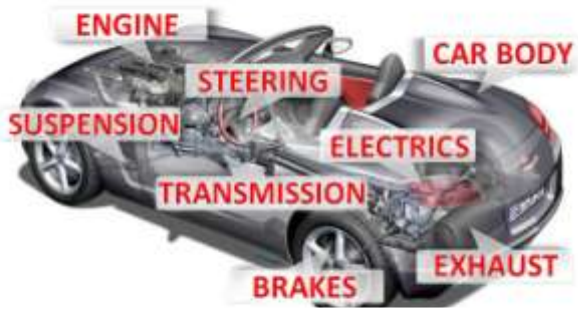
Οι προσομοιώσεις στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές είναι τεχνικές οι οποίες μελετούν πολύπλοκα μαθηματικά μοντέλα. Σε κάθε τομέα της επιστήμης υπάρχουν εφαρμογές προσομοίωσης στον υπολογιστή, από την κβαντική χημεία έως την μετεωρολογία, και από την παλαιοντολογία μέχρι την μελέτη της κίνησης των οχημάτων στους δρόμους. Οι προσομοιώσεις τυπικά ταξινομούνται σύμφωνα με τον αλγόριθμο τον οποίο επιλύουν. Για να είναι εφικτή η προσομοίωση, απαιτείται μια τεχνική η οποία μετατρέπει τις συνεχείς διαφορικές εξισώσεις σε αλγεβρικές εκφράσεις και τις αποδίδει ψηφιακά στον υπολογιστή, έτσι ώστε να μπορούν να τεθούν σε επεξεργασία από το περιβάλλον του. Η τεχνική αυτή ονομάζεται *διακριτοποίηση* ή κβαντισμός.(Winsberg, Eric (2003), Simulated Experiments: Methodology for a Virtual World)

Πολλές φορές ο όρος προσομοίωση συγχέεται με τον όρο εξομοίωση, τα οποία ως μεθοδολογίες είναι εντελώς διαφορετικές. Εξομοίωση είναι μια μέθοδος αναπαραγωγής ενός συστήματος εντός ή μέσω ενός άλλου συστήματος παρόμοιου με το πρώτο, συνήθως σε διαφορετική κλίμακα.

Συστήματα

Σε γενικές γραμμές είναι ευκολότερο να αναγνωριστεί ένα σύστημα, παρά να δοθεί ένας επεξηγηματικός και ξεκάθαρος ορισμός. Στις περισσότερες βιβλιογραφίες παρόλα αυτά, ο ορισμός του συστήματος δίνεται ως εξής: ***Σύστημα*** *είναι ένα σύνολο μερών, πραγμάτων ή στοιχείων τα οποία έχουν αλληλοσυσχετίσεις και συνεργάζονται μεταξύ τους για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου σκοπού ή μιας εργασίας.* (Τεχνικές Προσομοίωσης, Μάνος Ρουμελιώτης)

Ένα παράδειγμα ενός συστήματος είναι ένα αυτοκίνητο. Το σύνολο των στοιχείων ή μερών από τα οποία αποτελείται είναι η μηχανή του, το κυρίως σώμα του, οι αναρτήσεις του, οι ρόδες του, το τιμόνι, η εξάτμιση κ.ο.κ. Με την σειρά τους αυτά τα μέρη αποτελούν μικρότερα συστήματα, και αποκαλούνται υποσυστήματα. Υπάρχουν κάποιες αλληλοσυσχετίσεις και συνεργασίες μεταξύ αυτών των μερών για να επιτευχθεί ο απώτερος σκοπός του συστήματος του αυτοκινήτου, που είναι η μετακίνηση. Για παράδειγμα, στρίβοντας το τιμόνι, πυροδοτείται ο μηχανισμός ο οποίος κατευθύνει τις ρόδες προς την κατεύθυνση που στρίβουμε. Στην Εικόνα 2, βρίσκεται μία αποτύπωση ενός συστήματος αυτοκινήτου, αποτελούμενο από τα μέρη τα οποία απαρτίζεται. Αυτά συνεργάζονται μεταξύ τους και έχουν ως στόχο την κίνηση του αυτοκινήτου.



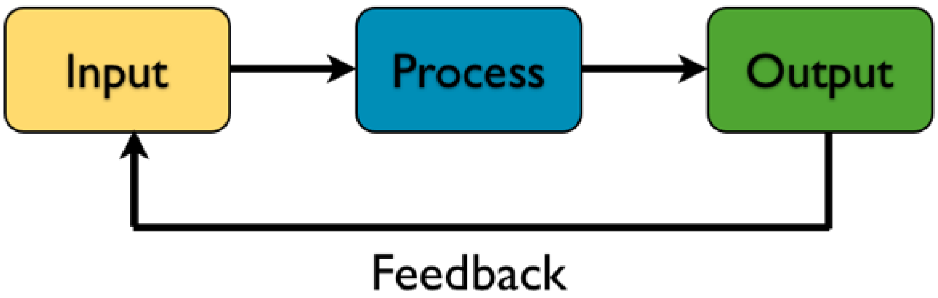
Εικόνα 2 – Το αυτοκίνητο ως σύστημα

Άλλο ένα παράδειγμα είναι ο ηλεκτρονικός υπολογιστής. Δεν υπάρχει κάποιο αυτόνομο τμήμα το οποίο ονομάζεται «υπολογιστής». Για την ακρίβεια, υπολογιστής θεωρείται το σύνολο των στοιχείων που τον απαρτίζουν, τα οποία λειτουργούν συλλογικά, για να φέρουν εις πέρας τον σκοπό τους. Η οθόνη, ο επεξεργαστής, η μνήμη του υπολογιστή είναι κάποια από τα στοιχεία που τον αποτελούν και συνεργάζονται μεταξύ τους για να παρέχουν τις υπηρεσίες τους στον χρήστη του ενιαίου αυτού συστήματος που ονομάζεται υπολογιστής. Τα μέρη του υπολογιστή που δεν είναι απαραίτητα για την απλή λειτουργία του ονομάζονται περιφερειακές συσκευές, και είναι κι αυτά με τη σειρά τους συστήματα τα οποία αποτελούνται από μικρότερα στοιχεία. Στην εικόνα 2, βλέπουμε τα μέρη από τα οποία αποτελείται ένας υπολογιστής. Σκεπτόμενοι αφαιρετικά θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι και ο υπολογιστής μπορεί να ανήκει σε ένα ευρύτερο και

Εικόνα 1 – Σύστημα ηλεκτρονικού υπολογιστή μεγαλύτερο σύστημα, σε ένα σύστημα τοπικού δικτύου υπολογιστών, κι έπειτα και το τοπικό δίκτυο μπορεί να ανήκει σε ένα μεγαλύτερο σύστημα, αυτό του διαδικτύου κ.ο.κ.

Συνεπώς, μπορούμε να καταλήξουμε πως οτιδήποτε μπορεί να αποτελεί ένα σύστημα, και πως για όλα τα συστήματα ισχύουν κάποια συγκεκριμένα κριτήρια που αναλύονται παρακάτω:

1. Κάθε σύστημα, είναι δομημένο έτσι ώστε τα στοιχεία που το απαρτίζουν να είναι μεταξύ τους συνδεδεμένα και να έχουν αλληλοεξαρτήσεις.
2. Ένα σύστημα, μπορεί ταυτόχρονα να αποτελεί μέρος ενός μεγαλύτερου συστήματος όπως επίσης να απαρτίζεται από διάφορα μικρότερα συστήματα. Ένα παράδειγμα είναι το πεπτικό σύστημα του ανθρώπου που είναι ένα στοιχείο του συστήματος του ανθρώπου ως οντότητα, ο οποίος με την σειρά του αποτελεί ένα στοιχείο του μεγαλύτερου συστήματος της κοινωνίας κ.ο.κ.
3. Σε κάθε σύστημα υπάρχουν είσοδοι, οι οποίες είναι εξωτερικές επιδράσεις και με μια εσωτερική διαδικασία κάθε σύστημα δημιουργεί κάποιες εξόδους-αποκρίσεις όπως φαίνεται και στην εικόνα 3. Σε αρκετά συστήματα, έπειτα από ανατροφοδότηση του συστήματος, οι έξοδοι του συστήματος μετατρέπονται σε νέες εισόδους στο σύστημα.
4. Τα μαθηματικά, οι λογικές και οι συμβολικές εκφράσεις αποτελούν εργαλείο στα χέρια των αναλυτών συστημάτων για να εκφράσουν τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός συστήματος.



Εικόνα 3 – Είσοδος – Επεξεργασία – Έξοδος μέσω ανατροφοδότησης

Οι βασικές εργασίες ενός αναλυτή συστημάτων είναι η ανάλυση αυτών και η δημιουργία νέων συστημάτων. Η εργασία της ανάλυσης ενός συστήματος περιλαμβάνει τις μετρήσεις που γίνονται, όταν είναι ήδη γνωστό το σύστημα το οποίο επρόκειτο να μελετηθεί, και ελέγχεται η λειτουργία του, η ευαισθησία του, η εγκυρότητα του κλπ. Ελέγχοντας τις εισόδους ενός συστήματος, και βλέποντας τις αποκρίσεις ή εξόδους του, μπορούμε να βγάλουμε τα παραπάνω συμπεράσματα και όχι μόνο. Άλλη μια εργασία ενός αναλυτή, είναι η δημιουργία ή η σύνθεση ενός συστήματος. Με αυτό τον τρόπο, ο αναλυτής καθορίζει τα στοιχεία που απαρτίζουν το σύστημα, τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις και συμπεριφορές, έτσι ώστε να παράγει τις εξόδους που θέλει όταν δοθούν συγκεκριμένες είσοδοι.

Μέρη του συστήματος

Κάθε σύστημα λοιπόν, αποτελείται από διάφορα μέρη ή στοιχεία, όπως ειπώθηκε παραπάνω. Πως διαχωρίζονται όμως αυτά και τι κοινό έχουν μεταξύ τους;

Στην επιστήμη της πληροφορικής και συγκεκριμένα στον σχεδιασμό συστημάτων, τα μέρη αυτά των συστημάτων καλούνται *οντότητες*. Κάθε οντότητα διακρίνεται από μια άλλη με βάση τα *χαρακτηριστικά* της. Επίσης κάθε οντότητα έχει τη δυνατότητα να φέρει εις πέρας συγκεκριμένες εργασίες, και ονομάζονται *δραστηριότητες*.

Ένα άλλο σημαντικό στοιχείο ενός συστήματος είναι η ίδια του η κατάσταση. Η κατάσταση ενός συστήματος είναι ένα δυναμικό στοιχείο που περιγράφεται από τις οντότητες που απαρτίζουν το σύστημα, τα χαρακτηριστικά τους και τις δραστηριότητες τους, σε μια χρονική στιγμή t. Οπότε είναι φυσικό επακόλουθο, να μεταβάλλεται διαρκώς. Η προσομοίωση των συστημάτων έχει ως στόχο την μελέτη της κατάστασης του συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή t, τον τρόπο με τον οποίο αυτή μεταβάλλεται στο χρόνο, και έπειτα να προβλέψει κάποιες καταστάσεις. Αυτό βέβαια, εξαρτάται από τους παράγοντες του συστήματος, δηλαδή τα στοιχεία του, και το πως αυτά διαμορφώνονται στην πάροδο του χρόνου, και από τις εισόδους που δέχεται το σύστημα.

Οι δραστηριότητες που φέρουν εις πέρας οι οντότητες ενός συστήματος, είναι είτε ενδογενείς, δηλαδή συμβαίνουν εντός του συστήματος ή παράγονται μέσα σε αυτό είτε είναι εξωγενείς, και εκτελούνται στο περιβάλλον του συστήματος, δηλαδή έξω από αυτό. Παρόλα αυτά, είτε είναι ενδογενείς είτε εξωγενείς οι δραστηριότητες αυτές επηρεάζουν το σύστημα και αλλάζουν την κατάσταση του μέσα στην πάροδο του χρόνου.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των δραστηριοτήτων που λαμβάνουν χώρα σε ένα σύστημα, είναι πως το αποτέλεσμα αυτών κάποιες φορές μπορεί να προβλεφθεί, μελετώντας τις εισόδους του συστήματος, και κάποιες άλλες δεν υπάρχει αυτή η δυνατότητα και είναι τυχαία. Για αυτό και διαχωρίζονται σε *αιτιοκρατικές* και *στοχαστικές* δραστηριότητες αντίστοιχα. (Τεχνικές Προσομοίωσης, ΜάνοςΡουμελιώτης)

Κάθε σύστημα που αποτελείται από οντότητες και συσχετίσεις, μπορεί να παρατηρηθεί και να περιγραφεί από διαφορετικά σημεία. Επομένως, ορισμένα χαρακτηριστικά ή ιδιότητες των στοιχείων ή συσχετίσεων τους έρχονται στην επιφάνεια. Κάθε περιγραφή καλείται μια άποψη του συστήματος. Για αυτόν τον λόγο, είναι σημαντικό να κατανοούμε πλήρως την θέση από την οποία βρισκόμαστε όταν καλούμαστε να μελετήσουμε ένα σύστημα, μιας και τα συμπεράσματα μας μπορεί να μην είναι πάντοτε ξεκάθαρα. Επομένως, θα ήταν περισσότερο εύστοχο να διεξάγουμε όσο το δυνατόν πιο σωστά την μελέτη που θέλουμε λαμβάνοντας υπόψη ότι η θέση μας, παίζει σημαντικό ρόλο στα αποτελέσματα μας. (Haberfellner, R., de Weck, O., Fricke, E., & Vössner, S. (2019). *Systems Engineering.)*

Μοντέλα Συστημάτων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τι είναι ένα σύστημα, τα στοιχεία από τα οποία απαρτίζεται και δώσαμε κάποια παραδείγματα συστημάτων για να γίνει περισσότερο κατανοητό. Όταν όμως καλούμαστε να μελετήσουμε ένα σύστημα με μαθηματικές μεθόδους είτε με προσομοίωση, αυτό που μελετάμε δεν είναι το ίδιο το σύστημα, αλλά ένα *μοντέλο* του συστήματος.

Θα αναλύσουμε στο κεφάλαιο αυτό τους λόγους κατασκευής ενός μοντέλου, τους τύπους μοντέλων που υπάρχουν, θα δώσουμε επίσης κάποια παραδείγματα και θα δοθεί ο ορισμός του μοντέλου.

Μοντέλο είναι μία αναπαράσταση ενός φυσικού συστήματος ή οργανισμού ή φυσικού φαινομένου ή ακόμη και μιας ιδέας. (Τεχνικές Προσομοίωσης – Σ. Σουράβλας & Μ. Ρουμελιώτης)

Τα μοντέλα είναι αφαιρέσεις και απλοποιήσεις της πραγματικότητας και για αυτό το λόγο αποκαλύπτουν μόνο μεροληπτικές όψεις. Συνεπώς, είναι σημαντικό τα μοντέλα να είναι επαρκώς βαρυσήμαντα όσον αφορά την κατάσταση και τον ορισμό του προβλήματος. Αυτό σημαίνει ότι το ζήτημα της χρησιμότητας και η σύνδεση με το πρόβλημα θα πρέπει να είναι μέρος όλων των σκέψεων.

Οι λόγοι για τους οποίους η κατασκευή ενός μοντέλου είναι απαραίτητη όταν πρόκειται να μελετηθεί ένα σύστημα, είναι αρκετοί. Παρακάτω παραθέτονται μερικοί από αυτούς.

Λόγοι κατασκευής ενός μοντέλου

Όταν ένα μοντέλο φτιάχνεται για ένα σύστημα, πολλές από τις παραμέτρους του πραγματικού συστήματος που είναι ύπο μελέτη, αγνοούνται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να επικεντρώνεται η εστίαση στις παραμέτρους του συστήματος που θεωρούνται περισσότερο σημαντικές, και να μην αναλώνεται ο αναλυτής σε λεπτομέρειες που δεν του είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την μελέτη που διεξάγει.

Στην περιγραφή συστημάτων, συνήθως υπάρχει πρόβλημα στην επικοινωνία των δυο άκρων. Για αυτόν ακριβώς το λόγο η κατασκεύη ενός μοντέλου, είναι επιτακτική ανάγκη η οποία καθιστά πολύ πιο εύκολη την επικοινωνία. Παράδειγμα αποτελεί μια μακέτα που κατασκευάζει ένας αρχιτέκτονας και δίνει ακριβώς όσες πληροφορίες χρειάζεται χωρίς να αναλώνεται σε αρχιτεκτονικά σχέδια που δεν γίνονται άμεσα αντιληπτά από κάποιον πελάτη που δεν διαθέτει εξειδικευμένες γνώσεις.

Για να προβλεφθεί η κατάσταση ενός πραγματικού συστήματος, το οποίο μεταβάλλεται αργά στο χρόνο – δηλαδή τα περισσότερα συστήματα – απαιτείται η κατασκευή ενός μοντέλου, που θα επιταχύνει αυτή τη διαδικασία. Με αυτό τον τρόπο είναι ευκολότερο να διεξαχθεί μια μελέτη και να μπορέσουν να προβλεφθούν καταστάσεις στις οποίες θα βρεθεί το πραγματικό σύστημα μελλοντικά.

Όσον αφορά τη σχεδίαση ενός συστήματος, απαιτείται η δημιουργία ενός μοντέλου, έτσι ώστε να εντοπισθούν λάθη πριν ξεκινήσει η κατασκεύη του πραγματικού συστήματος. Με αυτό τον τρόπο, μειώνονται οι πιθανότητες για λάθη τα οποία κοστίζουν και χρήματα και χρόνο. Για το ίδιο σύστημα, θα ήταν εφικτό να κατασκευασθούν άνω του ενός μοντέλα, κι έπειτα να αποφασισθεί ποιο από όλα τα μοντέλα, είναι καταλληλότερο για την κατασκεύη του πραγματικού συστήματος.

Ένα μοντέλο αποτελεί εργαλείο στα χέρια των αναλυτών. Εκτός αυτού όμως, μπορεί να αποτελέσει και ένα προϊόν εκπαίδευσης για τους εν δυνάμει χειριστές του συστήματος που είτε υπάρχει, είτε θα κατασκευασθεί αργότερα. Με αυτό τον τρόπο, αποφεύγονται λάθη των χειριστών πάνω σε ένα σύστημα και τους βοηθά να αποκτήσουν βασικές γνώσεις πριν εργασθούν πάνω στο πραγματικό σύστημα, χωρίς να διατρέχουν ιδιαίτερο κίνδυνο ούτε οι ίδιοι, ούτε και το σύστημα.

Για ένα σύστημα που ήδη υπάρχει και μεταβάλλεται μέσα στο χρόνο, η κατασκευή ενός μοντέλου φαντάζει ιδανική λύση για την βελτίωση του μιας και ένα μοντέλο μπορεί να περιγραφεί, όπως είπαμε και παραπάνω, από τις παραμέτρους που είναι χρήσιμες και αποτελούν το αντικείμενο της μελέτης.

Συνεπώς, κάθε φορά που σχεδιάζεται ένα μοντέλο θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ότι το μοντέλο είναι μια αφαιρετική απεικόνιση του συστήματος, και όχι το ίδιο το σύστημα. Θα πρέπει να βρεθεί η χρυσή τομή στην προτίμηση των στοιχείων που επιλέγονται να ληφθούν υπόψη στο μοντέλο του συστήματος, έτσι ώστε να μην υπερβαίνουν το όριο και κάνουν την μελέτη πολύπλοκη και δυσμενή, αλλά ούτε και να είναι υπερβολικά απλοϊκά και η μελέτη τους να οδηγεί σε λάθος συμπεράσματα. Αυτοί λοιπόν είναι κάποιοι βασικοί λόγοι για την κατασκευή ενός μοντέλου συστήματος.

Τύποι Μοντέλων

Εφόσον έχει ξεκαθαριστεί πλέον η έννοια του μοντέλου, μπορούμε να μελετήσουμε τους τύπους των μοντέλων που υπάρχουν στη γενική τους μορφή. Οι δυο βασικοί τύποι μοντέλων που υπάρχουν είναι τα *φυσικά* και τα *μαθηματικά* μοντέλα. Από την ονοματοδοσία τους και μόνο θα καταλάβαινε κανείς ότι όταν μιλάμε για φυσικό μοντέλο εννοούμε κάτι χειροπιαστό, παράδειγμα αποτελούν τα μικρά βενζινοκίνητα αυτοκίνητα, όπως επίσης και τα ιατρικά ομοιώματα που συναντάμε στις αίθουσες βιολογίας συνήθως. Τα φυσικά όπως επίσης και τα μαθηματικά μοντέλα, διακρίνονται σε *στατικά* και *δυναμικά*. Ένα φυσικό δυναμικό μοντέλο αποτελεί το παράδειγμα του μικρού βενζινοκίνητου αυτοκινήτου, μιας και αναπαριστά ένα πραγματικό όχημα και μπορούν να επέλθουν μεταβολές επάνω του. Αντιθέτως, ένα ιατρικό ομοίωμα αποτελεί ένα φυσικό στατικό μοντέλο διότι απλώς μας υποδεικνύει τα όργανα από τα οποία αποτελείται ένα ανθρώπινο σώμα και ως εκ τούτου, δεν μεταβάλλεται. Σε αντίθεση με τα φυσικά μοντέλα, τα μαθηματικά μοντέλα αποτελούνται από μαθηματικές έννοιες, σύμβολα και εκφράσεις που περιγράφουν τις φυσικές ιδιότητες ενός συστήματος (σχήμα, μέγεθος, χρώμα, κλπ), τις λειτουργίες του(κίνηση, αλλαγή σχήματος, αλλαγές της κατάστασης, κλπ) όπως επίσης και τις σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία του συστήματος. Υλοποιώντας ένα μαθηματικό μοντέλο, αρχικά θα πρέπει να απλουστεύουμε την πραγματικότητα, και μπορούμε να αγνοήσουμε κάποιες πλευρές κι άλλες να τις θεωρήσουμε πιο απλές από ότι είναι. Κατορθώνουμε έτσι να επικεντρωθούμε στις λεπτομέρειες που μας απασχολούν περισσότερο, αποφεύγοντας πολυπλοκότητες που οδηγούν σε δυσχέρειες στη λύση του προβήματος. Τα μαθηματικά μοντέλα, εκφράζονται με τη βοήθεια μαθηματικών εξισώσεων. Αυτό όμως δεν αποτελεί μονόδρομο, μιας και τα διαγράμματα ροής ή οι πίνακες τιμών μπορούν να αναπαραστήσουν ένα μαθηματικό μοντέλο.

Όπως και τα φυσικά μοντέλα, έτσι και τα μαθηματικά μοντέλα διακρίνονται σε *στατικά* και *δυναμικά*. Όταν ένα μοντέλο παραμένει αμετάβλητο στην πάροδο του χρόνου, είναι *στατικό*. Όταν όμως επηρεάζεται από χρονικούς παράγοντες, τότε είναι *δυναμικό*.

Τα μαθηματικά μοντέλα επίσης διακρίνονται σε αναλυτικά ή αριθμητικά. Όταν υπάρχει ένα πλήρες σύνολο εξισώσεων που περιγράφει το σύστημα έχουμε ένα αναλυτικό μοντέλο. Αντιθέτως όταν δεν υπάρχουν μαθηματικές εξισώσεις για να περιγράψουν το σύστημα, τότε περιγράφεται από αριθμητικά δεδομένα τα οποία συλλέγονται εμπειρικά και συνεπώς καλείται αριθμητικό.

Μελέτες Θεωρίας Συγκρούσεων

Οι μελέτες της θεωρίας συγκρούσεων, είναι μελέτες οι οποίες ασχολούνται με τις συγκρούσεις ανάμεσα σε δύο ή περισσότερους παράγοντες ή συντελεστές ή τον πόλεμο, χρησιμοποιώντας κοινή λογική ή μαθηματικές προσεγγίσεις και διαβαθμίζονται σε 8 διαφορετικές προσεγγίσεις και πρακτικά εφαρμόζονται σε 8 περιοχές εφαρμογών. Δεν είναι οι μοναδικές προσεγγίσεις οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην μελέτη τέτοιων συγκρούσεων, αλλά είναι ευρέως διαδεδομένοι και συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται συχνά στις περισσότερες έρευνες ή μελέτες.

Αναλυτικές Προσεγγίσεις

Παρακάτω αναλύονται και περιγράφονται οκτώ διαφορετικές προσεγγίσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί στην μελέτη των συγκρούσεων.

1. **Διαφορικές Εξισώσεις:**
   - Χρησιμοποιούνται μόνες τους είτε από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων για να αναπαραστήσουν φαινόμενα τα οποία μεταβάλλονται στη πάροδο του χρόνου. Είναι από τις προσεγγίσεις οι οποίες χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο στις φυσικές επιστήμες, αλλά χρησιμοποιούνται επίσης και στην θεωρία των συγκρούσεων. Ένα καλό παράδειγμα είναι το **μοντέλο του Richardson**, το οποίο αποτελείται από 2 διαφορικές εξισώσεις και είναι το κυρίως θέμα μελέτης αυτής της εργασίας.
2. **Θεωρία των αποφάσεων/ Θεωρία Ελέγχου:**
   - Μια επίσημη προσέγγιση στη μελέτη όπου ένας ρόλος καλείται να λάβει μια απόφαση και να επιλέξει την καλύτερη δυνατή επιλογή από μια λίστα διαθέσιμων επιλογών έτσι ώστε να έχει το βέλτιστο όφελος είτε πρόκειται για στατικό περιβάλλον για τη θεωρία αποφάσεων, είτε πρόκειται στην πάροδο του χρόνου για τη θεωρία ελέγχου.
3. **Θεωρία παιγνίων:**
   - Διαδραματίζεται ανάμεσα σε δύο ή περισσότερα άτομα το καθένα από τα οποία οδηγείται σε μια απόφαση από ένα σύνολο διαθέσιμων διαφορετικών επιλογών έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το όφελος του αποτελέσματος. Ο ανταγωνισμός και η συνεργασία παίζουν καθοριστικό ρόλο διότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τις επιλογές του ενός ατόμου αποκλειστικά, αλλά και από τις επιλογές του άλλου.

4. **Θεωρία προσφορών:**
    - Αναλύει την αλληλεπίδραση δύο παραγόντων οι οποίοι μπορούν να αποκτήσουν κάποιο κέρδος μόνο στην περίπτωση που έρθουν σε συμφωνία για το πώς θα διαιρεθεί αυτό το κέρδος ή στην περίπτωση που αποτύχει η συμφωνία, ποιος θα βρεθεί στο σημείο να δεχτεί την χειρότερη για αυτόν συμφωνία. Συνεπώς, το πρόβλημα βρίσκεται στην προσπάθεια να φτάσουν σε μια συμφωνία όπου αυτή θα εξυπηρετεί και τους δύο, αλλά οι όροι της συμφωνίας δεν ικανοποιούν πάντα και τους δύο συντελεστές.
5. **Αβεβαιότητα:**
    - Ένας ξεκάθαρος λόγος ότι οι συνέπειες των πράξεων δεν είναι σίγουρες, αλλά εξαρτώνται από τις πράξεις ενός άλλου συντελεστή ή εξωτερικών γεγονότων τα οποία έχουν άγνωστες πιθανότητες.
6. **Θεωρία Σταθερότητας:**
    - Καθορίζει την ευστάθεια ή την αστάθεια ενός συστήματος. Το πρόβλημα της ευστάθειας συγκεκριμένα καθορίζεται από το εάν ένα σύστημα επιστρέφει σε ισορροπία έπειτα από διάφορες εναλλαγές που μπορεί να έχει και αποκλίσεις από την αρχική ισορροπία. Ένα σύστημα είναι ευσταθές, όταν μικρές αλλαγές οδηγούν σε διάφορες καταστάσεις το σύστημα, κι έπειτα επιστρέφει στην αρχική του ισορροπία. Στην αντίθετη περίπτωση ένα σύστημα είναι ασταθές.
7. **Μοντέλα Δράσης – Αντίδρασης:**
    - Αναλύουν την αλληλεπίδραση μεταξύ οντοτήτων και συγκεκριμένα την αντίδραση μιας οντότητας στις δράσεις της άλλης.
8. **Οργανωτική Θεωρία:**
    - Επιχειρεί να περιγράψει, να κατανοήσει και να προβλέψει την συμπεριφορά των οργανισμών, συμπεριλαμβανομένου των γραφειοκρατικών μηχανισμών και την συμπεριφορά των ατόμων σε τέτοιου είδους οργανισμούς.

Οι παραπάνω αναλυτικές προσεγγίσεις έχουν χρησιμοποιηθεί για την μελέτη της θεωρίας των συγκρούσεων. Σε αρκετές μελέτες έχουν χρησιμοποιηθεί συνδυασμοί δύο ή περισσοτέρων προσεγγίσεων, όπως επίσης θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και άλλες προσεγγίσεις. Παρόλα αυτά οι παραπάνω οκτώ προσεγγίσεις προσφέρουν σύντομη, περιεκτική και χρήσιμη ταξινόμηση των εναλλακτικών προσεγγίσεων οι οποίοι έχουν χρησιμοποιηθεί για την μελέτη των θεωριών της σύγκρουσης.

Περιοχές Εφαρμογών

1. **Μοντέλα Ανταγωνισμού των εξοπλισμών:**
    - Αναφέρονται ως η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο ή περισσοτέρων χωρών που ανταγωνίζονται στην απόκτηση στρατιωτικού εξοπλισμού και όπλων. Οι αιτίες μπορεί να είναι εξωγενείς, να βασίζονται δηλαδή στα γειτονικά έθνη και πως αυτά εξοπλίζονται, ή να είναι ενδογενείς, παρακινούμενοι από την πολιτική του κράτους, τα οικονομικά, από μίσος των λαών και άλλοι λόγοι.
2. **Εκκίνηση πολεμικής σύγκρουσης/ Λήξη πολεμικής σύγκρουσης/Διάρκεια σύγκρουσης:**
    - Αναφέρεται στους παράγοντες οι οποίοι επιταχύνουν ή λήγουν έναν πόλεμο ή μια διαμάχη. Όπως και στην περίπτωση των ανταγωνισμού των εξοπλισμών, οι αιτίες ποικοίλουν και μπορούν να είναι είτε ενδογενείς, είτε εξωγενείς.
3. **Στρατιωτικές στρατηγικές/Συμπεριφορά στον πόλεμο:**
    - Αναφέρεται στις αποφάσεις τις οποίες λαμβάνονται από τα έθνη κατά τη διάρκεια του πολέμου. Οι αποφάσεις που παίρνονται αφορούν τους στόχους που θέτονται από τα έθνη, από τα όπλα και τα πυρά που θα χρησιμοποιηθούν εναντίον του αντίπαλου έθνους.
4. **Απειλές/Κρίσεις/Κλιμάκωση:**
    - Αναφέρεται στις καταστάσεις τις οποίες τα έθνη αλληλοαπειλούνται, ή προβαίνουν σε δράσεις οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε περισσότερο επικίνδυνες καταστάσεις, σε πόλεμο, ή ποιοτικά σε κάποιο διαφορετικό είδος πολέμου.
5. **Διαχείριση εξοπλισμών:**
    - Αναφέρεται στις αλλαγές των εξοπλισμών όσον αφορά τους τύπους των όπλων που αναπτύσσονται ή χρησιμοποιούνται ή αλλαγές σχετικά με τα συστήματα των όπλων όπου θα μπορούσαν να ελαττώσουν την πιθανότητα πολέμου ή να αμβλύνουν τις συνέπειες τους.
6. **Συμμαχίες:**
    - Αναφέρεται στους λόγους τους οποίους προβαίνουν οι χώρες σε συμμαχίες και τις συνέπειες που έχουν οι συμφωνίες μεταξύ τους.
7. **Ταχεία εξάπλωση των πυρηνικών:**
    - Αναφέρεται στους λόγους και στις συνέπειες που έχει η απόκτηση πυρηνικών όπλων από επιπλέον χώρες.
8. **Αμυντικές πολιτικές:**
    - Αναφέρεται στους οργανισμούς οι οποίοι είναι υπεύθυνοι για τον αμυντικό σχεδιασμό,την υλοποίηση, και την πολιτική και οικονομική συμπεριφορά της χώρας.

Τα μοντέλα του ανταγωνισμού των εξοπλισμών

Η απαρχή των μοντέλων του ανταγωνισμού των εξοπλισμών εμφανίζεται λίγο πριν ξεσπάσει ο Α’ Παγκόσμιος Πόλεμος στη δουλειά του Lewis F. Richardson. Δεν είχαν γίνει βέβαια ευρέως διαδεδομένα πριν το άρθρο του Anatol Rapoport(1957) και την μεταθανάτια δημοσίευση του Lewis F. Richardson “Arms and Insecurities”.

Τι είδους πληροφορίες παρέχονται όμως, και ποιο σκοπό έχει αυτό το μαθηματικό μοντέλο; Η αξία του δεν εξαρτάται απαραιτήτως από το πόσο ακριβές είναι ή όχι, ούτε απο την αυστηρότητα του και τα ρεαλιστικά αποτελέσματα που παρέχει. Η αξία του έγκειται στη χρησιμότητα του, η οποία εξαρτάται απο διάφορες παραμέτρους κάθε φορά. Οι κύριες περιπτώσεις που παρατηρείται χρησιμότητα αυτού του μοντέλου είναι τρεις:

Αρχικά μπορεί να περιγράψει την αληθινή πολυκλοκότητα του ανταγωνισμού στους εξοπλισμούς. Περιγράφει και αναπαριστά έναν συνοπτικό σκελετό για το πως σκεφτόταν ο Richardson ένα τόσο πολύπλοκο σύστημα.

Δεύτερον, το μοντέλο του ανταγωνισμού στους εξοπλισμούς είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τον κάθε αναλυτή που θέλει να καταλάβει και να προβλέψει την πολύπλοκη πραγματικότητα της ανταγωνιστικότητας. Ιδανικά θα θέλαμε το μοντέλο να μπορεί να μας δώσει απαντήσεις σε ερωτήματα, όπως:

1. Εάν οι ΗΠΑ εξοπλισθεί με αμυντικά συστήματα βαλλιστικών πυραύλων, πώς θα αντιδράσει η Σοβιετική Ένωση και γιατί;
2. Εάν αυξηθεί η βοήθεια προς τους πολίτες του Πακιστάν, πως αυτό θα επηρεάσει την αμυντική θωράκιση της Ινδίας και γιατί;
3. Πότε οι εκδικητικές απειλές είναι αξιόπιστο μέτρο αποτροπής, και πως αυτό επηρεάζει την «κούρσα» του ανταγωνισμού στους εξοπλισμούς;
4. Ποια θα είναι η απώλεια, αν αισθάνεσαι 50% σίγουρος (αντί να είσαι βέβαιος), ότι ο αντίπαλος δεν έχει περισσότερους απο Χ πυραύλους;
5. Με ποιόν τρόπο μπορεί ένα έθνος να επανορθώσει για την αβεβαιότητα του περισσότερο αποτελεσματικά;
6. Γιατί η αντίδραση του έθνους J αποτελεί συντελεστή k αντί κάποιου άλλου επιπέδου;

Τρίτον, τα μοντέλα ανταγωνισμού των εξοπλισμών είναι χρήσιμα εάν μπορούν να παρέχουν κάποιες συμβουλές έτσι ώστε να επέλθει ένα επιθυμητό τέλος. Οι περισσότεροι αναλυτές θα συμφωνούσαν ότι οι ανταγωνισμοί στους εξοπλισμούς είναι δαπανηροί και μερικές φορές, ακόμη κι επικίνδυνοι. Τα περισσότερα μοντέλα εξοπλισμών καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι τα έθνη θα πρέπει να κάνουν ομαδικές προσπάθειες για να ελαττώσουν ή να απαλείψουν εντελώς τις αρνητικές πλευρές του ανταγωνισμού αυτού. Πέρα από αυτό ωστόσο, τα περισσότερα μοντέλα εξοπλισμών δεν συνηθίζουν να αποβάλλουν την ιδέα συγκεκριμένης πολιτικής για την μείωση του κόστους και την επικινδυνότητα τους. Οι αναλυτές του ανταγωνισμού των εξοπλισμών οι οποίοι χρησιμοποιούν τα μοντέλα τους έτσι ώστε να δώσουν συγκεκριμένες οδηγίες πολιτικής, σπανίως βασίζονται σε μοντέλα τύπου Richardson στην εργασία τους, ενδεχομένως επειδή δεν είναι τόσο χρήσιμα για τη δουλειά αυτή. Αντί αυτού, οι αναλυτές χρησιμοποιούν μοντέλα τα οποία στοχεύουν στη στρατηγική και στη συνολική συμπεριφορά των μελών που εμπλέκονται στον ανταγωνισμό των εξοπλισμών. Για παράδειγμα, Intriligator & Brito(1985) και McGuire(1965:κεφ.7) κάνουν συγκεκριμένες συστάσεις που αφορούν τους εξοπλισμούς, βασιζόμενοι στα μοντέλα τους.

Η περιγραφή, η ανακεφαλαίωση, η κατανόηση, οι προβλέψεις και οι συμβουλές είναι οι κύριες αρμοδιότητες ενός αναλυτή ο οποίος ασχολείται με την μελέτη των μοντέλων του ανταγωνισμού στους εξοπλισμούς. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι ένα χρήσιμο εργαλείο το οποίο βοηθά τον αναλυτή στο να πετύχει αυτά που προαναφέρθηκαν παραπάνω. Υπάρχουν διαφορετικοί τύποι μοντελοποίησης και προσέγγισης που είναι διαθέσιμοι στους ερευνητές. Τα μοντέλα τύπου Richardson, έχουν σχετικό πλεονέκτημα στην περιγραφή και στην σύνοψη του ανταγωνισμού στους εξοπλισμούς. Είναι εργαλεία «πρώτης κοπής». Για περισσότερη όμως κατανόηση, πρόβλεψη και συμβουλές, είναι συχνό συμβάν τα μοντέλα τύπου Richardson να έχουν σχετικό μειονέκτημα σε σύγκριση με άλλα μοντέλα τα οποία στοχεύουν στη συνολική συμπεριφορά και στην στρατηγική μελέτη. Τότε, προτιμούνται τέτοιου είδους μοντέλα ανταγωνισμού των εξοπλισμών.
(Anderton, 1989).

Στο υπόλοιπο αυτής της εργασίας, παρουσιάζονται 2 διαφορετικά μοντέλα, το μοντέλο του ανταγωνισμού των εξοπλισμών του Richardson ή Richardson’s Arms Races Model όπως είναι γνωστό στην αγγλική γλώσσα, και το μοντέλο μάχης του Lanchester. Θα γίνει μελέτη αυτών των μοντέλων καθώς και ανάλυση των αποτελεσμάτων τους, με χρήση της μεθόδου της προσομοίωσης.

Το πρόγραμμα ανοιχτού λογισμικού που θα χρησιμοποιηθεί ονομάζεται **Scilab** και είναι εφάμμιλο του προγράμματος **Matlab**. Αντίστοιχα το εργαλείο **Xcos** του **Scilab** έχει παρόμοιες λειτουργείες όπως το **Simulink** του **Matlab**. Οι λειτουργίες της σχεδίασης και της αναπαράστασης της προσομοίωσης θα δημιουργηθούν με το εργαλείο **Xcos**.

Richardson Arms Race Model

Το μαθηματικό μοντέλο του ανταγωνισμού στους εξοπλισμούς είναι ένα μοντέλο που βασίζεται σε δυο διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες αναπαριστούν την αύξηση ή την μείωση των εξοπλισμών στις τάξεις των ενόπλων δυνάμεων των χωρών. Η υπόθεση αυτή του Richardson αναπαριστά ένα φαινόμενο δράσης-αντίδρασης, με τις δύο χώρες να κινούνται να αποκτήσουν εναλλάξ, περισσότερο εξοπλισμό, όταν η αντίπαλη χώρα εξοπλίζεται, και να μειώνουν τον εξοπλισμό τους, όταν συμβαίνει το αντίθετο.

Οι περιπτώσεις που αυτό συμβαίνει, σύμφωνα με τον Richardson είναι τρεις:

α) Η χώρα Α ξεκινάει να εξοπλίζεται έχοντας φόβο ότι η χώρα Β προετοιμάζεται και έχει περισσότερο στρατιωτικό εξοπλισμό. Κατά αυτό τον τρόπο η χώρα Α προσπαθεί να φτάσει τον εξοπλισμό της χώρας Β ή, και να τον ξεπεράσει σε μέγεθος.

β) Οι οικονομικές επιβαρύνσεις δεν επιτρέπουν στη χώρα να συνεχίζει να εξοπλίζεται κι αυτό αποτελεί εμπόδιο σε επιπλέον έξοδα της εκάστοτε χώρας. Ως αποτέλεσμα επέρχεται η μείωση του εξοπλισμού.

γ) Αντιπαλότητες μεταξύ των χωρών, φιλοδοξίες για μεγαλύτερα κράτη-έθνη και τάσεις εκδίκησης για παλαιότερες συγκρούσεις οδηγούν τις χώρες σε σταθερή αύξηση του εξοπλισμού τους, καθώς έτσι δεν γίνεται έντονα αισθητή η απειλή από άλλα κράτη.

Ο Richardson στην υπόθεση αυτή, έχει παραβλέψει την παραδοσιακή οπτική του ρητού "η κότα έκανε το αυγό, ή το αυγό την κότα;". Δεν δίνεται σημασία στο τι έρχεται πρώτο, οι αυξήσεις στους εξοπλισμούς ή οι εντάσεις που οδηγούν εκεί. Συμπεριλαμβάνει και τις δύο παραμέτρους στο μοντέλο του και περιμένει να δει τις συνέπειες τις οποίες θα έχει για το σύστημα. Μαζί με αυτές τις παραμέτρους, οι οποίες συμπεριλαμβάνουν κίνητρα για την αύξηση των εξοπλισμών, έχει συμπεριλάβει και τον περιοριστικό παράγοντα της οικονομικής επιβάρυνσης που έχει η συντήρηση των ήδη υπαρχόντων στρατιωτικών εξοπλισμών ή δυνάμεων.

Αυτή η θεωρία του Richardson, δεν καλύπτει εξ' ολοκλήρου τον τρόπο με τον οποίο παίρνονται τέτοιου είδους κρίσιμες αποφάσεις που αφορά την εθνική ασφάλεια των χωρών, αλλά αποτελούν μια απλοποιημένη άποψη για το πως μπορεί να εξελίσσεται ένα τέτοιο σύστημα στην πιο απλή εκδοχή του. Κατά αυτό τον τρόπο, ο Richardson θέλησε να αποτυπώσει αυτό το σύστημα, δημιουργώντας ένα απλοποιημένο μοντέλο, μιας και η εμπειρία του ως φυσικός, αποδεικνύει ότι πολλές φορές η απλότητα σε τέτοιου είδους πολύπλοκα συστήματα μπορεί να οδηγήσει σε κάποιο πόρισμα έτσι ώστε να αποκομίσει κανείς, σε εύλογο χρονικό διάστημα, σημαντικές πληροφορίες για την συμπεριφορά του πραγματικού συστήματος στην πάροδο του χρόνου.(Caspary, 1967).

Εξισώσεις του Μοντέλου

Το μοντέλο του Richardson περιγράφει το πως εξελίσσονται συναρτήσει του χρόνου t, οι εξοπλισμοί x και y των δύο χωρών A και B.

$$A: \frac{dx}{dt} = ky - ax + g$$

$$B: \frac{dy}{dt} = lx - \beta y + h$$

- Οι ποσότητες x(t) και y(t) αναπαριστούν το σύνολο του εξοπλισμού που κατέχουν οι δύο χώρες την χρονική στιγμή t, ενώ οι παράγωγοί τους παριστάνουν τους αντίστοιχους χρονικούς ρυθμούς μεταβολής.
- Οι σταθερές k, l εκτιμούν τον φόβο/αντίδραση για το σύνολο του εξοπλισμού που κατέχει η αντίπαλη χώρα και είναι θετικές.
- Οι σταθερές α, β έχουν αρνητικό πρόσημο και συμβολίζουν την αυτοσυγκράτηση των χωρών καθώς επίσης και τις οικονομικές επιβαρύνσεις του κράτους με αποτέλεσμα οι χώρες να τείνουν στην μείωση του εξοπλισμού τους.
- Οι σταθερές g, h αποτελούν εξωγενείς σταθερές οι οποίες έχουν επιρροή στον ανταγωνισμό των εξοπλισμών, όπως διπλωματικές πιέσεις ή η δημόσια απειλή που αισθάνονται, με αποτέλεσμα την αύξηση του εξοπλισμού.

Αυτές είναι οι εξισώσεις του μοντέλου του Richardson. Βέβαια, θα μπορούσε να υπάρχει διαφορετική ερμηνεία στους όρους της εξίσωσης. Κάθε φορά που γίνονται μετρήσεις θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κάποιες επιπρόσθετες συνθήκες. Από την μία, οι παράμετροι που αφορούν τις διπλωματικές πιέσεις μιας χώρας θα μπορούσαν να εμπεριέχουν μυστικότητα όσο αφορά τις δραστηριότητες της, ή ακόμα και έξοδα τα οποία αφορούν εκδηλώσεις και φρούρηση των υψηλόβαθμων στελεχών (για παράδειγμα μια στρατιωτική μπάντα και μια προεδρική φρουρά αντίστοιχα). Από την άλλη, θα μπορούσε να έχει και αρνητικό πρόσημο, δείχνοντας έτσι καλή θέληση, αντί παραπόνων προς τις γείτονες χώρες. Επιπλέον, διαφορετικοί συντελεστές μπορούν να αλλάξουν με την πάροδο του χρόνου. Εκλέγοντας νέα κυβέρνηση, ή μια εσωτερική αλλαγή στο υπουργείο εθνικής άμυνας ή και κάποιο παγκόσμιο γεγονός θα μπορούσε να αλλάξει τις παραμέτρους g και h απότομα. Όλα αυτά είναι κάποια από τα ενδεχόμενα που θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη στη συνέχεια της εργασίας αυτής, κάθε φορά που θα κάνουμε μετρήσεις και θα ερμηνεύουμε τα γεγονότα.

Τα τρία διαφορετικά αποτελέσματα με βάση το μοντέλο αυτό είναι ότι τα δύο έθνη που συγκρούονται τείνουν προς τον αφοπλισμό, τείνουν προς μια ανεξέλεγκτη κούρσα των εξοπλισμών, ή τείνουν προς ένα σταθερό σημείο ισορροπίας εξοπλισμών (Rapoport, 1957).

Κατά τον τρόπο τον οποίο θέτονται οι συναρτήσεις γεννούν διάφορα ερωτήματα τα οποία σχετίζονται με την μαθηματική δομή αυτού του μοντέλου και τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Αν υπάρχει ισσοροπία, αν είναι μοναδική, αν είναι σταθερή, αν υπάρχουν όρια.(3.2 The equations, Lewis *Fry* Richardson His Intellectual Legacy and Influence in the Social Sciences).

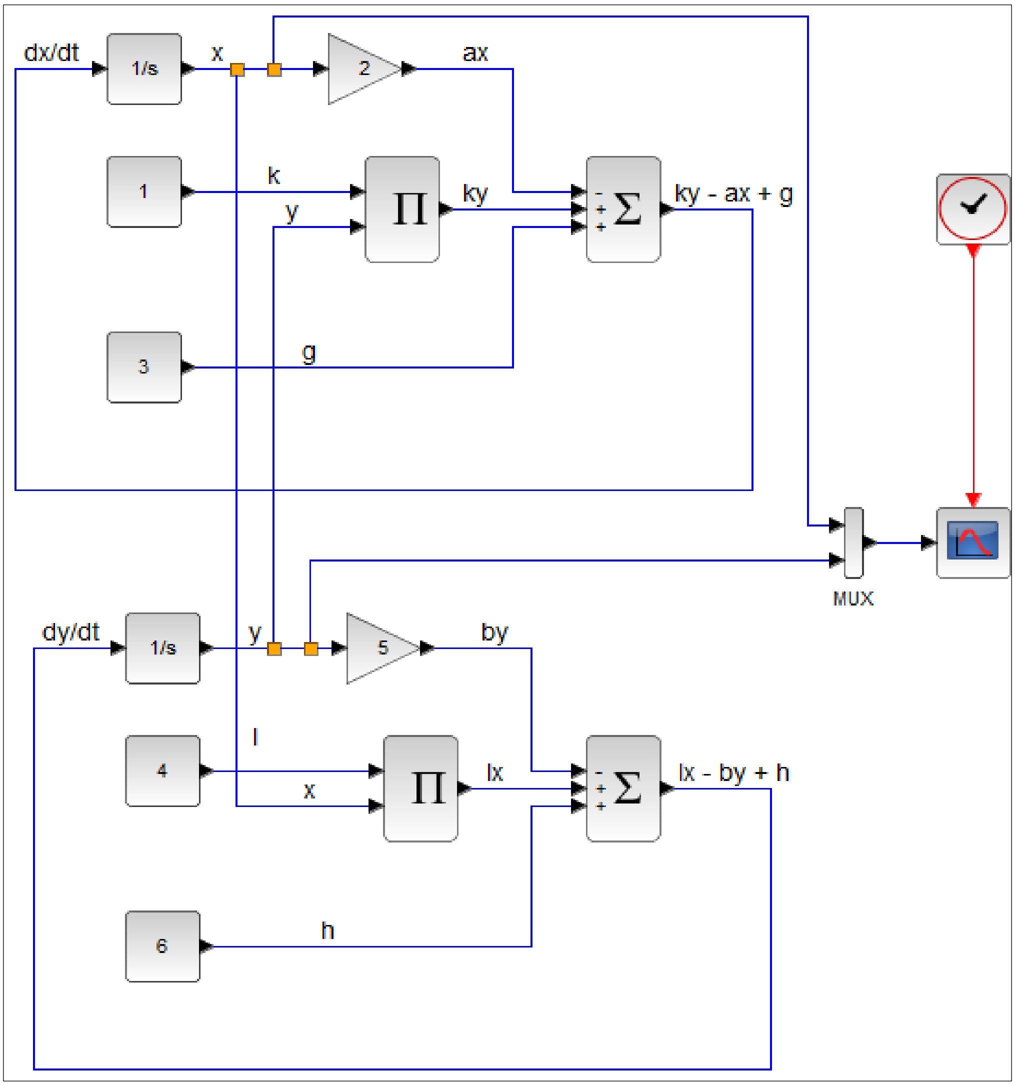
Στο επόμενο κεφάλαιο, θα δείξουμε κάποιες περιπτώσεις προσομοιώσεων, θέτοντας κάποιες αρχικές τιμές στις παραμέτρους του μοντέλου, έτσι ώστε να εξαχθούν διάφορα αποτελέσματα και γραφήματα που μπορεί να προκύψουν. Θα προσπαθήσουμε να καλύψουμε την πληθώρα των περιπτώσεων τοποθετόντας συγκεκριμένες τιμές στις μεταβλητές, έτσι ώστε να προκύψουν συγκεκριμένα γεγονότα. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα ανοιχτού λογισμικού **Scilab και συγκεκριμένα το εργαλείο Xcos** μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα μοντέλο στο οποίο θα τοποθετούνται αρχικές τιμές για κάθε περίπτωση, έπειτα θα εκτελείται η προσομοίωση και θα αποδίδει τις εξόδους που ορίσαμε, δηλαδή κάποιες γραφικές παραστάσεις. Έπειτα θα γίνει ερμηνεία αυτών και εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων για το μοντέλο.

Περίπτωση θετικών g & h με διαφορετικές τιμές

Εκκινώντας το πρόγραμμα Scilab και εκτελώντας την εντολή Xcos, καταλήγουμε σε ένα περιβάλλον όπου μπορούμε να φτιάξουμε την προσομοίωση που θέλουμε. Στο σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων θα ορίσουμε κάποιες αρχικές τιμές για την πρώτη προσομοίωση:

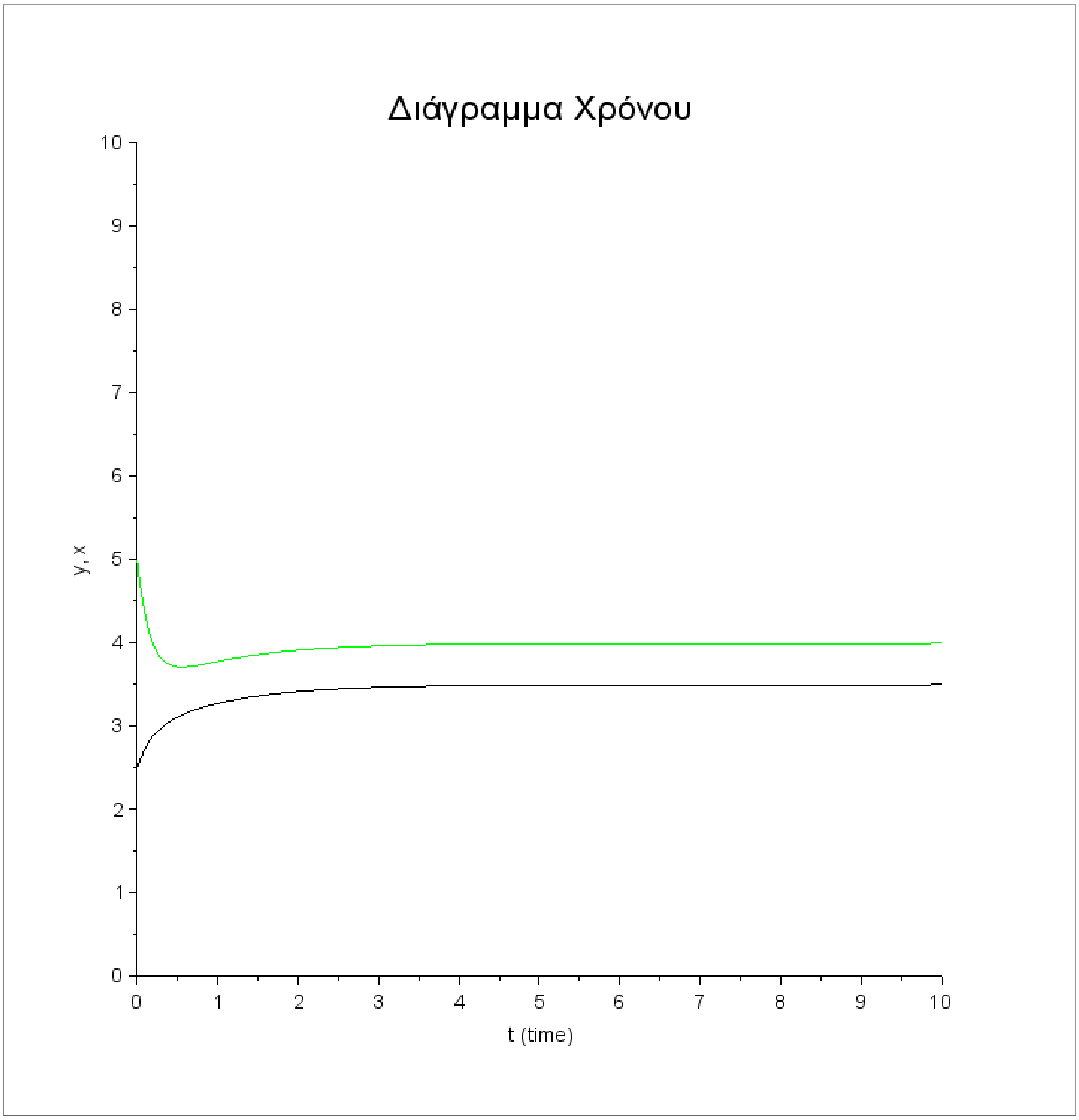
1) Για την πρώτη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : k = 1, a = 2, g = 3
2) Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : l = 4, b = 5, h = 6.
3) Για τις αρχικές τιμές των x και y έχουμε αντίστοιχα: x(0) = 2.5, y(0) = 5.
4) Ο χρόνος t ∈ [0,10]
5) Τα θετικά g και h προσδιορίζουν ότι οι 2 χώρες που ανταγωνίζονται, έχουν εμφανή «παράπονα» η μία από την άλλη.

Παρακάτω απεικονίζεται ο σχεδιασμός του συστήματος στο γραφικό περιβάλλον Xcos του Scilab.



Προσομοίωση 1- Προσομοίωση θετικών g & h με διαφορετικές τιμές σε διάγραμμα χρόνου

Η προσομοίωση που ‘τρέξαμε’ επιλύει το σύστημα και απεικονίζει τις λύσεις των συναρτήσεων σε ένα διάγραμμα. Οι λύσεις των μεταβλητών x, y ενώνονται με μία γραμμή. Ο χρόνος εκκίνησης της προσομοίωσης είναι το χρονικό σημείο 0 (δεν μπορεί να είναι αρνητικός), και εκτελείται ως το χρονικό σημείο 10. Παρακάτω απεικονίζεται το διάγραμμα για τις λύσεις των εξισώσεων. Η μαύρη γραμμή ενώνει τις τιμές του x, ενώ η πράσινη του y.

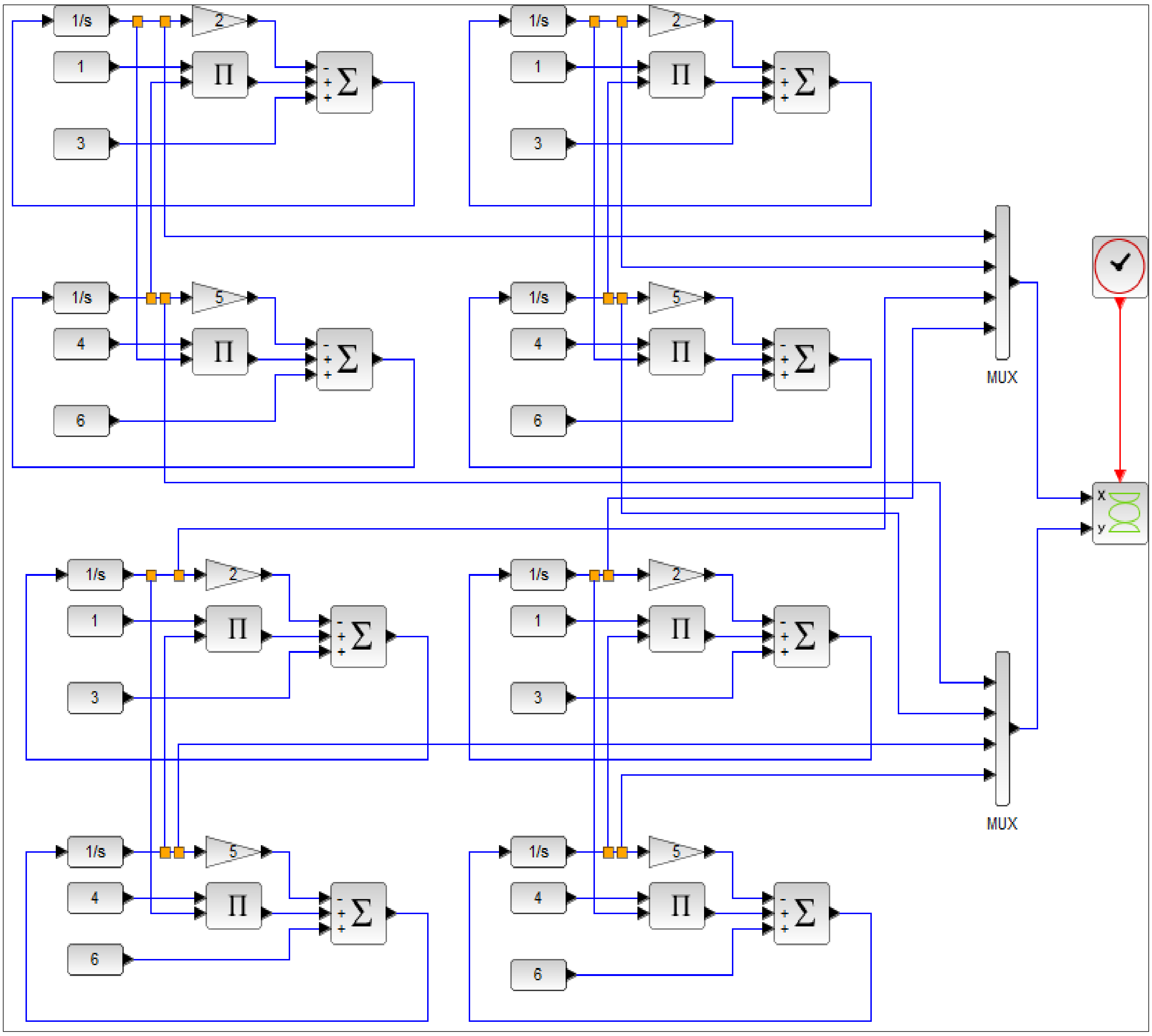


Διάγραμμα 1 - Διάγραμμα συναρτήσει του χρόνου για θετικά g και h με διαφορετικές τιμές

Όπως φαίνεται στο παραπάνω γράφημα, οι δύο εξισώσεις καταλήγουν σε ένα σημείο ισορροπίας αν και τα σημεία εκκίνησης τους διαφέρουν. Από το σημείο εκείνο οι τιμές και των δυο εξισώσεων συνεχίζουν να έχουν σταθερή τιμή. Στην επόμενη σελίδα θα εξετάσουμε το ίδιο σύστημα αλλά όχι στο πεδίο του χρόνου.

Στην επόμενη προσομοίωση θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύστημα, με διαφορετικές αρχικές συνθήκες αυτή τη φορά. Θα εξετάσουμε 4 διαφορετικές περιπτώσεις και θα απεικονείσουμε τις καμπύλες που προκύπτουν σε ένα γράφημα της μορφής XY.

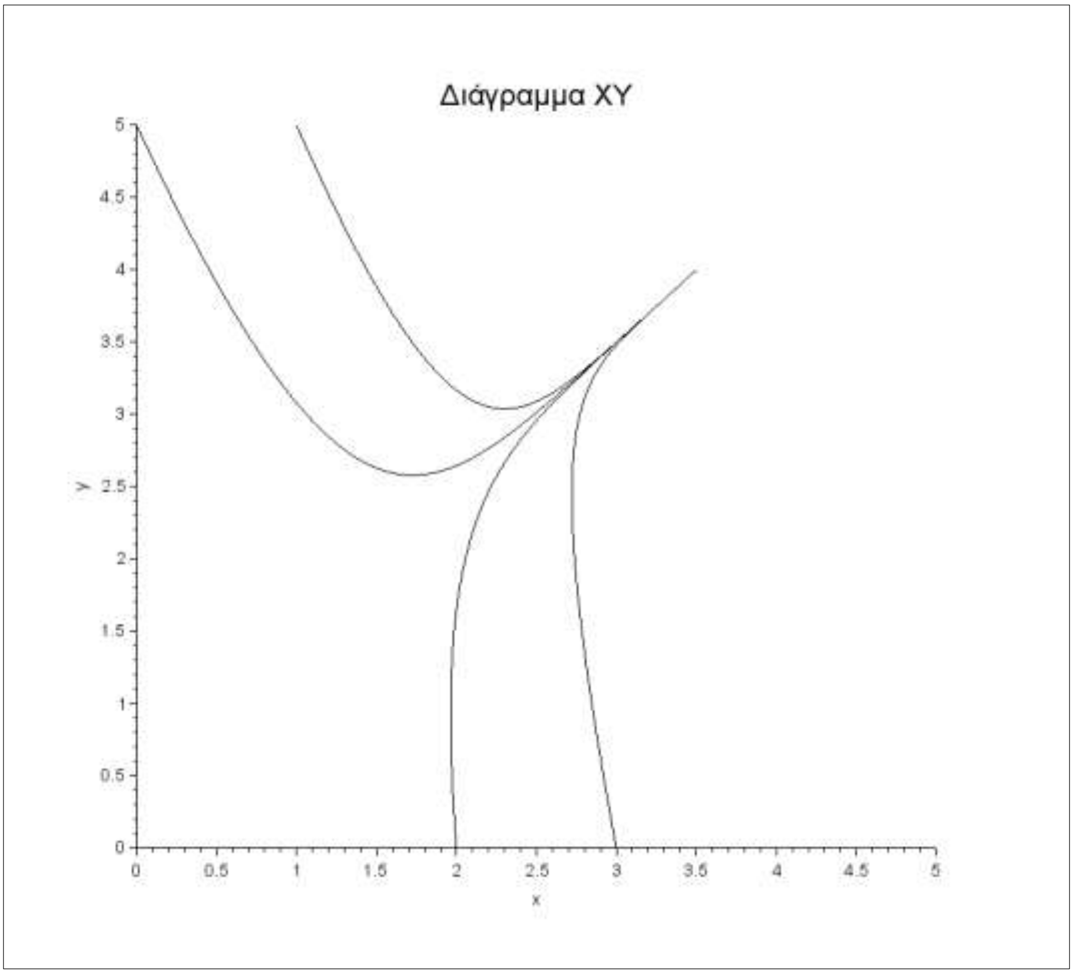
i. $y(0) = 5, x(0) = 0$*
ii. $y(0) = 5, x(0) = 1$
iii. $y(0) = 0, x(0) = 2$
iv. $y(0) = 0, x(0) = 3$



Προσομοίωση 2 - Προσομοίωση θετικών g & h με διαφορετικές τιμές σε διάγραμμα XY

*Για να θέσουμε τις αρχικές τιμές του x(0) και y(0) στο πρόγραμμα κάνουμε διπλό κλικ στον ολοκληρωτή (το στοιχείο με το 1/s) και στο παράθυρο διαλόγου απλά εισάγουμε τις τιμές.

Στο παρακάτω γράφημα φαίνονται τα αποτελέσματα της προηγούμενης προσομοίωσης.



Διάγραμμα 2 - Διάγραμμα XY για θετικά g και h με διαφορετικές τιμές

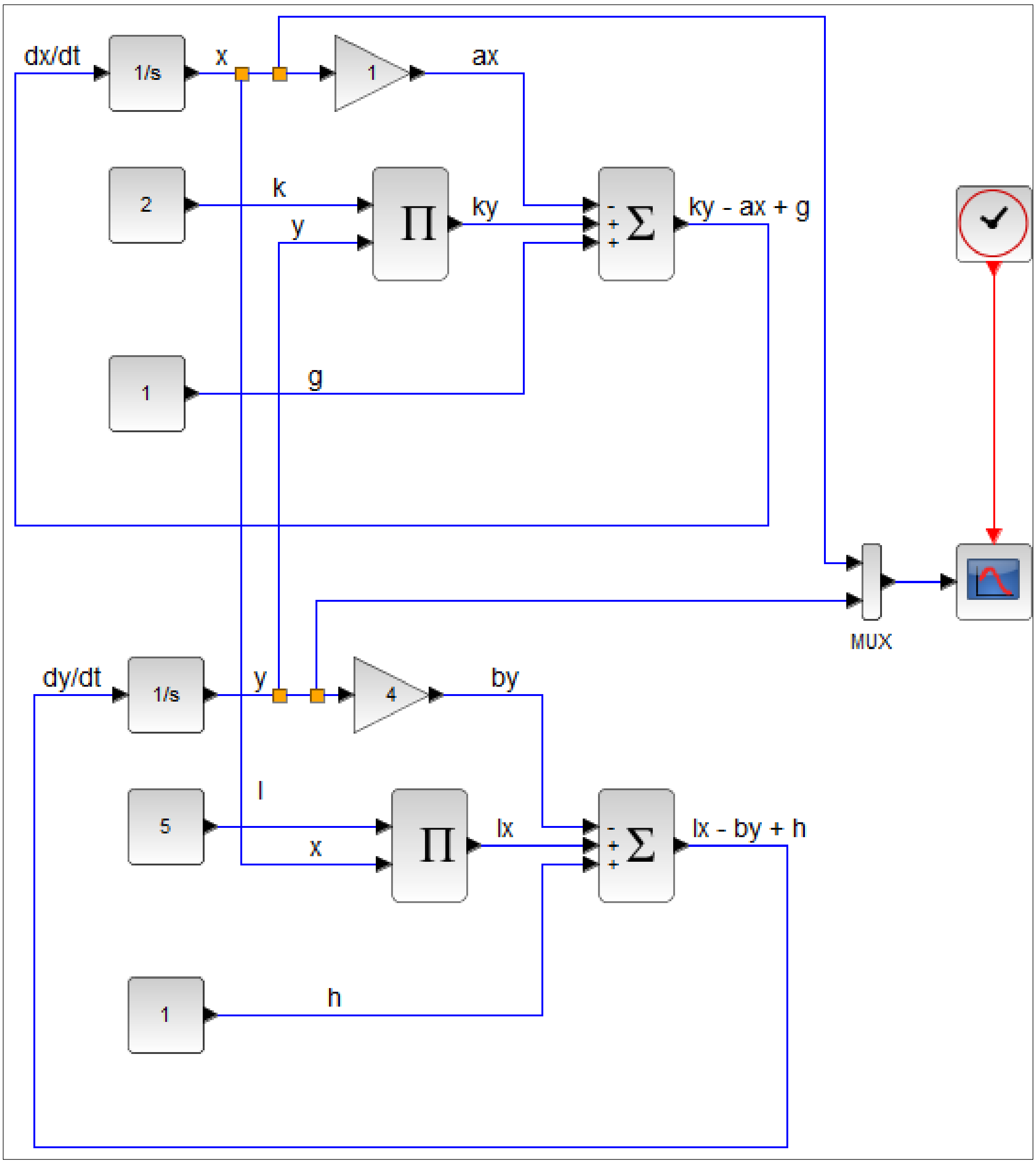
Παρατηρούμε ότι και οι 4 καμπύλες, αν και έχουν διαφορετικό σημείο εκκίνησης, τείνουν προς το ίδιο σημείο, με αποτέλεσμα η «κούρσα των εξοπλισμών» να αυξάνεται διαρκώς.

Περίπτωση θετικών g & h με ίδιες τιμές

Οι αρχικές τιμές για την επόμενη προσομοίωση θα είναι οι εξής:

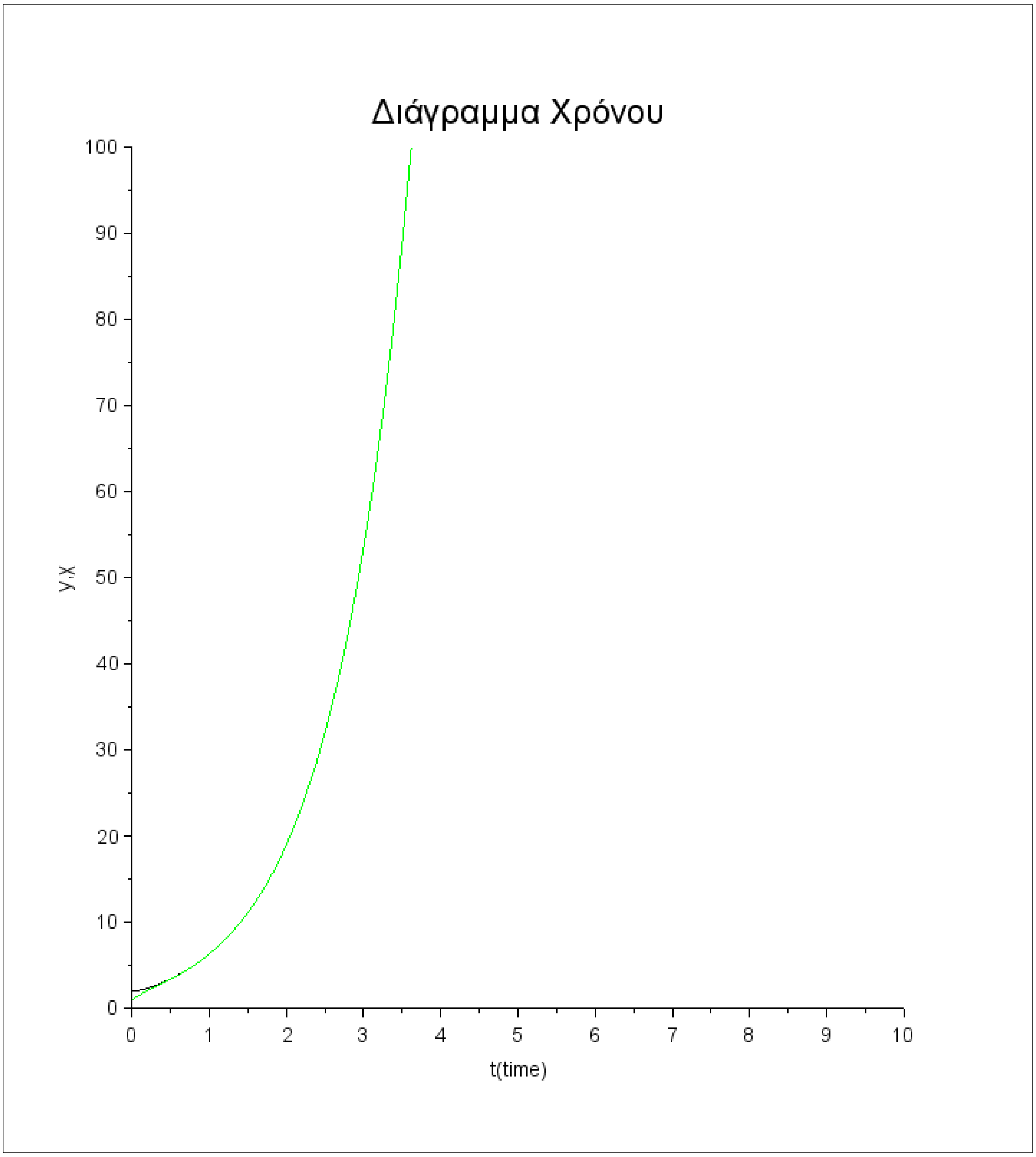
1) Για την πρώτη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : k = 2, a = 1, g = 1.
2) Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : l = 5, b = 4, h = 1.
3) Για τις αρχικές τιμές των x και y έχουμε αντίστοιχα: x(0) = 2, y(0) = 1.
4) Ο χρόνος t ∈ [0,10]
5) Τα θετικά g και h προσδιορίζουν ότι οι 2 χώρες που ανταγωνίζονται, έχουν τα ίδια (σε αριθμητικό μέγεθος) παράπονα μεταξύ τους.

Παρακάτω απεικονίζεται ο σχεδιασμός του συστήματος στο γραφικό περιβάλλον Xcos του Scilab.



Προσομοίωση 3 - Προσομοίωση θετικών g & h με ίδιες τιμές σε διάγραμμα χρόνου

Η προσομοίωση που 'τρέξαμε' επιλύει το σύστημα και απεικονίζει τις λύσεις των συναρτήσεων σε ένα διάγραμμα. Οι λύσεις των μεταβλητών x, y ενώνονται με μία γραμμή. Ο χρόνος εκκίνησης της προσομοίωσης είναι το χρονικό σημείο 0 (δεν μπορεί να είναι αρνητικός), και εκτελείται ως το χρονικό σημείο 10. Παρακάτω απεικονίζεται το διάγραμμα για τις λύσεις των εξισώσεων. Η μαύρη γραμμή ενώνει τις τιμές του x, ενώ η πράσινη του y.



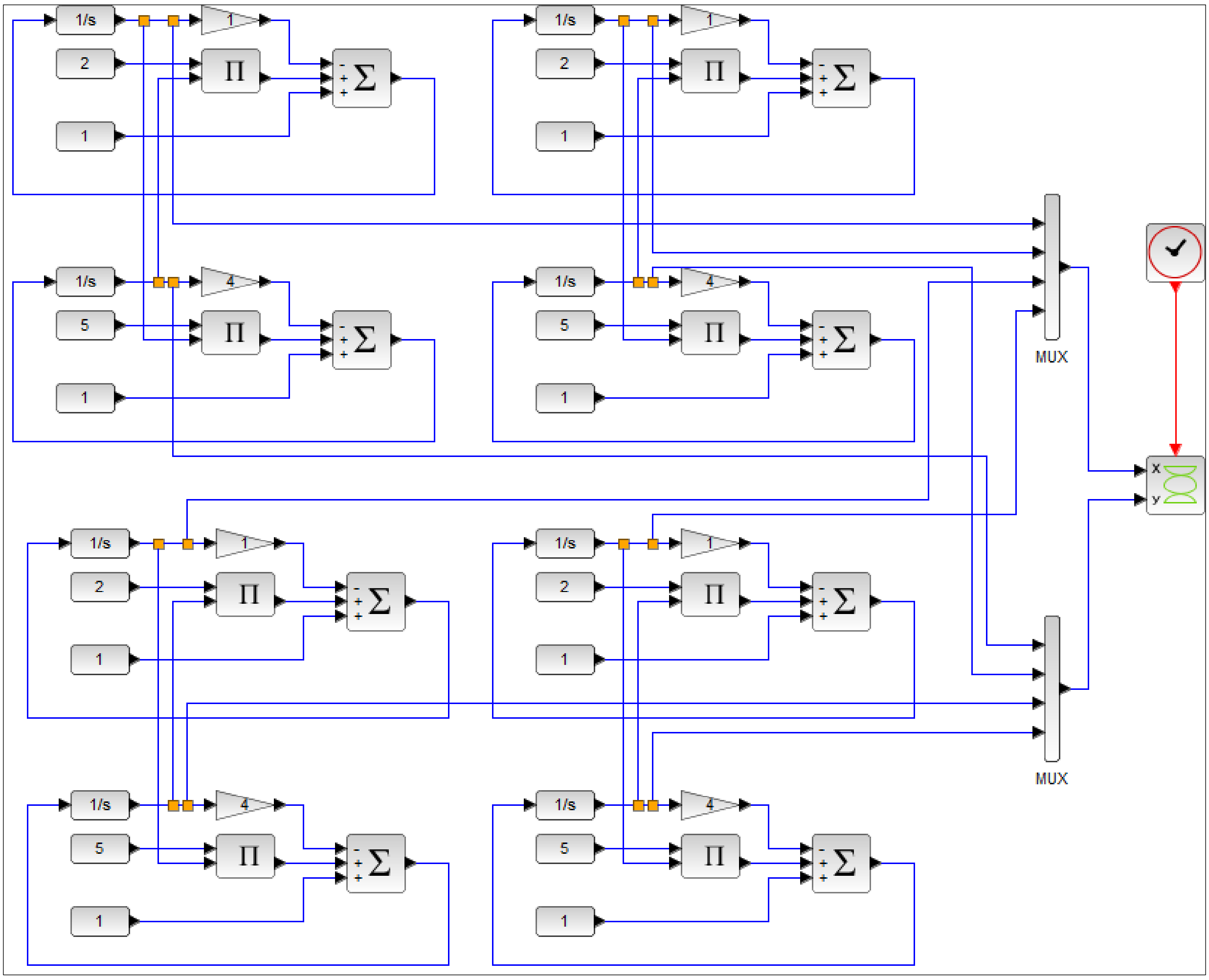
Διάγραμμα 3 - Διάγραμμα συναρτήσει του χρόνου για θετικά g και h με ίδιες τιμές

Στο παραπάνω γράφημα, βλέπουμε πως οι δύο καμπύλες ταυτίζονται. Η εκκίνηση των δύο καμπυλών ξεκινάει από κοντινές αρχικές συνθήκες (2 για την X και 1 για την Y), και γρήγορα καταλήγει σε μια κούρσα των εξοπλισμών μεταξύ των 2 χωρών με ανοδική πορεία.

Στην επόμενη προσομοίωση θα χρησημοποιήσουμε το ίδιο σύστημα, έχοντας πάλι θετικά g & h, αυτή την φορά όμως με την ίδια τιμή. Θα εξετάσουμε 4 διαφορετικές περιπτώσεις και θα απεικονείσουμε τις καμπύλες που προκύπτουν σε ένα γράφημα της μορφής XY.

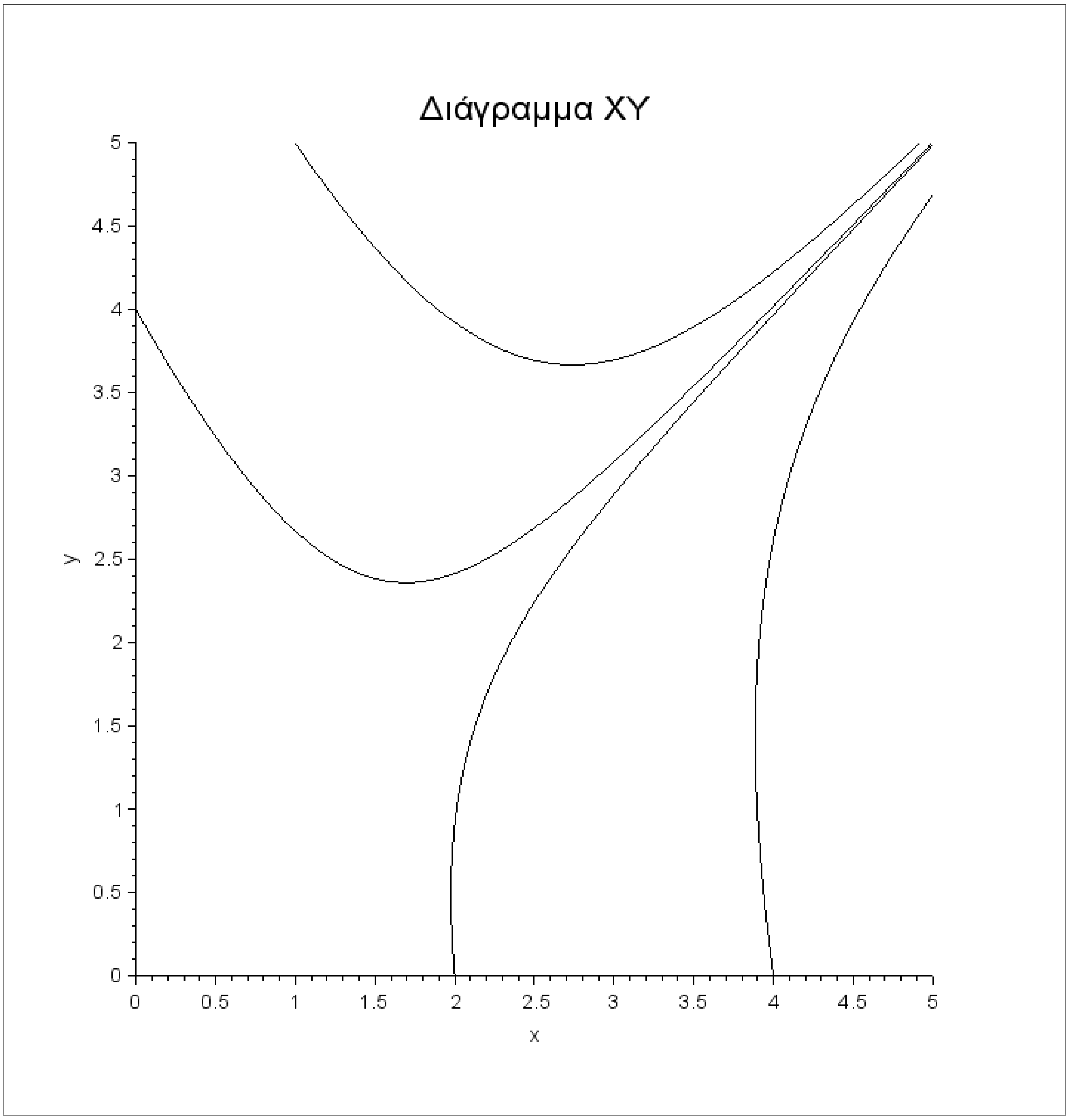
Οι αρχικές συνθήκες θα είναι οι εξής:

i. $y(0) = 4, x(0) = 0$
ii. $y(0) = 5, x(0) = 1$
iii. $y(0) = 0, x(0) = 2$
iv. $y(0) = 0, x(0) = 4$



Προσομοίωση 4 – Προσομοίωση θετικών g & h με ίδιες τιμές σε διάγραμμα XY

Στο παρακάτω γράφημα φαίνονται τα αποτελέσματα της προηγούμενης προσομοίωσης.



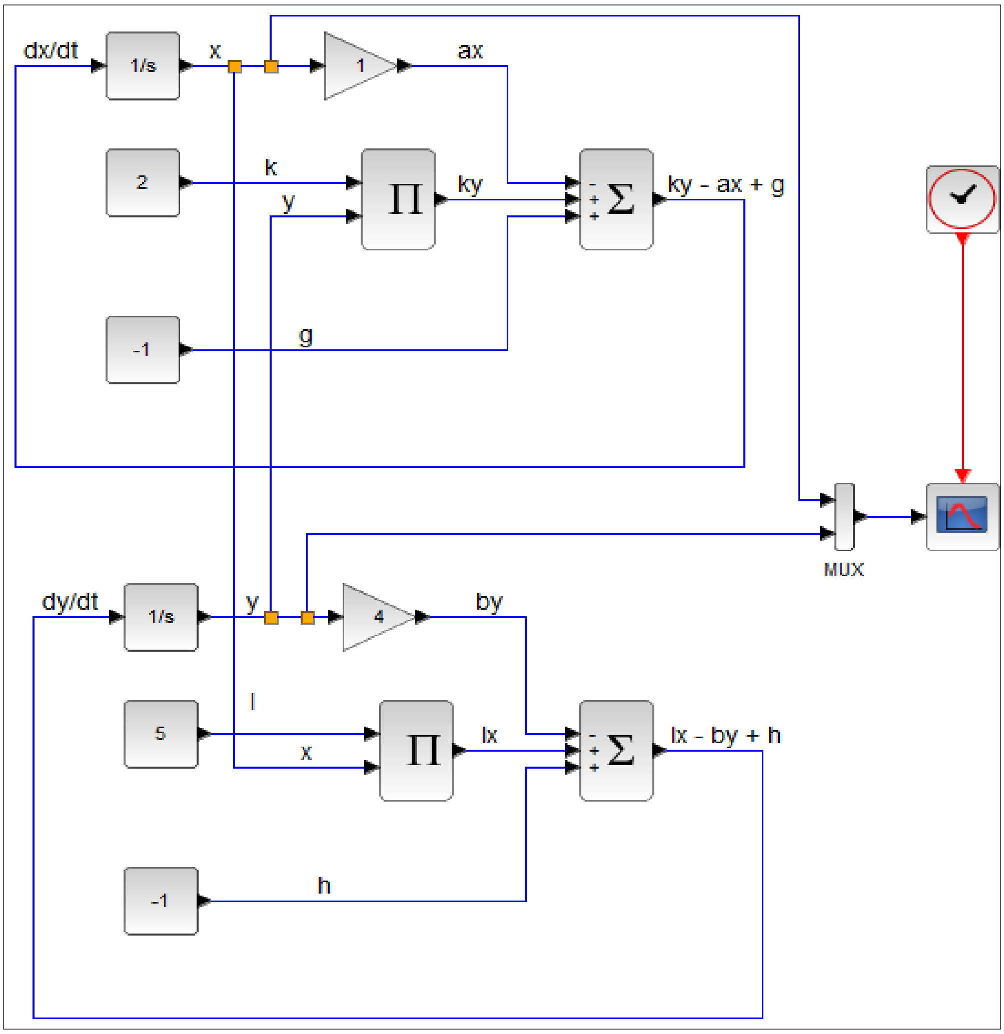
Διάγραμμα 4 - Διάγραμμα XY για θετικά g και h με ίδιες τιμές

Παρατηρούμε ότι και οι 4 καμπύλες, αν και έχουν διαφορετικό σημείο εκκίνησης, τείνουν προς το ίδιο σημείο, αυτή τη φορά όμως όχι τόσο γρήγορα όσο η προηγούμενη περίπτωση που είχε μεγαλύτερες τιμές για τα g & h. Παρόλα αυτά το αποτέλεσμα στο τέλος είναι το ίδιο, δηλαδή η «κούρσα των εξοπλισμών» διαρκώς θα αυξάνεται.

Περίπτωση αρνητικών g & h

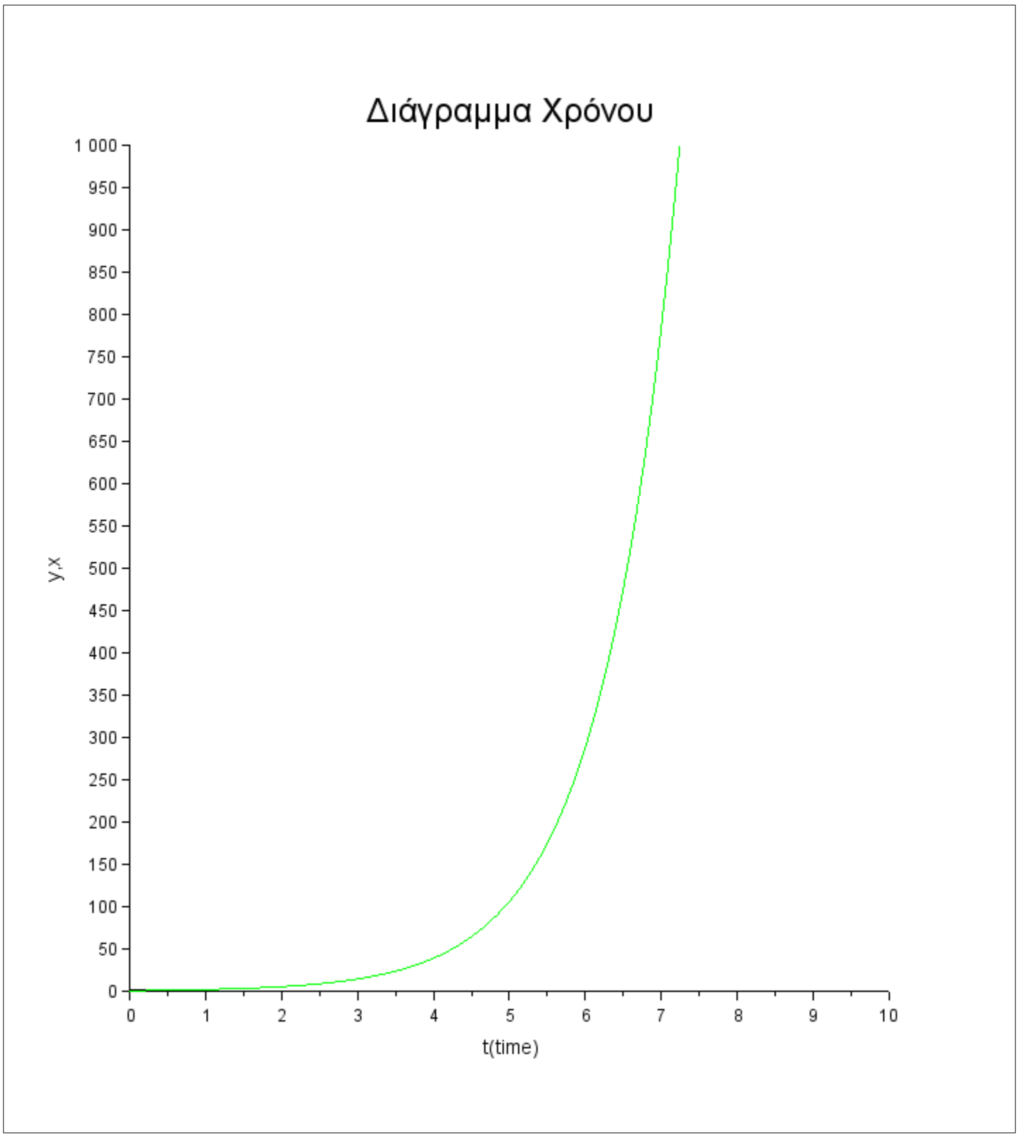
Οι αρχικές τιμές για την επόμενη προσομοίωση θα είναι οι εξής:

1) Για την πρώτη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : k = 2, a = 1, g = -1.
2) Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : l = 5, b = 4, h = -1.
3) Για τις αρχικές τιμές των x και y έχουμε αντίστοιχα: x(0) = 2, y(0) = 1.
4) Ο χρόνος t ∈ [0,10]
5) Τα αρνητικά g και h προσδιορίζουν ότι οι 2 χώρες που ανταγωνίζονται, έχουν καλή θέληση και ειρηνικές διαθέσεις μεταξύ τους.



Προσομοίωση 5- Προσομοίωση αρνητικών g και h σε διάγραμμα χρόνου

Η προσομοίωση που ‘τρέξαμε’ επιλύει το σύστημα και απεικονίζει τις λύσεις των συναρτήσεων σε ένα διάγραμμα. Οι λύσεις των μεταβλητών x, y ενώνονται με μία γραμμή. Ο χρόνος εκκίνησης της προσομοίωσης είναι το χρονικό σημείο 0 (δεν μπορεί να είναι αρνητικός), και εκτελείται ως το χρονικό σημείο 10. Παρακάτω απεικονίζεται το διάγραμμα για τις λύσεις των εξισώσεων. Η μαύρη γραμμή ενώνει τις τιμές του x, ενώ η πράσινη του y.

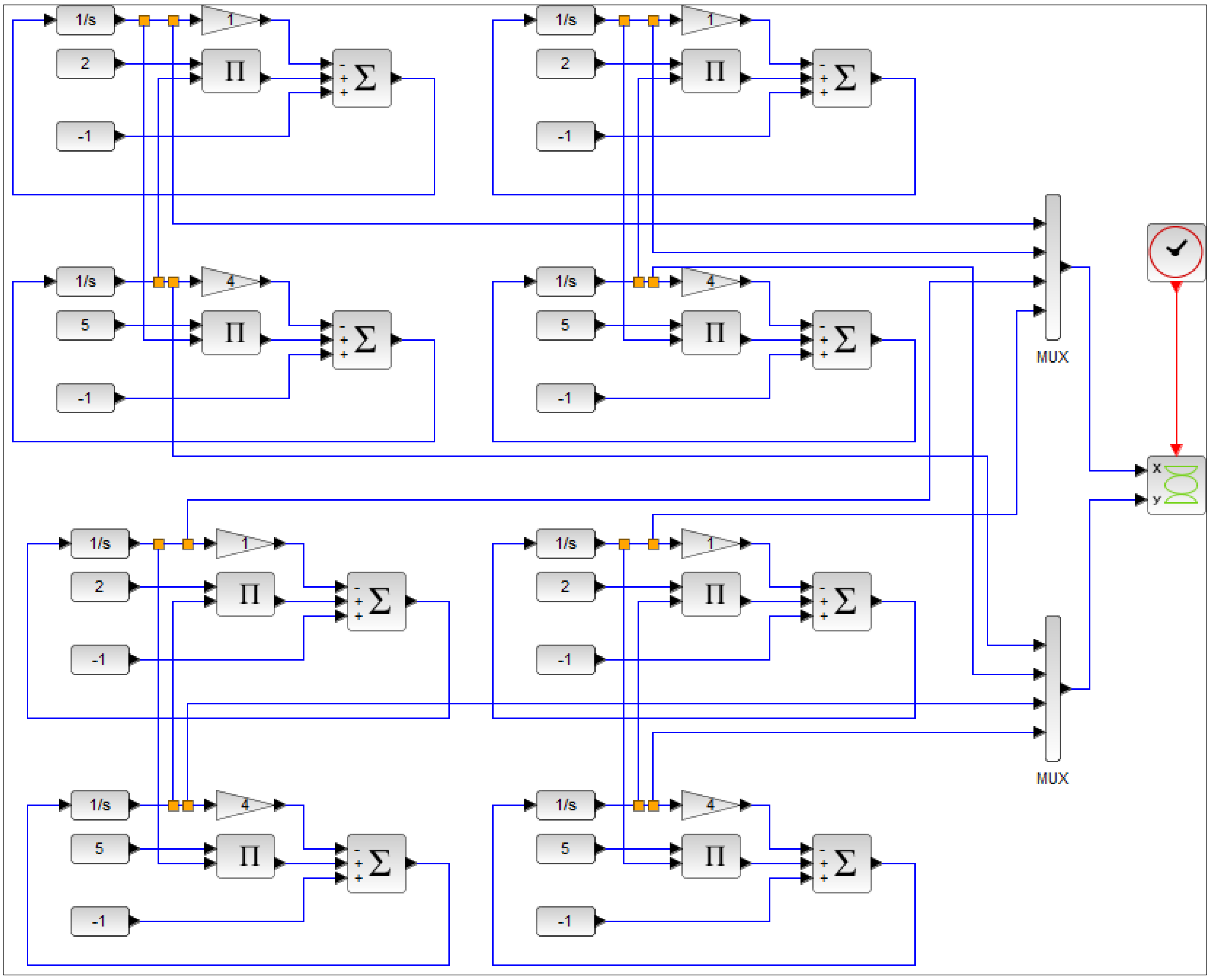


Διάγραμμα 5 - Διάγραμμα συναρτήσει του χρόνου για αρνητικά g και h

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω γράφημα οι τιμές των μεταβλητών x και y, αυξάνονται με την πάροδο του χρόνου και αποκτούν μεγάλες θετικές τιμές. Αυτό συμβαίνει διότι αν και οι σταθερές g και h στις οποίες θέσαμε αρνητικές τιμές, αντικατοπτρίζουν «καλή θέληση» μεταξύ των δύο χωρών, οι υπόλοιπες μεταβλητές του συστήματος είναι ισχυρότερες και υπερισχύει η «έχθρα» μεταξύ των χωρών με αποτέλεσμα να φτάνουν σε μια τρελή κούρσα των εξοπλισμών οι 2 χώρες. Αυτό βέβαια εξαρτάται και από τις υπόλοιπες παραμέτρους του συστήματος, διότι σε άλλη περίπτωση θα είχαν την αντίθετη πορεία και θα τείναν προς το μείον άπειρο, με επακόλουθο τον πλήρη αφοπλισμό, όπως θα δούμε στην επόμενη περίπτωση.

Στην επόμενη προσομοίωση θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύστημα, με διαφορετικές αρχικές συνθήκες αυτή τη φορά. Θα εξετάσουμε 4 διαφορετικές περιπτώσεις και θα απεικονείσουμε τις καμπύλες που προκύπτουν σε ένα γράφημα της μορφής XY.

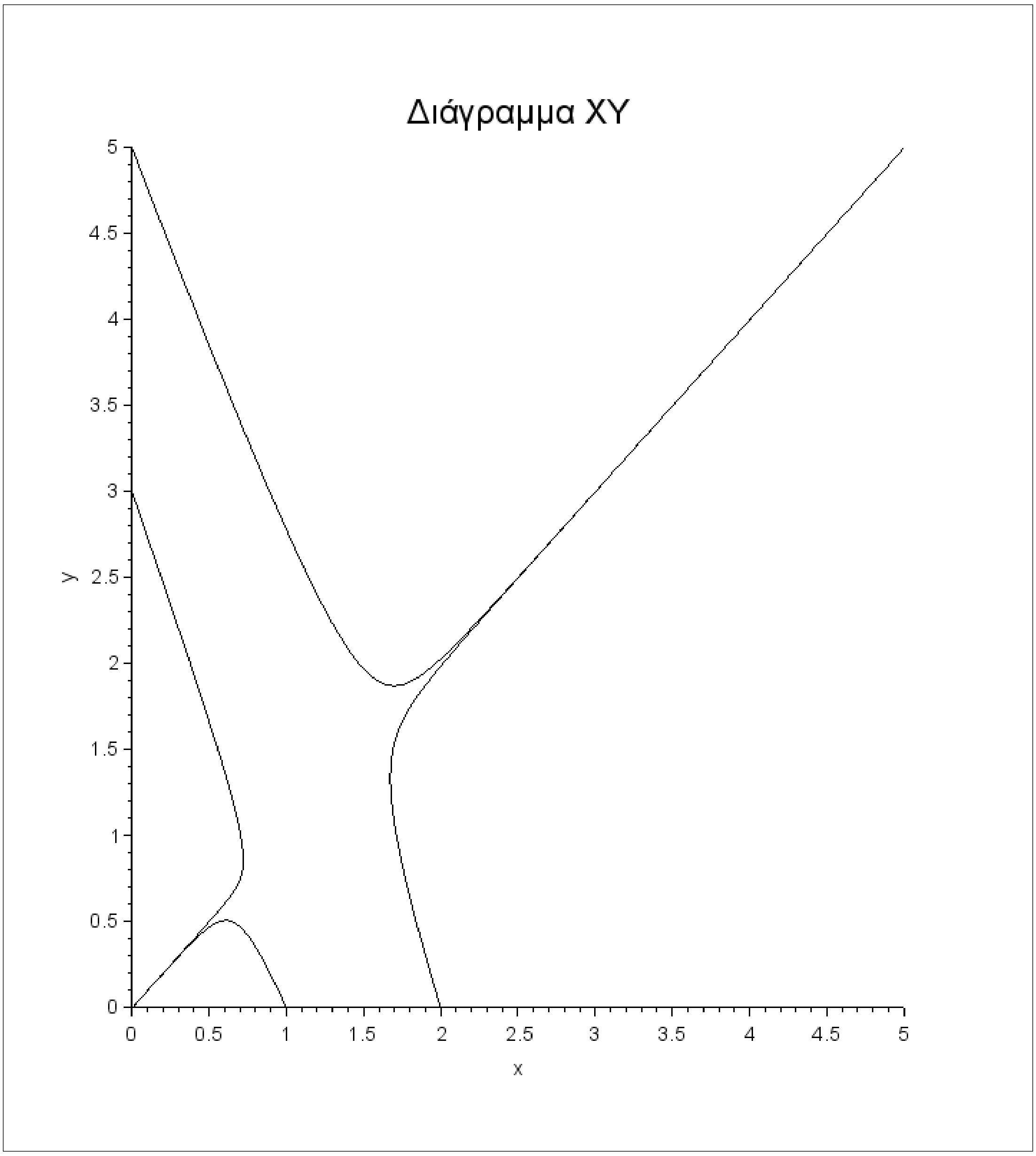
i. $y(0) = 1, x(0) = 0$*
ii. $y(0) = 2, x(0) = 0$
iii. $y(0) = 0, x(0) = 3$
iv. $y(0) = 0, x(0) = 5$



Προσομοίωση 6 – Προσομοίωση αρνητικών g και h σε διάγραμμα XY

*Για να θέσουμε τις τιμές του x(0) και y(0) στο πρόγραμμα κάνουμε διπλό κλικ στον ολοκληρωτή (το στοιχείο με το 1/s) και στο παράθυρο διαλόγου απλά εισάγουμε τις τιμές.

Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζουμε τις τιμές του x στον οριζόντιο άξονα και στον κάθετο άξονα, τις τιμές του y.



Διάγραμμα 6 - Διάγραμμα XY για αρνητικά g και h

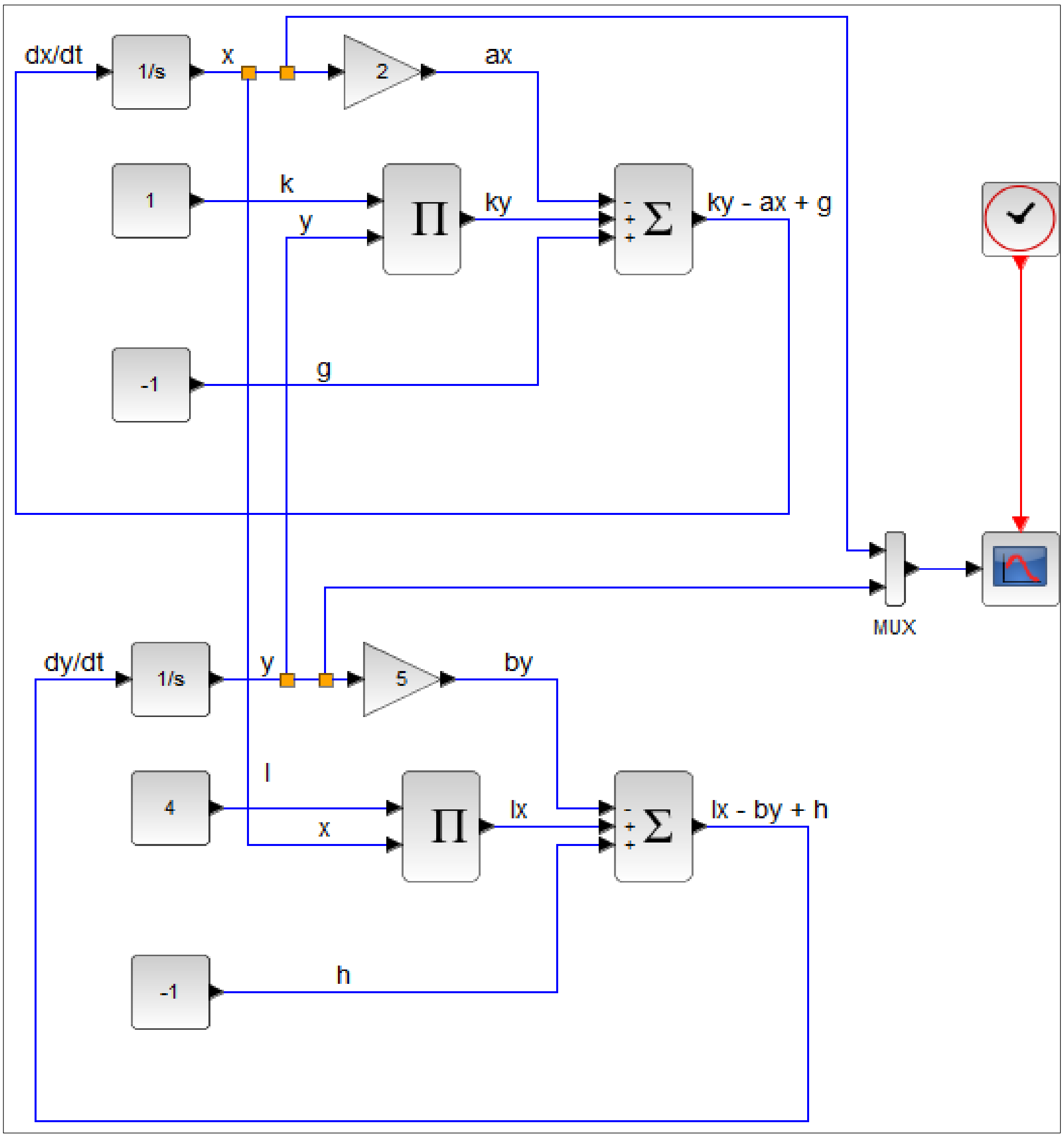
Παρατηρούμε ότι σε αυτό το σύστημα, καθοριστικό ρόλο παίζουν οι αρχικές συνθήκες. Οι 2 καμπύλες τείνουν προς το 0 (αφοπλισμός) ενώ οι άλλες 2 τείνουν προς μια ανεξέλεγκτη κούρσα ανταγωνισμού των εξοπλισμών των 2 χωρών. Συνεπώς, μπορεί η «καλή θέληση» να οδηγήσει σε αφοπλισμό, αν οι υπόλοιποι παράγοντες δεν έχουν προκαθορισμένο μεγάλο μέγεθος, αλλά σε αντίθετη περίπτωση, η πορεία θα είναι αντίστροφη.

Περίπτωση αρνητικών g & h με τάση προς αφοπλισμό

Το σύστημα που θα χρησιμοποιηθεί σε αυτήν την ενότητα, έχει τις ίδιες τιμές g & h με την προηγούμενη προσομοίωση, αλλά διαφορετικές τιμές για τις υπόλοιπες σταθερές. Σκοπός είναι να μελετηθεί η περίπτωση στην οποία όλες οι αρχικές συνθήκες, θα οδηγήσουν στον αφοπλισμό, λόγω της κατασκευής του συστήματος.

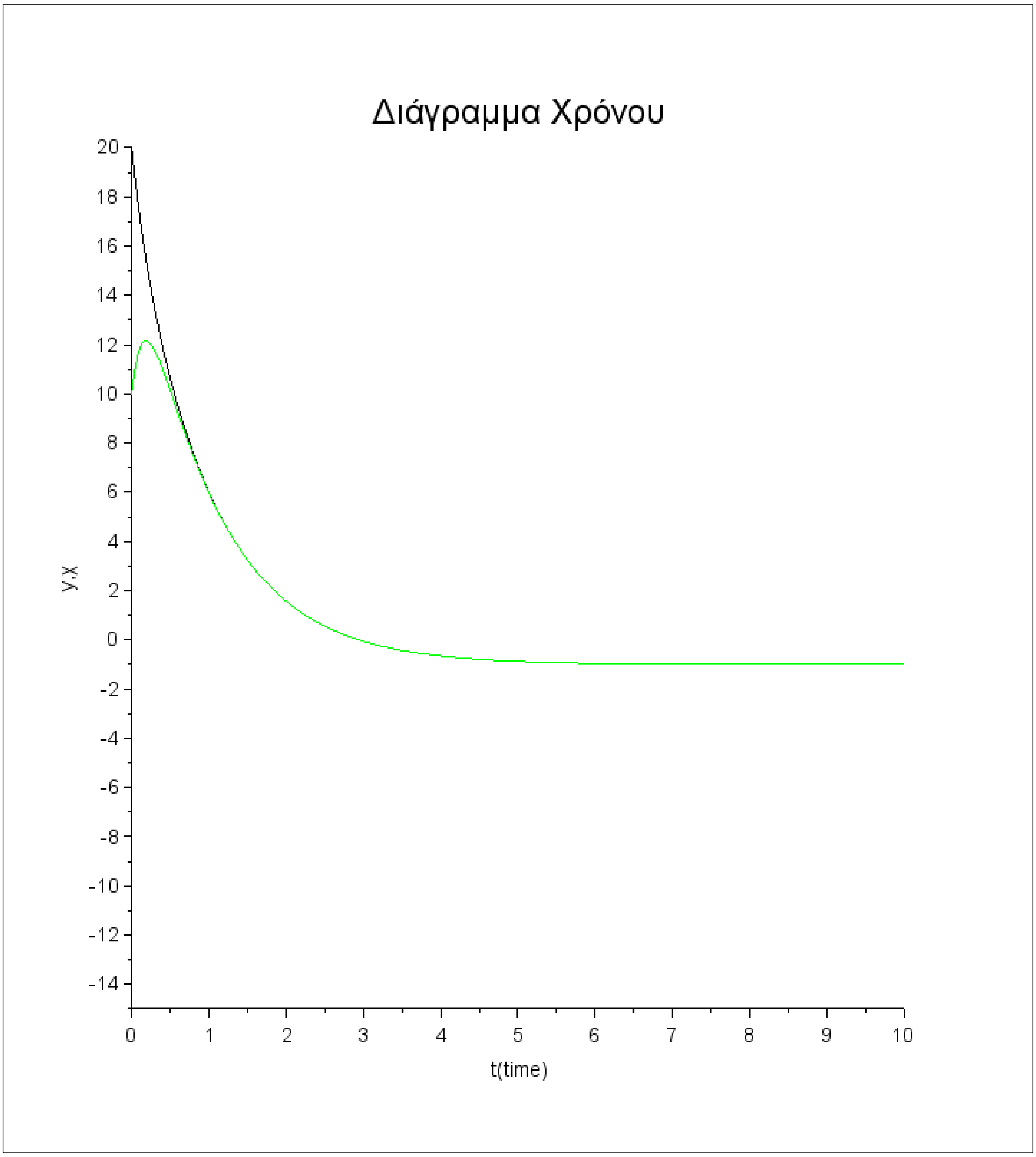
Οι αρχικές τιμές για την επόμενη προσομοίωση θα είναι οι εξής:

1) Για την πρώτη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : k = 1, a = 2, g = -1.
2) Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : l = 4, b = 5, h = -1.
3) Για τις αρχικές τιμές των xκαι y έχουμε αντίστοιχα: x(0) = 20, y(0) = 10.
4) Ο χρόνος t ∈ [0,10]
5) Τα αρνητικά g και h προσδιορίζουν ότι οι 2 χώρες που ανταγωνίζονται, έχουν καλή θέληση και ειρηνικές διαθέσεις μεταξύ τους.



Προσομοίωση 7 - Προσομοίωση αρνητικών g και h με τάση προς αφοπλισμό σε διάγραμμα χρόνου

Η προσομοίωση που ‘τρέξαμε’ επιλύει το σύστημα και απεικονίζει τις λύσεις των συναρτήσεων σε ένα διάγραμμα. Οι λύσεις των μεταβλητών x, y ενώνονται με μία γραμμή. Ο χρόνος εκκίνησης της προσομοίωσης είναι το χρονικό σημείο 0 (δεν μπορεί να είναι αρνητικός), και εκτελείται ως το χρονικό σημείο 10. Παρακάτω απεικονίζεται το διάγραμμα για τις λύσεις των εξισώσεων. Η μαύρη γραμμή ενώνει τις τιμές του x, ενώ η πράσινη του y.



Διάγραμμα 7 - Διάγραμμα συναρτήσει του χρόνου για αρνητικά g και h με τάση προς αφοπλισμό

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω γράφημα η μαύρη καμπύλη φθίνει απο την αρχή του χρόνου ενώ η πράσινη, αρχικά αυξάνει, κι έπειτα κι αυτή ακολουθεί φθίνουσα πορεία. Το σημείο στο οποίο συναντιούνται τελικά, είναι το σημείο 0, όπου επέρχεται ο αφοπλισμός των χωρών, που είναι το ζητούμενο.

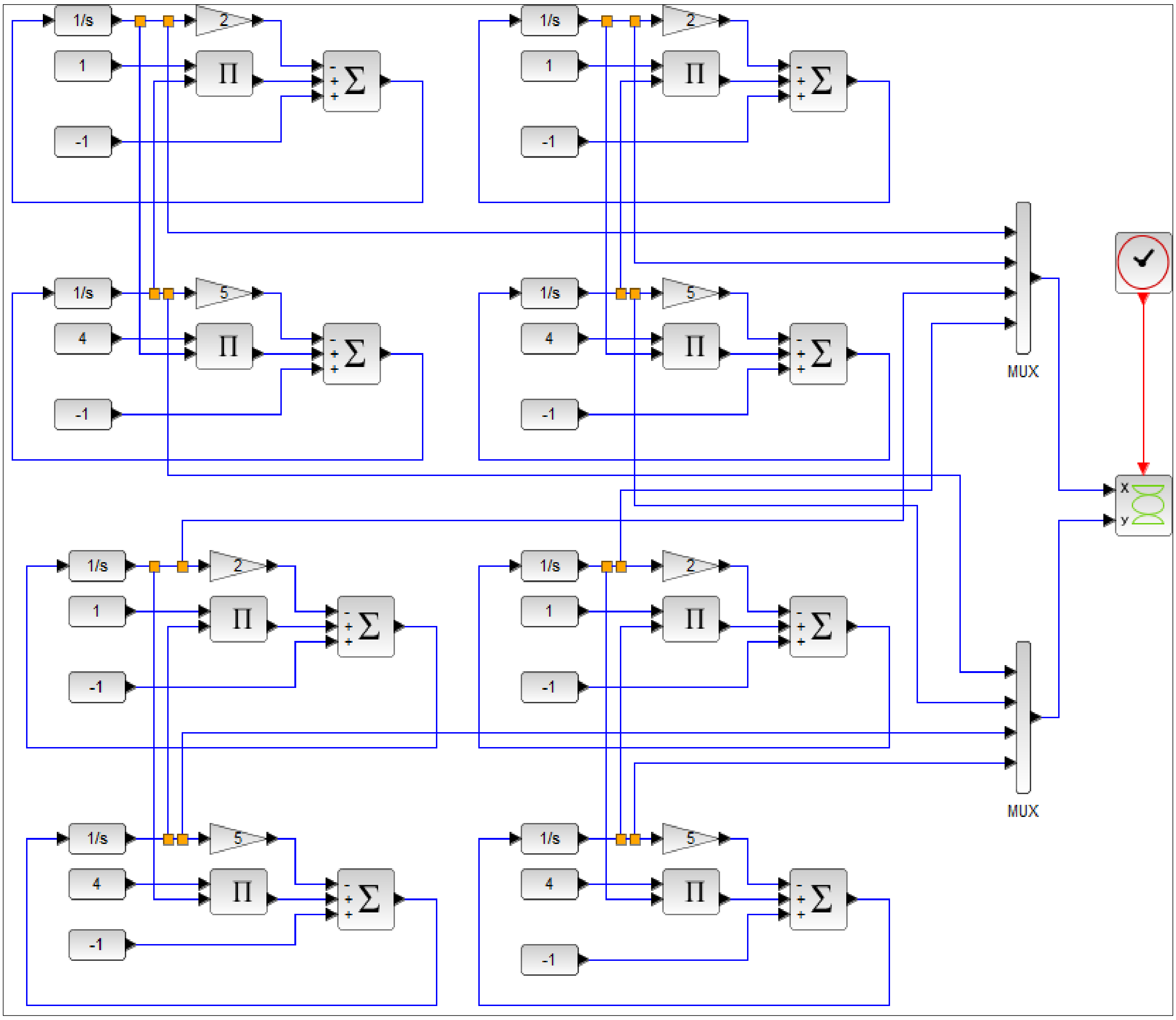
Στην επόμενη προσομοίωση θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύστημα που χρησιμοποίησαμε παραπάνω, με διαφορετικές αρχικές συνθήκες αυτή τη φορά. Θα εξετάσουμε 4 διαφορετικές περιπτώσεις και θα απεικονείσουμε τις καμπύλες που προκύπτουν σε ένα γράφημα της μορφής XY.

i. $y(0) = 5, x(0) = 1$*

ii. $y(0) = 5, x(0) = 2$

iii. $y(0) = 0, x(0) = 5$

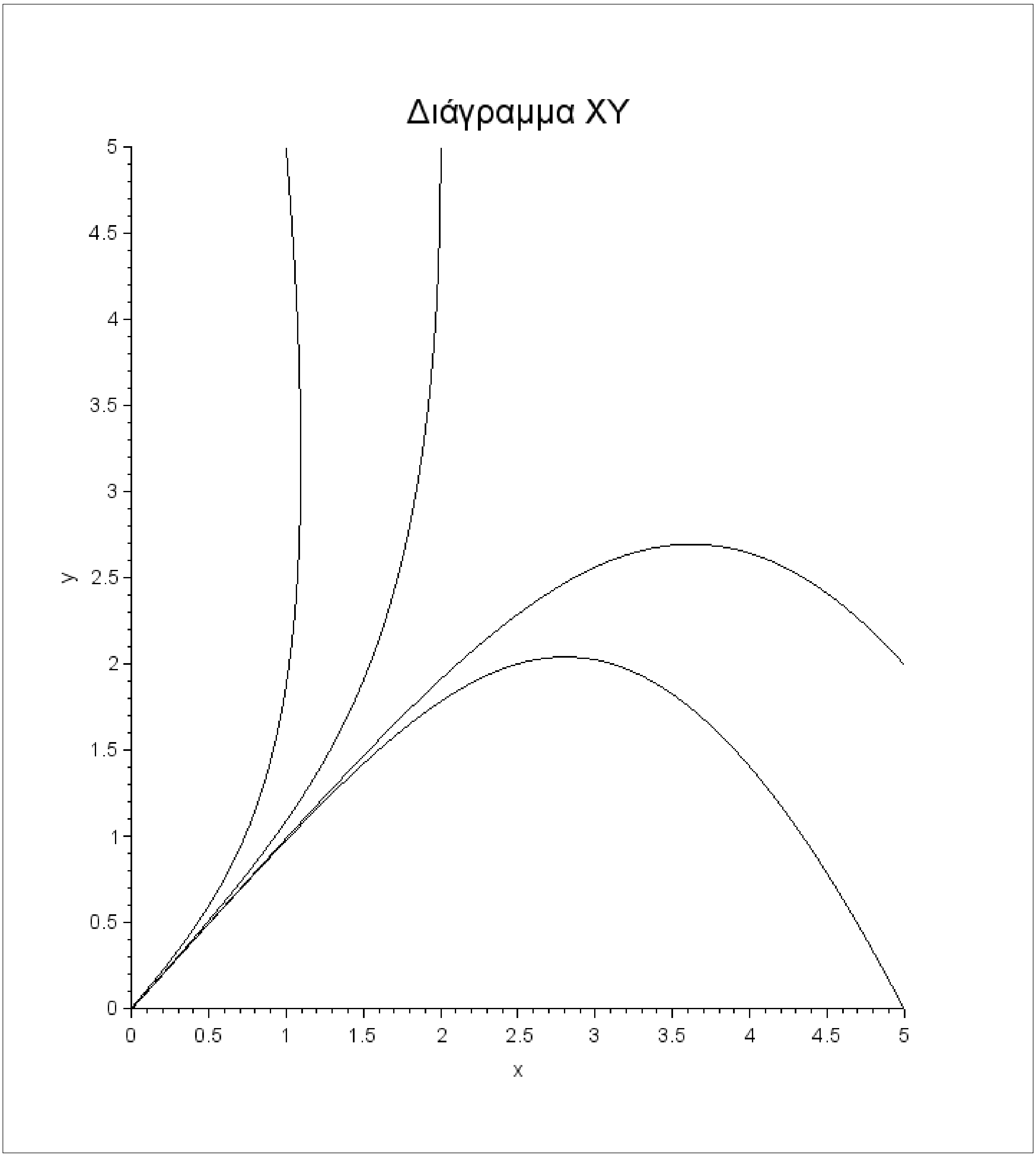
iv. $y(0) = 2, x(0) = 5$



Προσομοίωση 8 - Προσομοίωση αρνητικών g και h με τάση προς αφοπλισμό σε διάγραμμα XY

*Για να θέσουμε τις τιμές του x(0) και y(0) στο πρόγραμμα κάνουμε διπλό κλικ στον ολοκληρωτή (το στοιχείο με το 1/s) και στο παράθυρο διαλόγου απλά εισάγουμε τις τιμές.

Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζουμε τις τιμές του x στον οριζόντιο άξονα και στον κάθετο άξονα, τις τιμές του y.



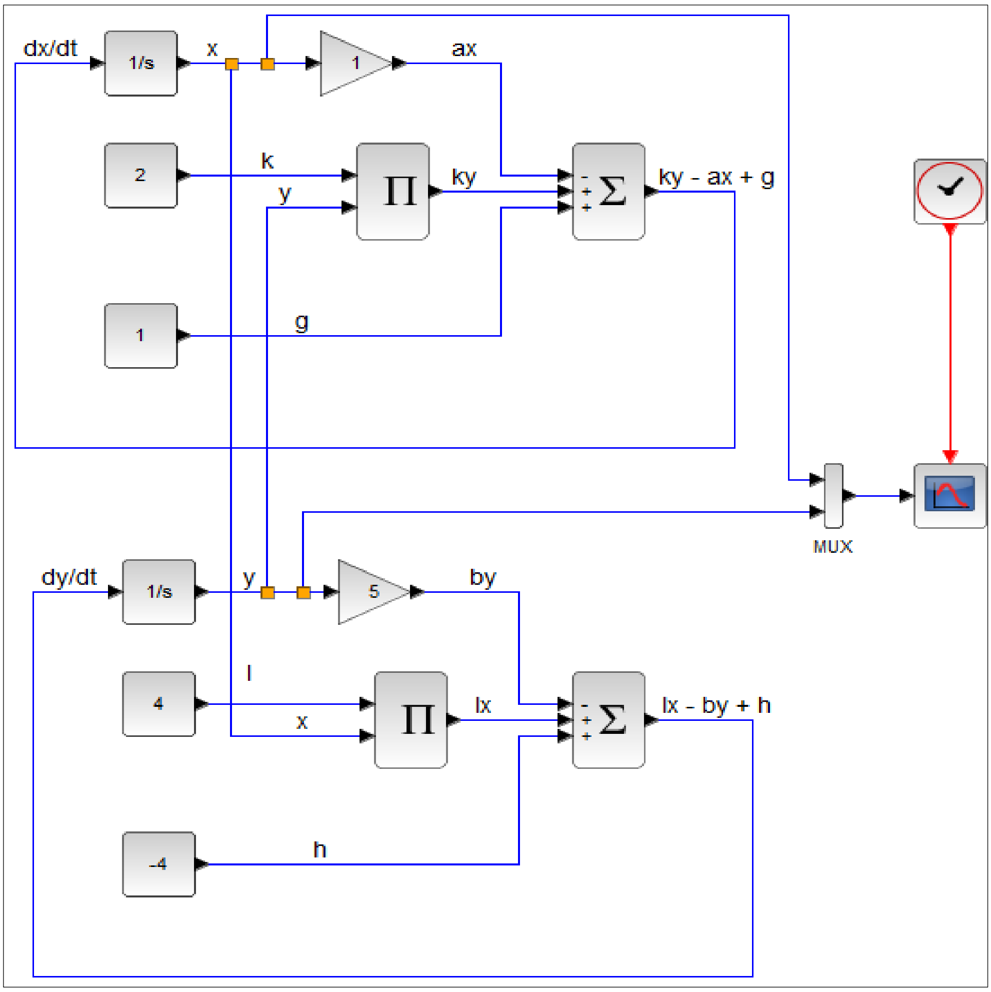
Διάγραμμα 8 - Διάγραμμα XY για αρνητικά g και h με τάση προς αφοπλισμό

Παρατηρούμε σε αυτό το σύστημα ότι οι αρχικές συνθήκες, αργά ή γρήγορα, θα οδηγηθούν προς τον αφοπλισμό, κι αυτό διότι οι παράγοντες g & h είναι αρνητικοί. Οι καμπύλες τείνουν προς το 0 (αφοπλισμός). Συνεπώς, η «καλή θέληση» μαζί με όχι τόσο επιθετικές διαθέσεις, όπως στην προηγούμενη ενότητα, θα οδηγεί πάντα σε αφοπλισμό και ειρήνη μεταξύ των χωρών.

Περίπτωση διαφορετικών προσήμων g & h

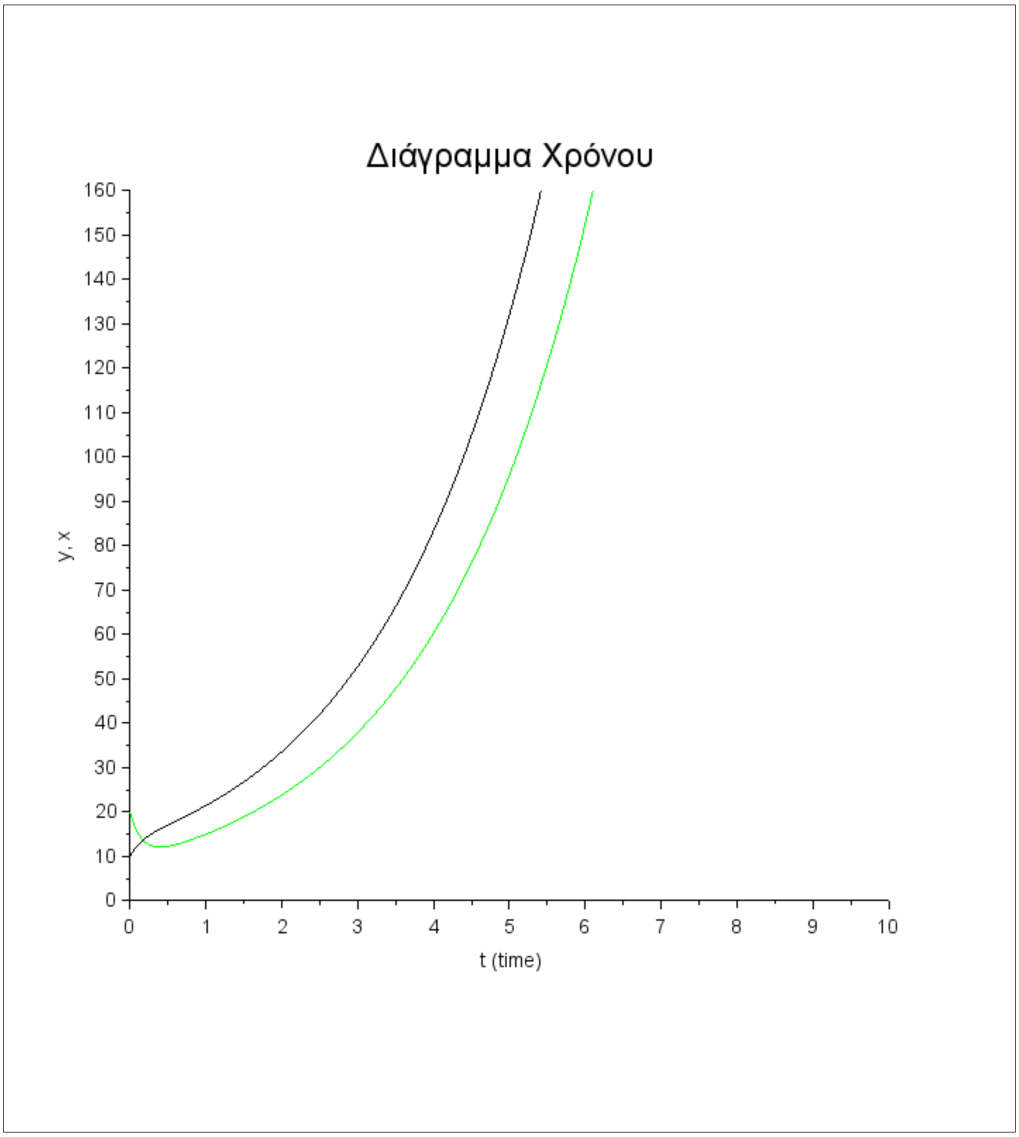
Οι αρχικές τιμές για την επόμενη προσομοίωση θα είναι οι εξής:

1) Για την πρώτη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : k = 2, a = 1, g = 1.
2) Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : l = 4, b = 5, h = -4.
3) Για τις αρχικές τιμές των x και y έχουμε αντίστοιχα: x(0) = 10, y(0) = 20.
4) Ο χρόνος t ∈ [0,10]
5) Τα διαφορετικά πρόσημα g και h υποδηλώνουν ότι η χώρα που έχει αρνητικό πρόσημο στην σταθερά «καλής θέλησης», έχει όντως καλή θέληση, ενώ η άλλη όχι.



Προσομοίωση 9 - Προσομοίωση διαφορετικών προσήμων g και h σε διάγραμμα χρόνου

Η προσομοίωση που ‘τρέξαμε’ επιλύει το σύστημα και απεικονίζει τις λύσεις των συναρτήσεων σε ένα διάγραμμα. Οι λύσεις των μεταβλητών x, y ενώνονται με μία γραμμή. Ο χρόνος εκκίνησης της προσομοίωσης είναι το χρονικό σημείο 0 (δεν μπορεί να είναι αρνητικός), και εκτελείται ως το χρονικό σημείο 10. Παρακάτω απεικονίζεται το διάγραμμα για τις λύσεις των εξισώσεων. Η μαύρη γραμμή ενώνει τις τιμές του x, ενώ η πράσινη του y.



Διάγραμμα 9 - Διάγραμμα συναρτήσει του χρόνου g και h με διαφορετικά πρόσημα

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω γράφημα, οι τιμές της μεταβλητής y, αρχικά φθίνουν κι έπειτα από ένα σημείο ξεκινούν να αυξάνουν. Οι τιμές του x από την άλλη, έχουν αρχικά μεγάλο ρυθμό αύξησης, έπειτα δείχνουν να ελαττώνουν τον ρυθμό παρόλο που συνεχίζουν να αυξάνουν και έπειτα αυξάνουν με τον ίδιο ρυθμό που αυξάνει και το y. Αυτό συμβαίνει διότι οι σταθερές g και h έχουν διαφορετικά πρόσημα, με αποτέλεσμα η χώρα Α να είναι περισσότερο «επιθετική» και κατά συνέπεια να αυξάνει η τιμή του x, ενώ αντίθετα η χώρα Β δείχνοντας «καλή θέληση» αρχικά μειώνει τις τιμές τις, ώσπου φτάνει ένα σημείο που απειλείται (στο σημείο τομής), με αποτέλεσμα να αυξάνεται το y με την πάροδο του χρόνου.

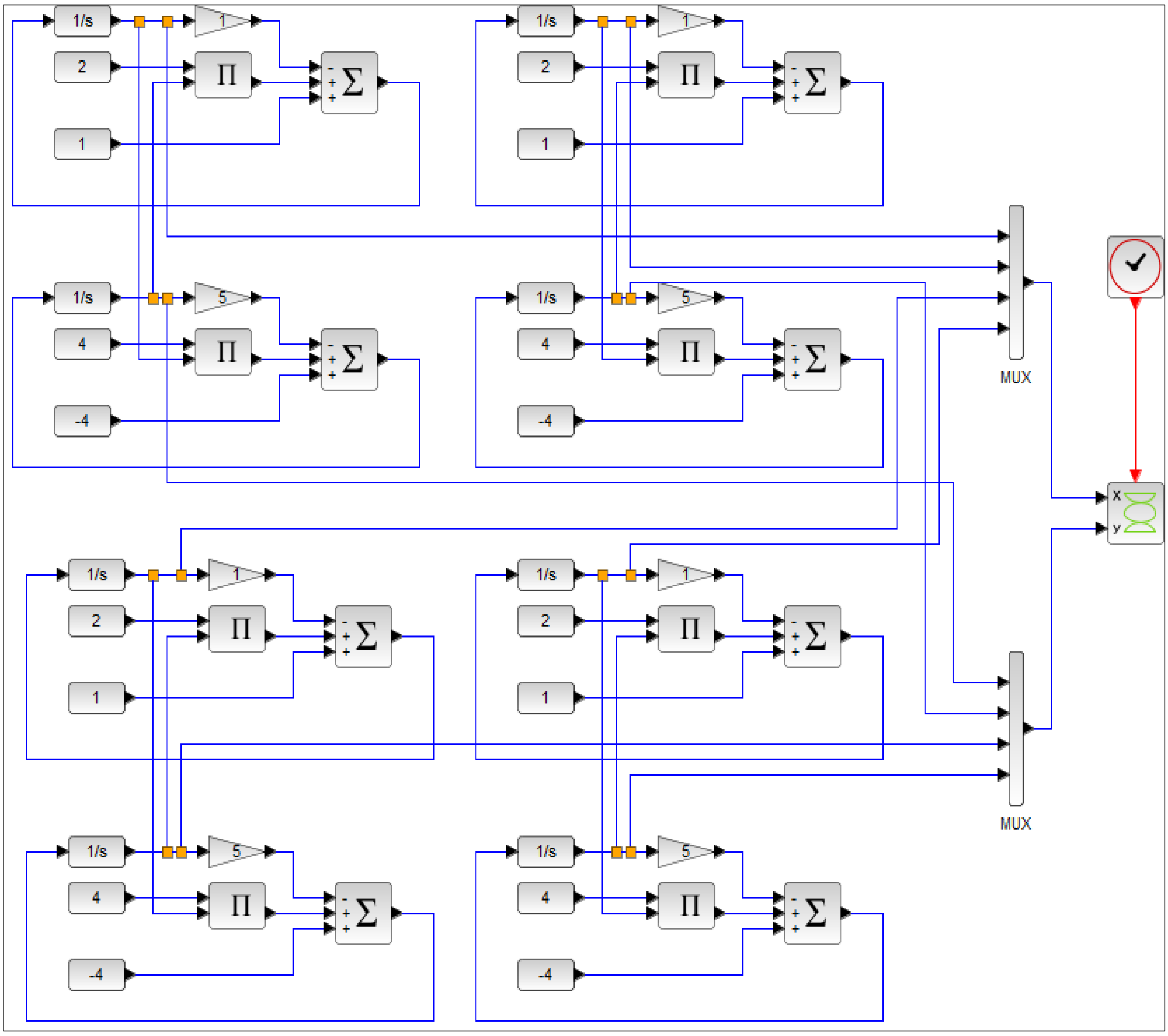
Στην επόμενη προσομοίωση θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύστημα, με διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Θα εξετάσουμε 4 διαφορετικές περιπτώσεις και θα απεικονείσουμε τις καμπύλες που προκύπτουν σε ένα γράφημα της μορφής XY.

i. $y(0) = 1, x(0) = 0$*

ii. $y(0) = 2, x(0) = 0$

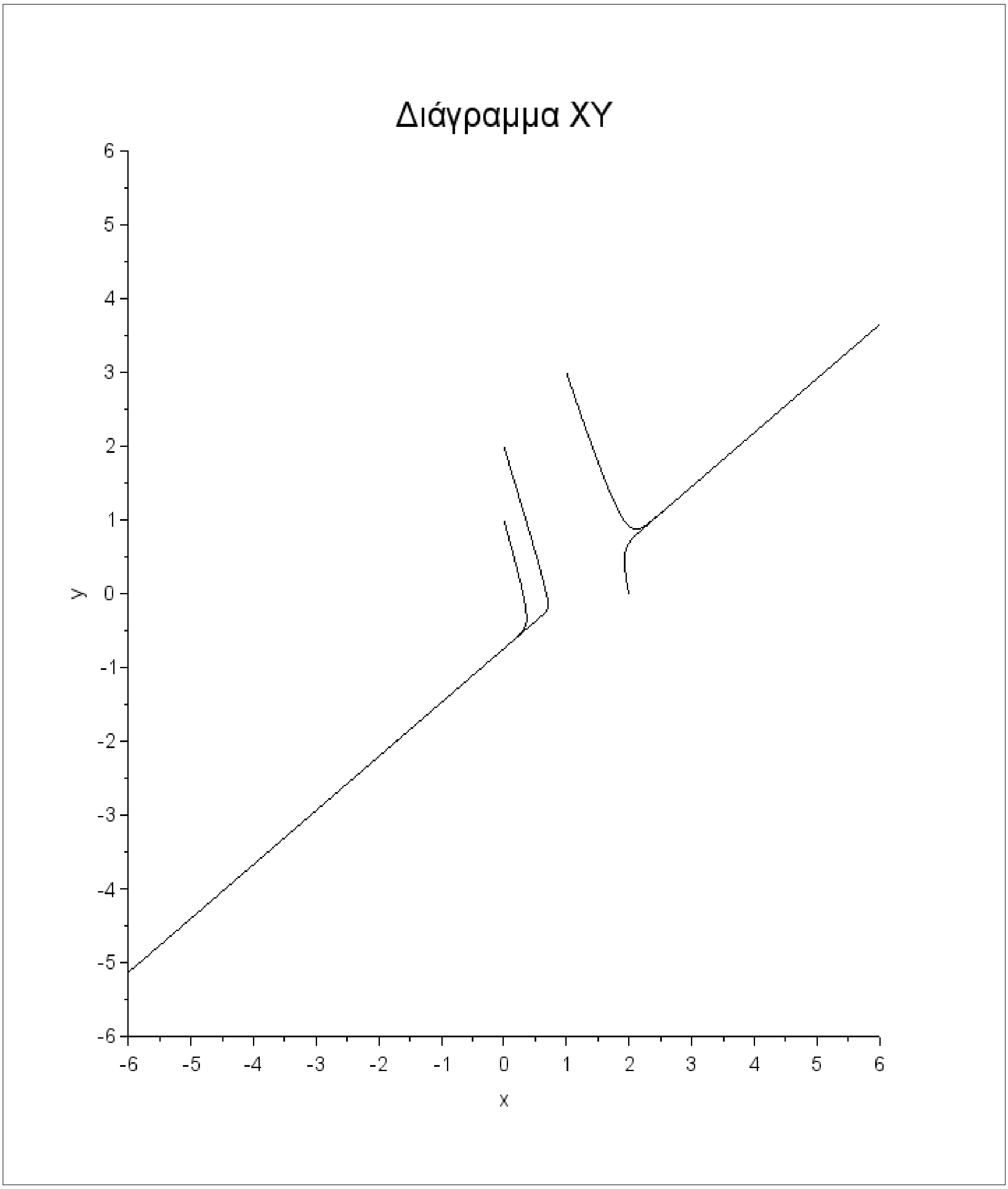
iii. $y(0) = 0, x(0) = 2$

iv. $y(0) = 1, x(0) = 3$



Προσομοίωση 10 - Προσομοίωση διαφορετικών προσήμων g και h σε διάγραμμα XY

Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζουμε τις τιμές του x στον οριζόντιο άξονα και στον κάθετο τις τιμές του y. Οι τιμές που θέσαμε απεικονίζουν τέσσερις διαφορετικές καμπύλες, και έχουν διαφορετικές πορείες.



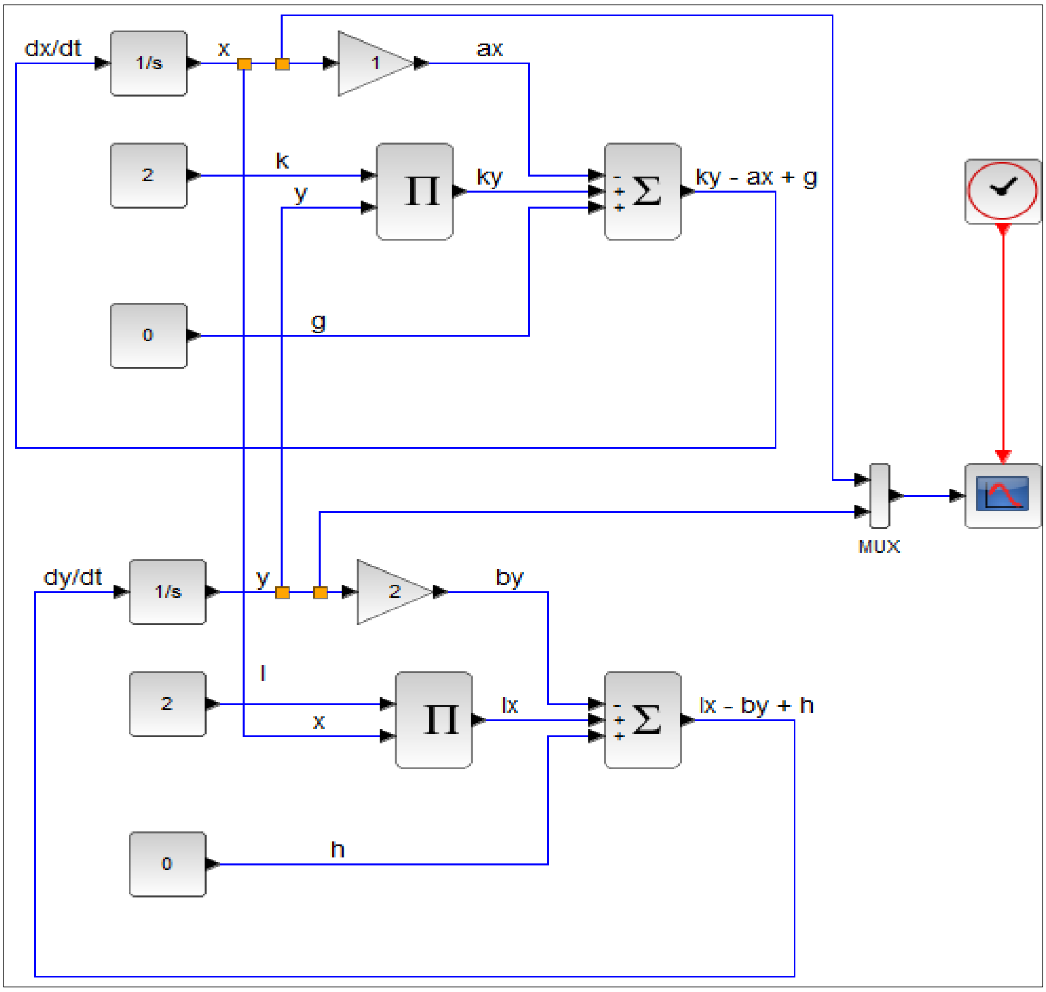
Διάγραμμα 10 - Διάγραμμα XY για g και h με διαφορετικά πρόσημα

Παρατηρούμε ότι όσο πιο κοντά βρίσκονται σε χαμηλές τιμές οι αρχικές συνθήκες, τόσο πιο πιθανό είναι να τείνουν προς τον αφοπλισμό. Στην αντίθετη περίπτωση, οι καμπύλες αυξάνουν προς μεγαλύτερες τιμές. Συνεπώς, οι αρχικές συνθήκες διαμορφώνουν την πορεία του συστήματος και την εξέλιξη του.

Περίπτωση όπου g & h είναι ίσα με 0

Οι αρχικές τιμές για την επόμενη προσομοίωση θα είναι οι εξής:

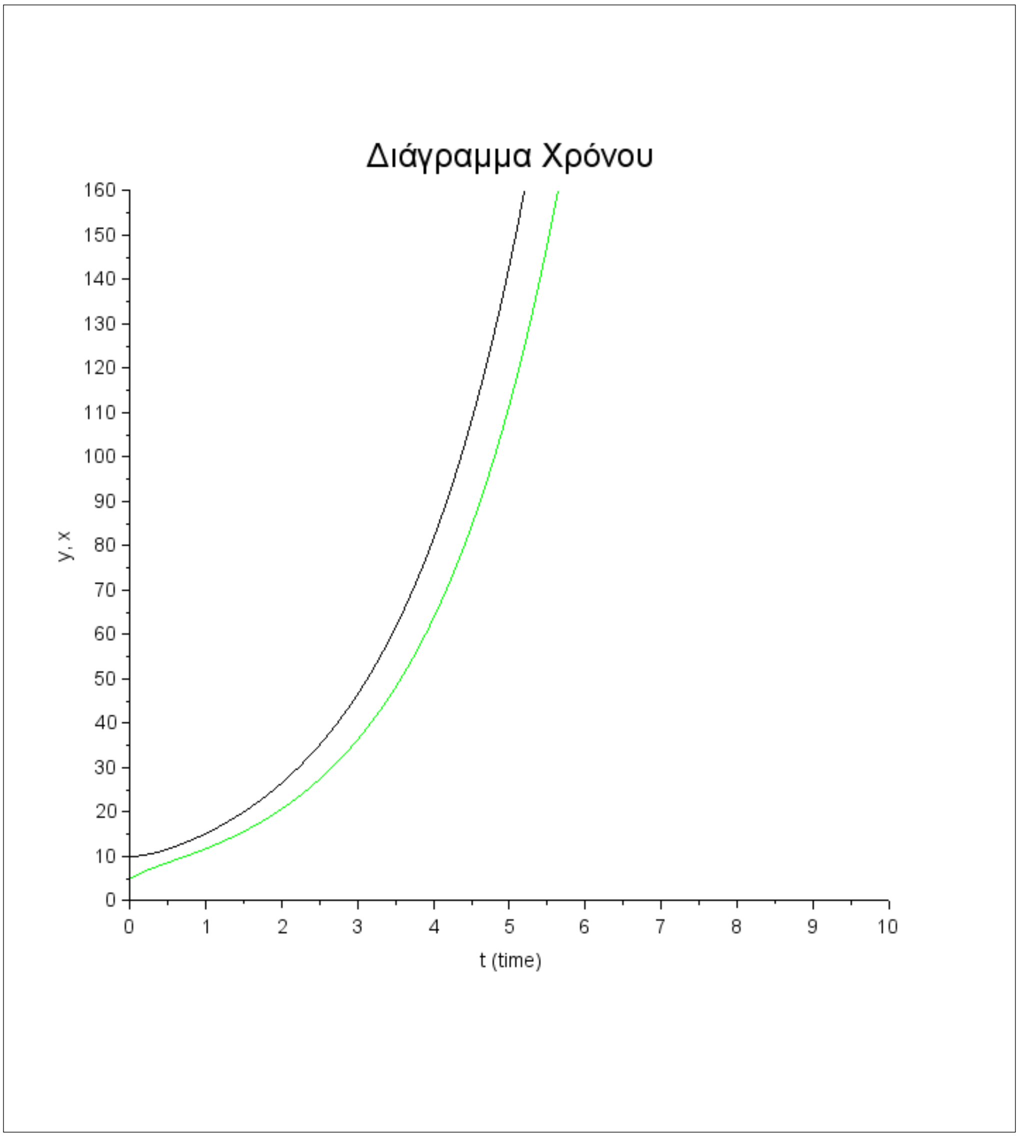
1) Για την πρώτη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : k = 2, a = 1, g = 0.
2) Για την δεύτερη εξίσωση έχουμε τις σταθερές : l = 2, b = 2, h = 0.
3) Για τις αρχικές τιμές των xκαι yέχουμε αντίστοιχα: x(0) = 10, y(0) = 5.
4) Ο χρόνος t ∈ [0,10]
5) Οι μηδενικές τιμές των g και h υποδηλώνουν ότι οι δύο αυτοί παράμετροι δεν επηρεάζουν άμεσα τον εξοπλισμό των 2 χωρών.



Προσομοίωση 11 - Προσομοίωση με g και h ίσα με 0 σε διάγραμμα χρόνου

Στην παραπάνω σχεδίαση, το g & h αναπαρίσταται κανονικά από το «κουτί» σταθερής τιμής και παίρνει την τιμή 0 και στις δυο περιπτώσεις. Αυτό βέβαια, θα μπορούσε να παραληφθεί.

Η προσομοίωση που ‘τρέξαμε’ επιλύει το σύστημα και απεικονίζει τις λύσεις των συναρτήσεων σε ένα διάγραμμα. Οι λύσεις των μεταβλητών x, y ενώνονται με μία γραμμή. Οχρόνος εκκίνησης της προσομοίωσης είναι το χρονικό σημείο 0 (δεν μπορεί να είναι αρνητικός), και εκτελείται ως το χρονικό σημείο 10. Παρακάτω απεικονίζεται το διάγραμμα για τις λύσεις των εξισώσεων. Η μαύρη γραμμή ενώνει τις τιμές του x, ενώ η πράσινη του y.



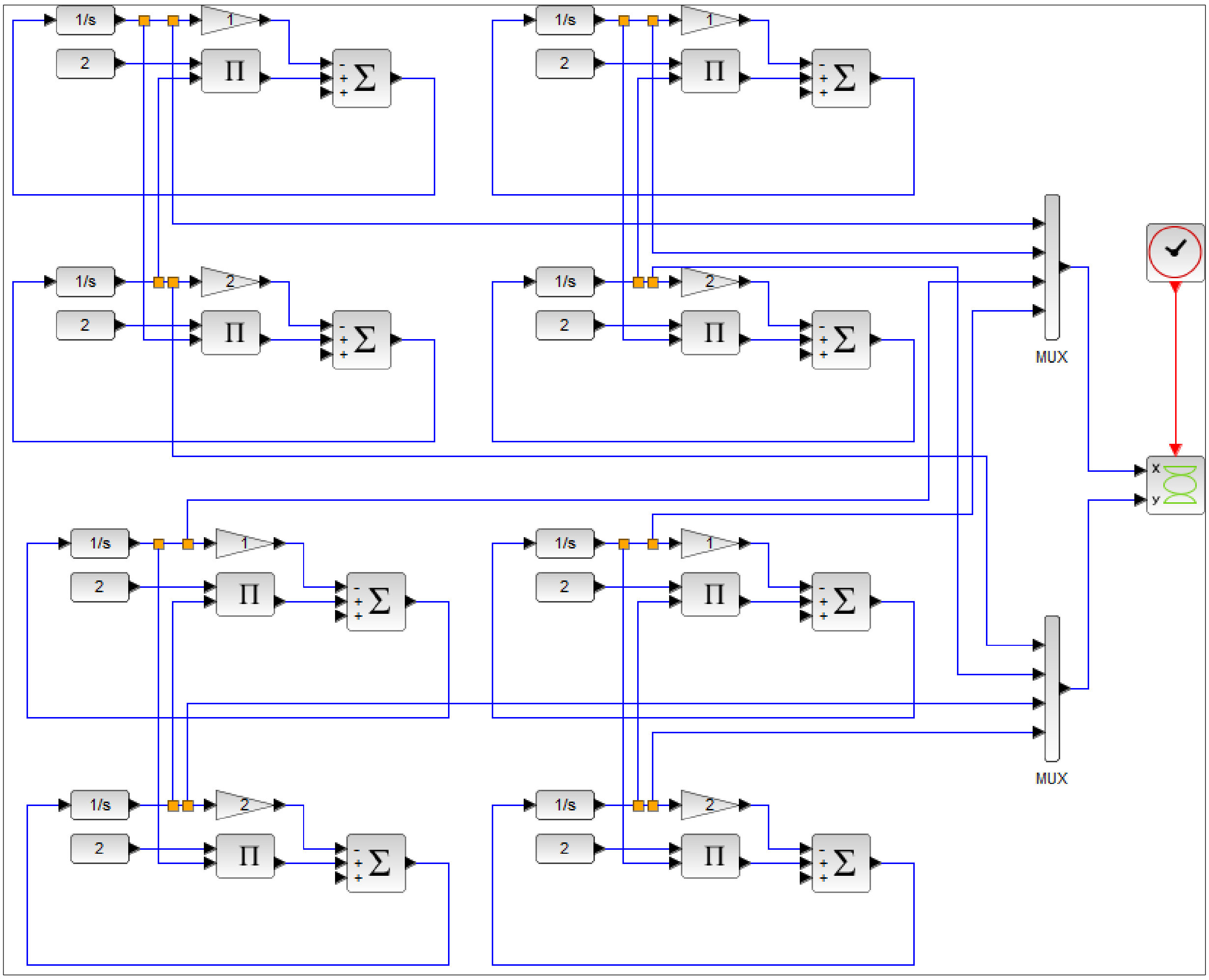
Διάγραμμα 11 - Διάγραμμα συναρτήσει του χρόνου για g και h μηδενικά

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω γράφημα, δεν υπάρχει κάποιο σημείο τομής. Οπότε το σύστημα δεν είναι σταθερό.

Οι τιμές των μεταβλητών x και y, αυξάνουν ραγδαία με την πάροδο του χρόνου. Σε αυτή την περίπτωση οι σταθερές g και h έχουν μηδενικές τιμές, συνεπώς δεν επηρεάζουν καθόλου το αποτέλεσμα της εξίσωσης. Οι υπόλοιπες σταθερές και η αρχικές τιμές τους είναι υπεύθυνες για την πορεία των διαφορετικών εξισώσεων στην πάροδο του χρόνου. Οπότε καθοριστικό ρόλο εδώ παίζουν οι υπόλοιπες σταθερές του συστήματος.

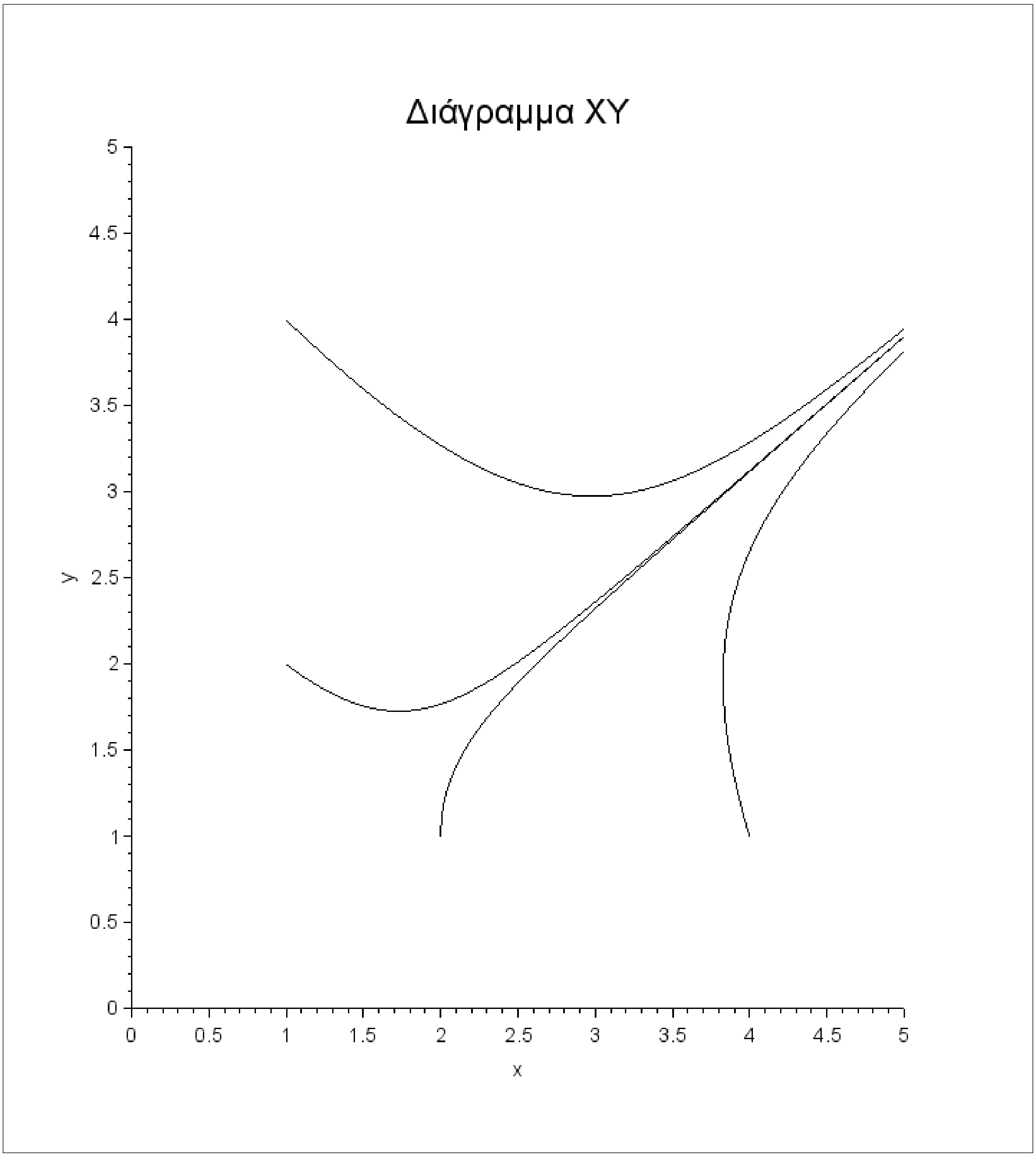
Στην επόμενη προσομοίωση θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο σύστημα, με διαφορετικές αρχικές συνθήκες αυτή τη φορά. Θα εξετάσουμε 4 διαφορετικές περιπτώσεις και θα απεικονείσουμε τις καμπύλες που προκύπτουν σε ένα γράφημα της μορφής XY.

i. $y(0) = 1, x(0) = 2$
ii. $y(0) = 1, x(0) = 4$
iii. $y(0) = 2, x(0) = 1$
iv. $y(0) = 4, x(0) = 1$



Προσομοίωση 12 - Προσομοίωση με g και h ίσα με 0 σε διάγραμμα XY

Στο παρακάτω γράφημα απεικονίζουμε τις τιμές του x στον οριζόντιο άξονα και στον κάθετο τις τιμές του y. Οι καμπύλες οι οποίες προκύπτουν από την προσομοίωση απεικονίζονται στο γράφημα.



Διάγραμμα 12 - Διάγραμμα XY για g και h μηδενικά

Παρατηρούμε ότι για όλες τις αρχικές συνθήκες, το σύστημα αποκτά την ίδια συμπεριφορά, και οι καμπύλες έχουν μια αυξανόμενη πορεία καθώς τείνουν προς υψηλές τιμές.

Το μοντέλο μάχης του Lanchester

Κατά τη διάρκεια του Α' Παγκοσμίου Πολέμου, ο F.W. Lanchester, ένας Βρετανός μηχανικός, σχεδίασε ένα μαθηματικό μοντέλο μάχης, το οποίο έχει σκοπό να αναπαραστήσει και να περιγράψει τον τρόπο με τον οποίο δύο δυνάμεις συγκρούονται, και ως αποτέλεσμα να αποδοθεί η εξέλιξη αυτής της σύγκρουσης στη διάρκεια του χρόνου.

Το μοντέλο μάχης του Lanchester, ή αλλιώς και γνωστό ως «οι νόμοι του Lanchester» είναι ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων το οποίο έχει ως στόχο τον υπολογισμό της σχετικής δύναμης των στρατευμάτων. Περιγράφει τις δυνάμεις των στρατευμάτων Α και Β ως εξισώσεις του χρόνου, με τις εξισώσεις να εξαρτώνται μόνο από τα Α και Β.

Οι νόμοι του Lanchester βρίσκονται στο επίκεντρο των μοντέλων συμβατικής ή παραδοσιακής μάχης και προσπαθούν να δώσουν εξήγηση στην αντιπαράθεση ποιότητας και ποσότητας παρέχοντας απλά παραδείγματα για την κατανόηση της δυναμικής των μαχών. Έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν από την υπουργείο εξωτερικών των Η.Π.Α, από τις αρχές του 1960.

Οι εξισώσεις οι οποίες απαρτίζουν το μοντέλο μάχης του Lanchester, με την απλότητα και την κομψότητα τους παρέχουν στους αναλυτές μια βάση για την δημιουργία της φυσικής εξέλιξης των μαχών ανάμεσα σε συγκρουόμενες δυνάμεις. Με την βοήθεια των υπολογιστών μπορούν εύκολα να μοντελοποιηθούν, να μελετηθούν και να εξαχθούν συμπεράσματα για την πολύπλοκη φύση των συγκρούσεων.

Δύο από τις βασικές μελέτες του Lanchester, έχουν γίνει γνωστοί και ως «νόμοι του Lanchester»:

a. Ο τετραγωνικός νόμος (square law of Lanchester)
b. Ο γραμμικός νόμος (linear law of Lanchester)

Οι παραπάνω νόμοι είναι οι πυλώνες του μοντέλου μάχης του Lanchester, και έχουν ευρεία εφαρμογή.

Κατά προσέγγιση, ο τετραγωνικός νόμος δηλώνει ότι η μέτρηση της μαχητικής δύναμης ορίζεται ως το τετράγωνο του αριθμητικού μεγέθους της δύναμης (στρατεύμα) επί την αποδοτικότητά της (θανατώσεις ή τραυματισμοί) απέναντι στον εχθρό. Με αυτό το κριτήριο, συνεπάγεται ότι εάν δυο αντικρουόμενες δυνάμεις έχουν τον ίδιο αριθμό σε μέγεθος (είτε πρόκειται για στρατιώτες, είτε για άρματα μάχης κλπ) τότε δεν θα έχουμε νικητή. Συνεπώς, στον τετραγωνικό νόμο μεγαλύτερη βαρύτητα προσδιορίζεται στη μεταβλητή που αναπαριστά το αριθμητικό μέγεθος της δύναμης, παρά η αποδοτικότητα απέναντι στην αντίπαλη μαχητική δύναμη. Για αυτό το λόγο έχει γίνει ιδιαίτερα γνωστός νόμος στην αντιπαράθεση μεταξύ ποιότητας και ποσότητας.

Από την άλλη, ο γραμμικός νόμος του Lanchester είναι λιγότερο δημοφιλής, διότι είναι κυρίως υποθετικός μιας και αναφέρεται σε παλαιότερα χρόνια, όπου δύο φυλές έρχονταν αντιμέτωπες, για την κατάκτηση νέων εδαφών ή διάφορες άλλες φιλοδοξίες τους. Η διαφορά έγκειτα στο γεγονός ότι κάθε μάχη μεταξύ των δυνάμεων γινόταν κατά μέτωπο. Ένας πολεμιστής μπορούσε να πολεμήσει κάθε φορά έναν και μόνο έναν πολεμιστή. Οι μάχες ήταν ένας εναντίον ενός, σε αντίθεση με τις νεότερες εποχές όπου μπορεί ένας στρατιώτης να ρίχνει πυρά σε περισσότερους στόχους ταυτόχρονα, και την ίδια ώρα να δέχεται πυρά από περισσότερες πηγές. Συνεπώς γίνεται αντιληπτό, ότι σε αντίθεση με τον τετραγωνικό νόμο του Lanchester, στον γραμμικό νόμο, είναι ισσοσταθμισμένο το βάρος ανάμεσα στο αριθμητικό μέγεθος και στην αποδοτικότητα των δυνάμεων.

Οι νόμοι του Lanchester δεν είναι το μοναδικό αξιωσημείωτο έργο του F.W. Lanchester, του Βρετανού πολυμαθή και μηχανικού ο οποίος έχει συνεισφέρει σημαντικά στον τομέα της αεροδυναμικής και της μηχανολογίας.

Τετραγωνικός νόμος του Lanchester

Ο Lanchester παρατήρησε ότι στα πεδία σύγχρονων μαχών, η εξέλιξη της πορείας της μάχης εξαρτάται από τα πυρά των οπλιτών και από το συνολικό τους αριθμητικό μέγεθος. Πολλαπλοί οπλίτες με τυφέκια μπορούν να στοχεύουν συγχρόνως ένα στόχο χωρίς να υπάρχει άμεση παρέμβαση. Αυτό σημαίνει ότι και οι δυο πλευρές μπορούν να στοχεύουν και να συγκεντρώνουν τα πυρά τους προς επιλεγμένους στόχους, όπου διαμοιράζονται ομοιόμορφα, εώς ότου αυτοί να καταστούν ανενεργοί (είτε λόγω τραυματισμού είτε θανάτου). Οι στόχοι θα πρέπει να είναι εμφανείς, και εφόσον αποκοπούν από τη μάχη, να επιλέγονται νέοι στόχοι άμεσα.

Ο τετραγωνικός νόμος προκύπτει από τα παραπάνω λεγόμενα. Αν υποθέσουμε δύο διαφορετικές αριθμητικές δυνάμεις οπλιτών, Α και Β οι οποίες μπορούν να συγκρουστούν σε ανοιχτό πεδίο μάχης, οπλισμένοι με τυφέκια, έτσι ώστε να έχουν ορατότητα και να μπορούν να στοχεύσουν τους αντίπαλους στόχους και εφόσον τους πετύχουν και τους βγάλουν εκτός μάχης, να μπορούν άμεσα να αλλάξουν στόχο. Σε κάθε σημείο του χρόνου, ένας οπλίτης της αριθμητικής δύναμης Α, έχει συγκεκριμένη πιθανότητα να πετύχει τον προκαθορισμένο του στόχο και να τον βγάλει εκτός μάχης. Η πιθανότητα αυτή να πετύχει και να θέσει εκτός μάχης τον στόχο, αν πολλαπλασιαστεί με τον ρυθμό εκτόξευσης των πυρών, μας δίνει την αποτελεσματικότητα ή αποδοτικότητα. Πολλαπλασιάζοντας αυτή την αποδοτικότητα με την αριθμητική δύναμη Α, λαμβάνουμε ως αποτέλεσμα τον αριθμό των οπλιτών που καθίστανται ανενεργοί της αριθμητικής δύναμης Β.

Συνεπώς, το σύνολο των απωλειών της αριθμητικής δύναμης Β παράγεται από το γινόμενο του συνολικού αριθμού της δύναμης Α επί την αποδοτικότητα τους. Με αυτά ως δεδομένα και με την υπόθεση ότι η κάθε πλευρά αποτελείται από ομογενείς δυνάμεις με τους ίδιους τύπους όπλων, είναι το ίδιο ευάλωτοι και χρησιμοποιούν και στοχεύουν αμέσα τους στόχους τους, ο τετραγωνικός νόμος διαμορφώνεται ως εξής:

$$\frac{dA}{dt} = -b\ B$$

$$\frac{dB}{dt} = -a\ A$$

$\frac{dA}{dt}$: είναι ο ρυθμός μεταβολής της δύναμης Α στην πάροδο του χρόνου t

$\frac{dB}{dt}$: είναι ο ρυθμός μεταβολής της δύναμης Β στην πάροδο του χρόνου t

Α, Β : αριθμητικά στρατεύματα των δύναμεων, δηλαδή ο αριθμός των οπλιτών, των αρμάτων κλπ.

α, b: η αποδοτικότητα των δυνάμεων, δηλαδή την ικανότητα τους να σκοτώνουν, ή να τραυματίζουν τις μοναδιαίες δυνάμεις της άλλης πλευράς.

Λύνοντας τις εξισώσεις για περίπτωση ισότητας των δυνάμεων έχουμε τη συνθήκη ισότητας για τον τετραγωνικό νόμο:

$$b\ B^2(0) = a\ A^2(0)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι σε ένα μικρό χρονικό διάστημα ο ρυθμός των απωλειών μιας δύναμης είναι ανάλογος με τον αριθμό της άλλης δύναμης και της αποδοτικότητας της. Παρακάτω, θα προσομοιώσουμε κάποια αριθμητικά παραδείγματα και θα αναλύσουμε κάποια διαγράμματα ως προς την συμπεριφορά τους.

Προσομοιώσεις Τετραγωνικού Νόμου

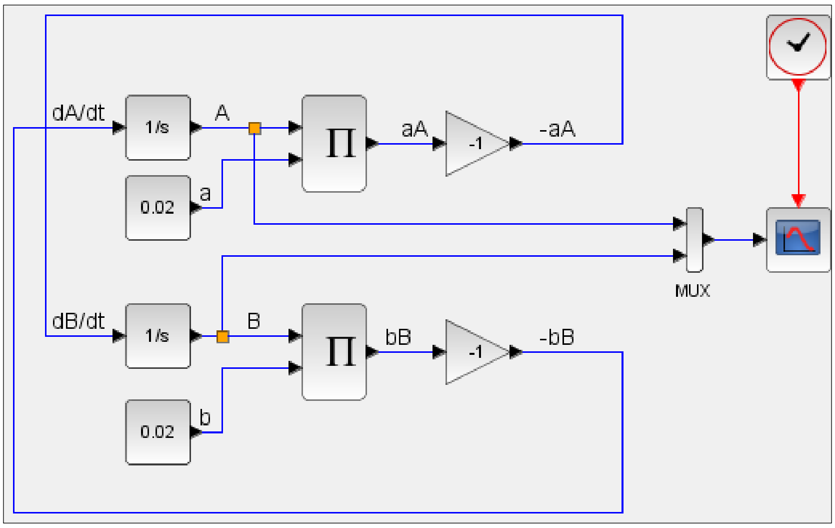
Στη συνέχεια αυτής της εργασίας, θα χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα Xcos του Scilab για να προσομοιώσουμε και να αναπαραστήσουμε κάποια διαγράμματα, σύμφωνα με τον τετραγωνικό νόμο του Lanchester, έτσι ώστε να δούμε κάποιες πιθανές περιπτώσεις και να μελετήσουμε την συμπεριφορά του μοντέλου στο πεδίο του χρόνου. Θα προσπαθήσουμε να καλύψουμε ένα μεγάλο φάσμα πιθανών περιπτώσεων, όταν δυο στρατιωτικές δυνάμεις έρχονται σε σύγκρουση και θα μελετήσουμε τα διαγράμματα που προκύπτουν, θέτοντας διαφορετικές αρχικές τιμές για τα αριθμητικά μεγέθη των στρατών που εμπλέκονται, καθώς και για την αποδοτικότητα των οπλιτών όπου απαρτίζουν αυτές τις στρατιές. Θα κατασκευασθεί το αρχικό μοντέλο και πάνω σε αυτό θα αλλάζουμε κάθε φορά τις παραμέτρους που θέλουμε, έτσι ώστε να αποδίδεται το τελικό διάγραμμα. Η στρατιά Α θα αποδίδεται με μαύρο χρώμα, ενώ η Β με πράσινο.

Τετραγωνικός νόμος Περίπτωση 1

Στην πρώτη περίπτωση θα θέσουμε ως αρχικές τιμές τις εξής:

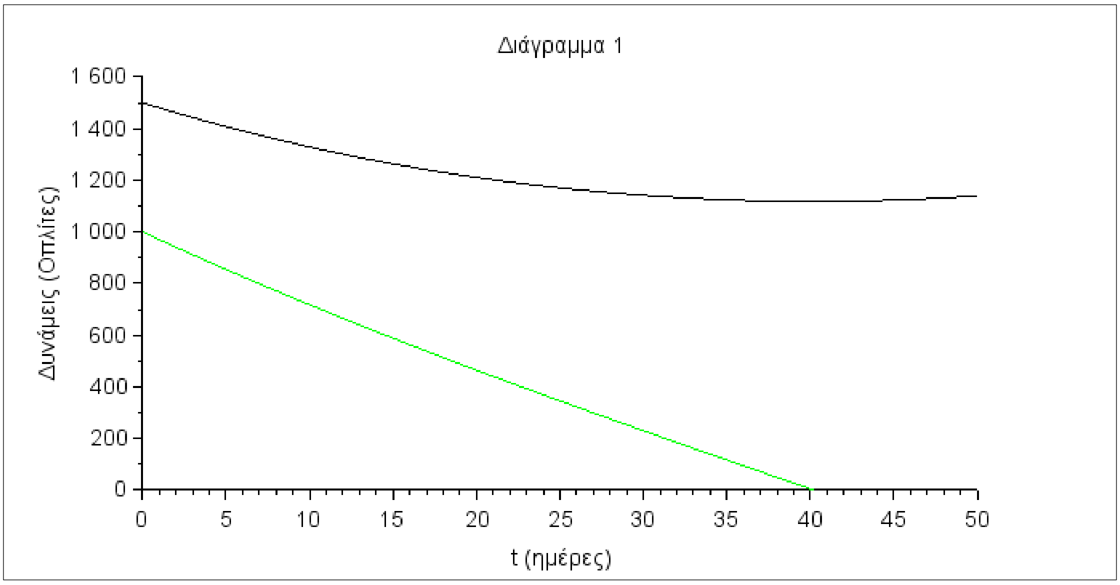
- A: 1500 οπλίτες, a: 0.02 αποδοτικότητα
- B: 1000 οπλίτες, b: 0.02 αποδοτικότητα (πράσινη καμπύλη)
- Ορίζεται ο χρόνος της προσομοίωση σε t ∈ [0,50] (ημέρες μάχης)

Παρακάτω απεικονίζεται το σύστημα προσομοίωσης και έχει τις αρχικές τιμές που ορίσαμε.



Προσομοίωση 13 – Προσομοίωση τετραγωνικού νόμου περίπτωση 1

Εκτελώνταςτην παραπάνω προσομοίωση παράγεται το παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα 13 – Διάγραμμα τετραγωνικού νόμου περίπτωση 1

Όπως είναι εμφανές από το διάγραμμα της προηγούμενης σελίδας(Διάγραμμα 13) οι δύο καμπύλες που αναπαριστούν τον αριθμό τον οπλιτών στην πάροδο του χρόνου φθίνουν. Οι δύο δυνάμεις έχουν ακριβώς την ίδια αποδοτικότητα, οπότε η εξέλιξη της μάχης κρίνεται από έναν και μόνο παράγοντα, τον συνολικό αριθμό οπλιτών των δυνάμεων. Η δύναμη Α έχοντας αριθμητικό πλεονέκτημα κατά 500 οπλίτες, όπως είναι αναμενόμενο, είναι η νικήτρια της αναμέτρησης και σε 40 περίπου ημέρες η δύναμη Β φτάνει στο 0, δηλαδή όλοι της οι οπλίτες έχουν τεθεί εκτός μάχης. Οι απώλειες για την δύναμη Α που ξεκινά με 1500 οπλίτες στις τάξεις της ανέρχεται περίπου στους 300 οπλίτες.

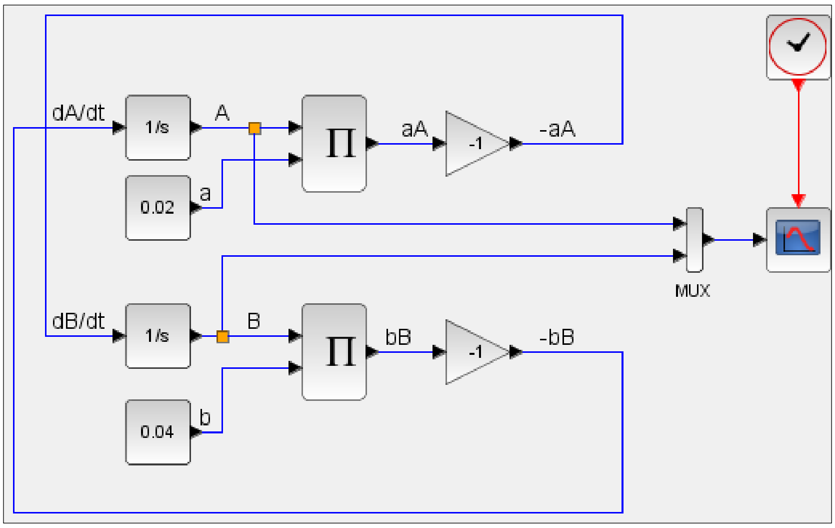
Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα, φαίνεται να αυξάνει η καμπύλη της Α έπειτα από t=40, κι αυτό συμβαίνει διότι στην προσομοίωση δεν έχει τεθεί συνθήκη διακοπής όταν μια δύναμη φτάσει στο σημείο 0, όπου δηλαδή η μάχη σταματάει. Από μαθηματικής άποψης η προσομοίωση λειτουργεί σωστά και συμπεριφέρεται όπως ακριβώς θα έπρεπε να λειτουργεί, παρόλα αυτά ποιοτικά δεν έχει κανένα νόημα, μιας και είναι αδύνατο να «αναγεννιούνται» οι οπλίτες που χάθηκαν.

Τετραγωνικός νόμος Περίπτωση 2

Στην δεύτερη περίπτωση θα θέσουμε ως αρχικές τιμές τις εξής:

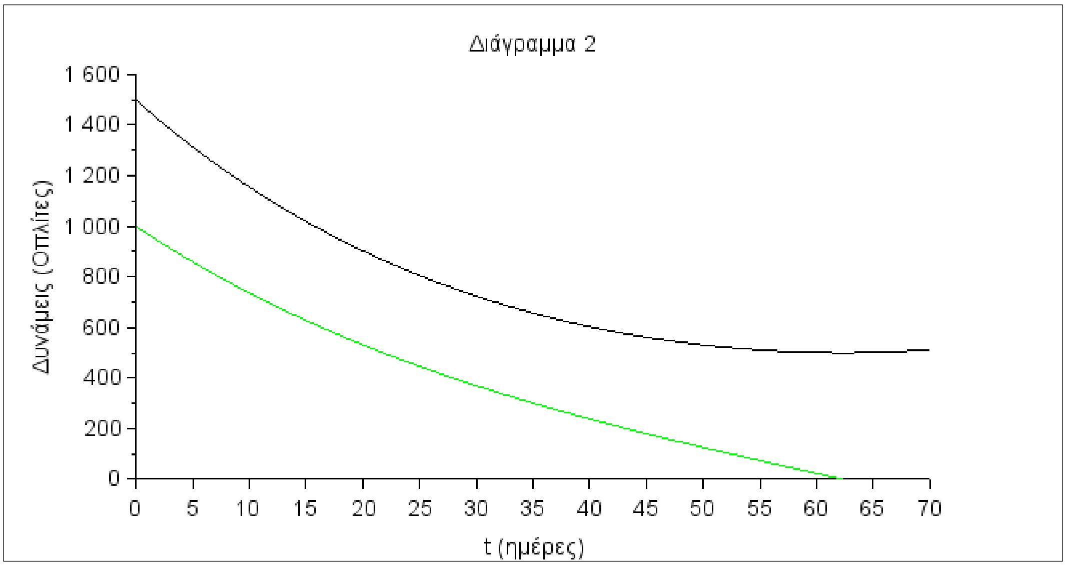
- Α: 1500 οπλίτες, a: 0.02 αποδοτικότητα
- Β: 1000 οπλίτες, b: 0.04αποδοτικότητα
- Ορίζεται ο χρόνος της προσομοίωση σε t ∈ [0,70] (ημέρες μάχης)

Παρακάτω απεικονίζεται το σύστημα προσομοίωσης και έχει τις αρχικές τιμές που ορίσαμε.



Προσομοίωση 14 - Προσομοίωση τετραγωνικού νόμου περίπτωση 2

Εκτελώντας την παραπάνω προσομοίωση παράγεται το παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα 14 – Διάγραμμα τετραγωνικού νόμου περίπτωση 2

Όπως είναι εμφανές από το παραπάνω διάγραμμα (Διάγραμμα 14) οι δύο καμπύλες που αναπαριστούν τον αριθμό τον οπλιτών στην πάροδο του χρόνου φθίνουν. Οι δύο δυνάμεις αυτή τη φορά εκτός από την διαφορά τους στο συνολικό αριθμό οπλιτών, έχουν και διαφορετική αποδοτικότητα στην εξουδετέρωση των αντίπαλων δυνάμεων. Η δύναμη Α έχοντας αριθμητικό πλεονέκτημα κατά 500 οπλίτες, αλλά έχοντας υποδιπλάσια αποδοτοτικότητα, είναι η νικήτρια της αναμέτρησης και πάλι, αυτή τη φορά όμως θα χρειαστούν περισσότερες ημέρες μάχης από ότι στην προηγούμενη προσομοίωση που ήταν 40 περίπου ημέρες. Συνολικά 62-63 ημέρες εξελίσσεται αυτή η μάχη όπου η δύναμη Β φτάνει στο 0, δηλαδή όλοι της οι οπλίτες έχουν τεθεί εκτός μάχης. Οι απώλειες για την δύναμη Α που ξεκινά με 1500 οπλίτες στις τάξεις της ανέρχεται πλέον περίπου στους 900-1000 οπλίτες. Αυτό σημαίνει ότι αν και οι αρχικές δυνάμεις είναι το ίδιο με την προηγούμενη προσομοίωση, η διπλάσια αποδοτικότητα της δύναμης Β, καταφέρνει να «κρατηθεί» περισσότερο χρόνο στη μάχη, καταστρέφοντας επίσης και μεγαλύτερο αριθμό οπλιτών της δύναμης Α. Παρόλα αυτά η ποσότητα εξακολουθεί να υπερτερεί της ποιότητας.

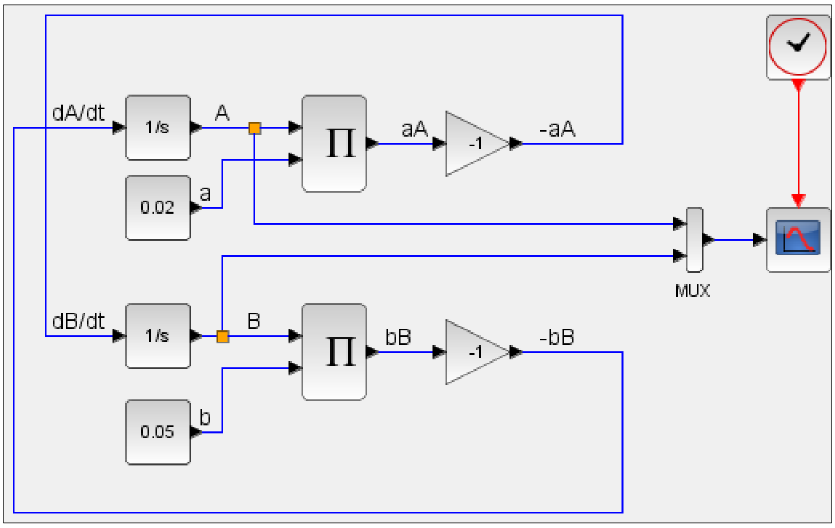
Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα, φαίνεται να αυξάνει η καμπύλη της Α έπειτα από t=62, κι αυτό συμβαίνει διότι στην προσομοίωση δεν έχει τεθεί συνθήκη διακοπής όταν μια δύναμη φτάσει στο σημείο 0, όπου δηλαδή η μάχη σταματάει. Όπως και στη προηγούμενη, από μαθηματικής άποψης η προσομοίωση λειτουργεί σωστά και συμπεριφέρεται όπως ακριβώς θα έπρεπε να λειτουργεί, παρόλα αυτά ποιοτικά δεν έχει κανένα νόημα, μιας και είναι αδύνατο να «αναγεννιούνται» οι οπλίτες που χάθηκαν. Το ίδιο θα συμβεί και στα επόμενα παραδείγματα, οπότε αυτή η εξήγηση θα παραβλέπεται και θα θεωρείται δεδομένη.

Τετραγωνικός νόμος Περίπτωση 3

Στην τρίτη περίπτωση θα θέσουμε ως αρχικές τιμές τις εξής:

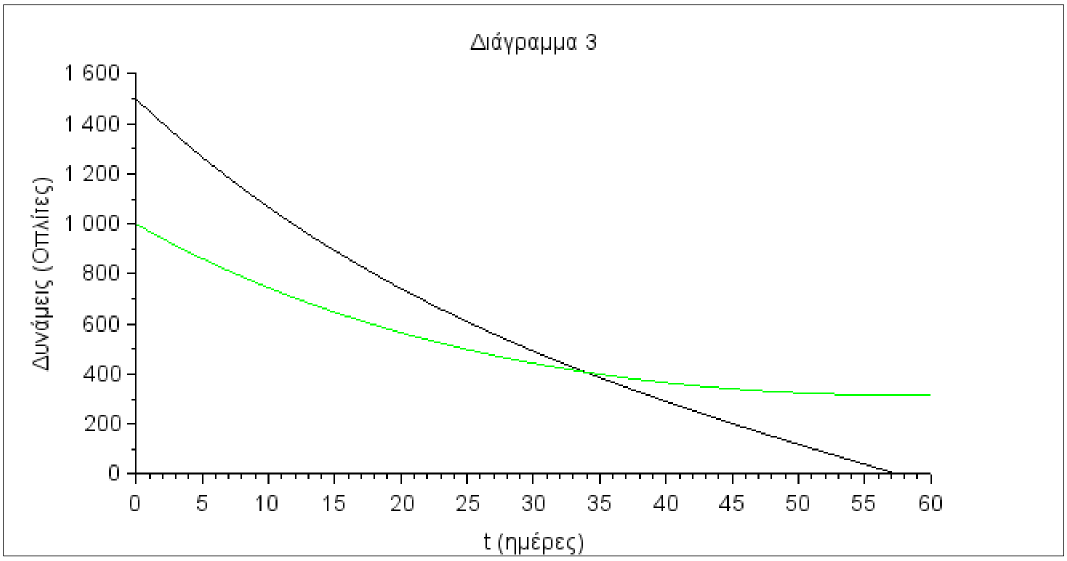
- A: 1500 οπλίτες, a: 0.02 αποδοτικότητα
- B: 1000 οπλίτες, b: 0.05 αποδοτικότητα
- Ορίζεται ο χρόνος της προσομοίωση σε t ∈ [0,60] (ημέρες μάχης)

Παρακάτω απεικονίζεται το σύστημα προσομοίωσης και έχει τις αρχικές τιμές που ορίσαμε.



Προσομοίωση 15 - Προσομοίωση τετραγωνικού νόμου περίπτωση 3

Εκτελώντας την παραπάνω προσομοίωση παράγεται το παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα 15 - Διάγραμμα τετραγωνικού νόμου περίπτωση 3

Στο προηγούμενο διάγραμμα (Διάγραμμα 15), που απεικονίζεται στην προηγούμενη σελίδα, βλέπουμε πάλι τις δυνάμεις να φθίνουν μέχρι το σημείο όπου μια καμπύλη φτάνει στο 0. Αυτή τη φορά, ο αριθμός των οπλιτών και για τις δύο δυνάμεις παραμένει ο ίδιο με πρίν, η αποδοτικότητα όμως, αυξάνεται περισσότερο για την δύναμη B. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν, η ποιότητα υπερτερεί της ποσότητας, αν η διαφορά είναι τόσο μεγάλη, με αποτέλεσμα νικητής αυτής της αναμέτρησης να είναι η δύναμη B. Η προσομοίωση διαρκεί 57 ημέρες περίπου, όπου οι δυνάμεις της A καταρρέουν, και οι απώλειες της δύναμης B ανέρχονται περίπου στις 650 μονάδες, δηλαδή οπλίτες.

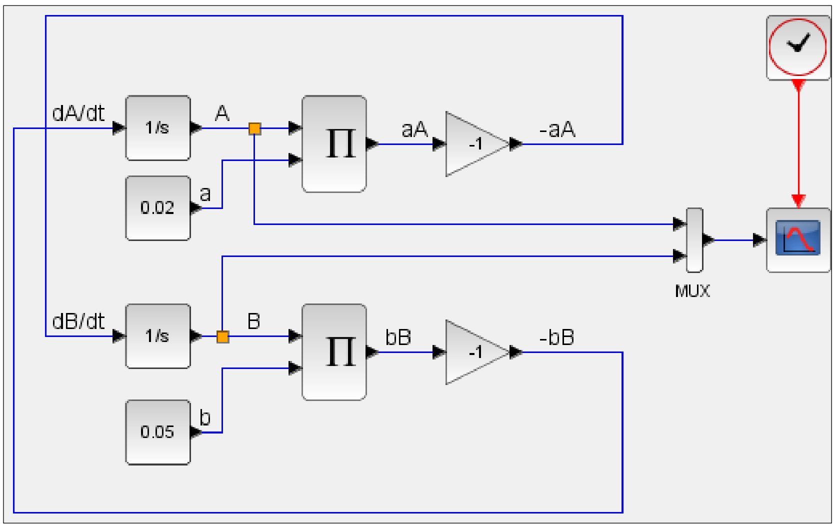
Συνεπάγεται λοιπόν, πως ακόμα και αν η μια δύναμη είναι μεγαλύτερη σε συνολικό αριθμό από την άλλη, μεγάλη διαφορά της αποδοτικότητας, μπορεί να καταστεί ικανή έτσι ώστε να έχει θετικό αποτέλεσμα για την δύναμη που υστερεί σε ποσότητα. Το πόσο μεγάλη θα πρέπει να είναι η διαφορά, εξαρτάται κάθε φορά από τον αριθμό των δυνάμεων. Στο επόμενο παράδειγμα θα δείξουμε τις ίδιες αποδοτικότητες των δυνάμεων, αλλά με μεγαλύτερη διαφορά στον αριθμό οπλιτών αυτή τη φορά για τη δύναμη A.

Τετραγωνικός νόμος Περίπτωση 4

Στην τέταρτη περίπτωση θα θέσουμε ως αρχικές τιμές τις εξής:

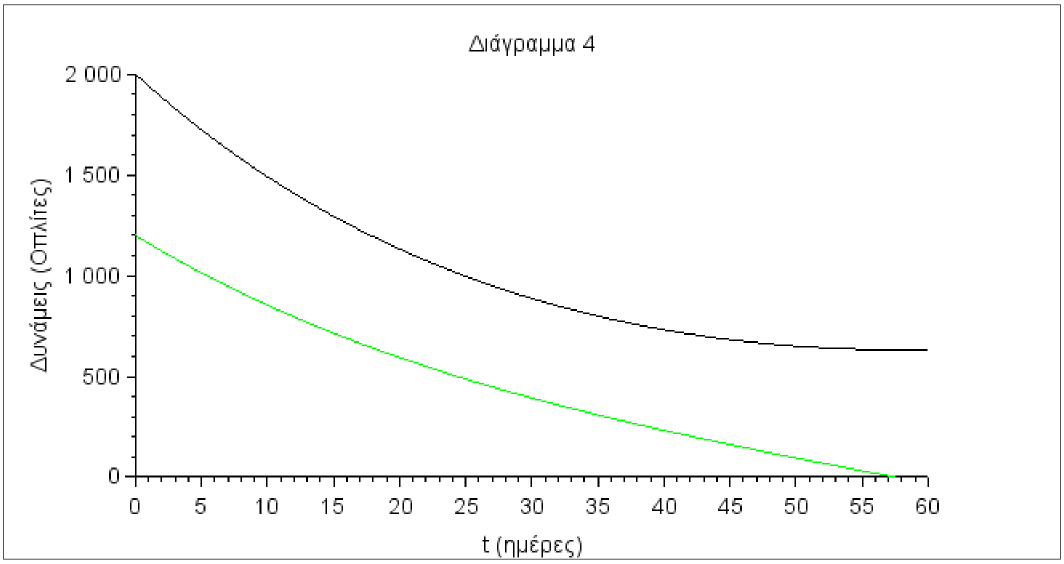
- A: 2000 οπλίτες, a: 0.02 αποδοτικότητα
- B: 1200 οπλίτες, b: 0.05 αποδοτικότητα
- Ορίζεται ο χρόνος της προσομοίωση σε $t \in [0,60]$ (ημέρες μάχης)

Παρακάτω απεικονίζεται το σύστημα προσομοίωσης και έχει τις αρχικές τιμές που ορίσαμε.



Προσομοίωση 16 - Προσομοίωση τετραγωνικού νόμου περίπτωση 4

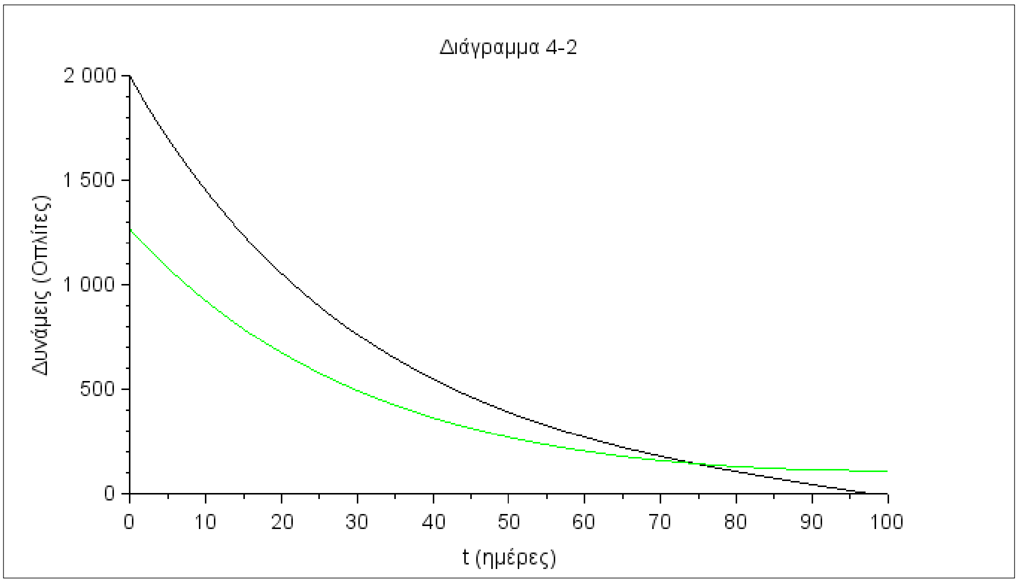
Εκτελώνταςτην παραπάνω προσομοίωση παράγεται το διάγραμμα της παρακάτω εικόνας.



Διάγραμμα 16 - Διάγραμμα τετραγωνικού νόμου περίπτωση 4

Στο παραπάνω διάγραμμα(Διάγραμμα 16), έχοντας αφήσει την ίδια αποδοτικότητα με το προηγούμενο παράδειγμα αλλά αυξάνοντας την διαφορά στον αριθμό οπλιτών των δύο δυνάμεων παρατηρούμε ότι οι 2000 οπλίτες της δύναμης Α, έχουν πλεονέκτημα πλέον στους 1200 οπλίτες της δύναμης Β παρότι αυτοί είναι ικανότεροι στη μάχη κατά μεγάλο βαθμό. Η μάχη διαρκεί λίγο λιγότερο από 58 ημέρες και οι απώλειες της δύναμης Α ανέρχονται περίπου στις 1250 με λιγότερους από 750 οπλίτες να παραμένουν ζωντανοί στο τέλος της μάχης.

Θα θεωρήσουμε ότι πριν από την εκκίνηση της μάχης, στις τάξεις των δυνάμεων Β προστίθεται ένας ακόμη λόχος, ο οποίος απαρτίζεται από 70 οπλίτες. Έχουν την ίδια αποδότικότητα με τους υπόλοιπους οπλίτες της δύναμης Β και ήρθαν ως ενισχύσεις.



Διάγραμμα 17 – Διάγραμμα τετραγωνικού νόμου περίπτωση 4-2

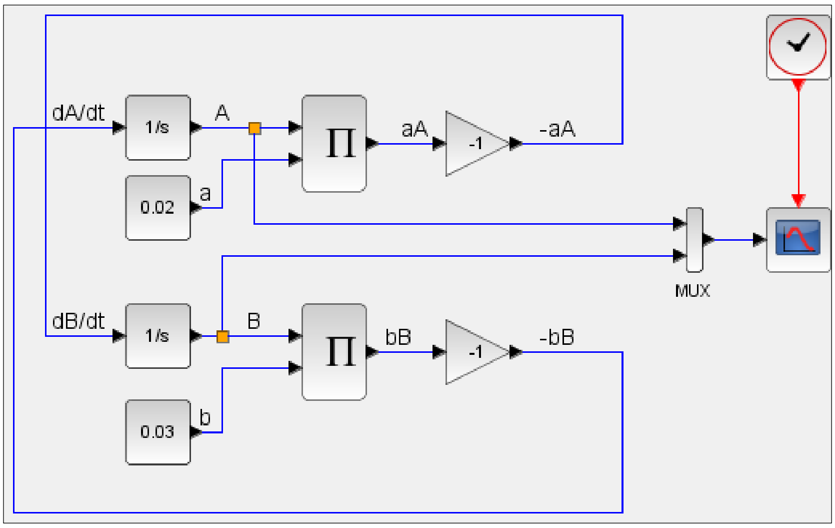
Η προσθήκη 70 οπλιτών αποδεικνύεται πως παίζουν καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη αυτής της μάχης, μιας και η πορεία της θα είχε διαμορφωθεί εντελώς διαφορετικά. Παρακάτω (Διάγραμμα Περίπτωσης 4-2) φαίνεται η πορεία της, όπου η δύναμη Β αναδεικνύεται νικήτρια έπειτα από 97 ημέρες περίπου, με λιγότερους από 200 οπλίτες να παραμένουν αλώβητοι μετά το τέλος της μάχης.

Τετραγωνικός νόμος Περίπτωση 5

Στην πέμπτη περίπτωση θα θέσουμε ως αρχικές τιμές τις εξής:

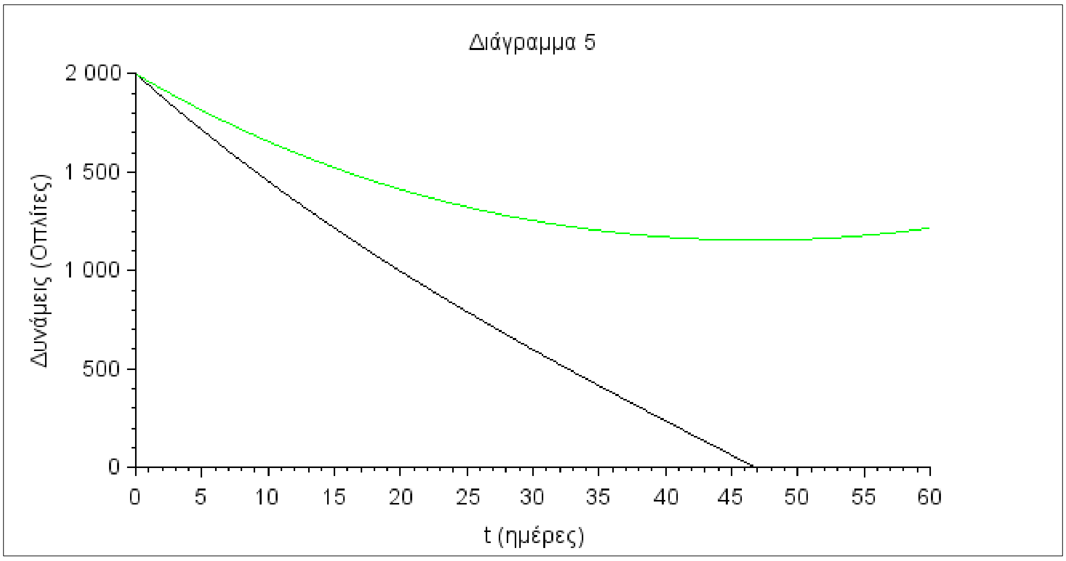
- A: 2000 οπλίτες, a: 0.01 αποδοτικότητα
- B: 2000 οπλίτες, b: 0.02 αποδοτικότητα
- Ορίζεται ο χρόνος της προσομοίωση σε t ∈ [0,60] (ημέρες μάχης)

Παρακάτω απεικονίζεται το σύστημα προσομοίωσης και έχει τις αρχικές τιμές που ορίσαμε.



Προσομοίωση 17 - Προσομοίωση τετραγωνικού νόμου περίπτωση 5

Εκτελώντας την παραπάνω προσομοίωση παράγεται το παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα 18 - Διάγραμμα τετραγωνικού νόμου περίπτωση 5

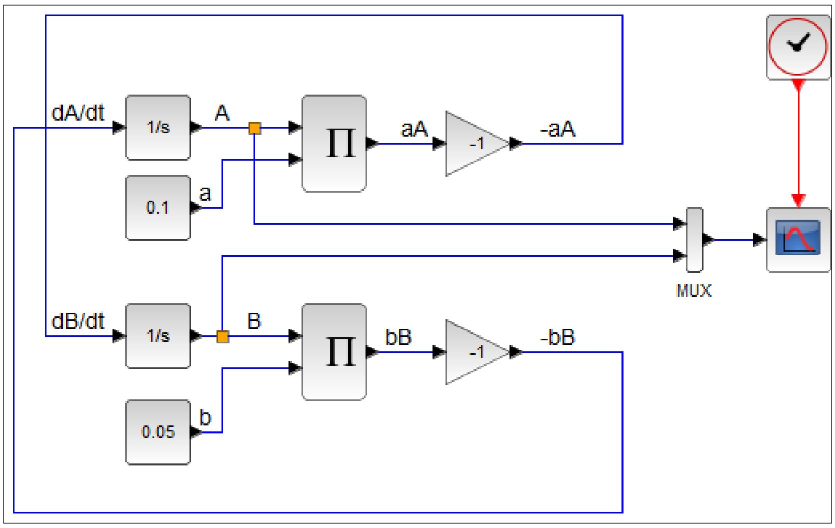
Το παράδειγμα αυτό, αν και προφανές, αποδεικνύει πως αν οι δυνάμεις είναι ίσες σε μέγεθος, τότε καθοριστικό ρόλο παίζει η αποδοτικότητα των οπλιτών της. Σε αυτό το παράδειγμα οι δυνάμεις A και B απαρτίζονται από 2000 οπλίτες έκαστος, και η αποδοτικότητα τους είναι 0.01 και 0.02 αντίστοιχα. Η μάχη διαρκεί 47 ημέρες περίπου και νικήτρια της μάχης αυτής είναι η δύναμη B, όπου έχει και διπλάσια αποδοτικότητα. Παρόλα αυτά παρατηρούμε, ότι οι απώλειες της, δεν είναι υπερδιπλάσιες σε μέγεθος, μιας και στο τέλος της μάχης 1300 οπλίτες περίπου είναι ζωντανοί, αποδεικνύοντας έτσι, ότι σημαντικότερη βαρύτητα στο μοντέλο αυτό παίζει η μεταβλητή που αναπαριστά τον συνολικό αριθμό της δύναμης.

Τετραγωνικός νόμος Περίπτωση 6

Στην έκτη περίπτωση θα θέσουμε ως αρχικές τιμές τις εξής:

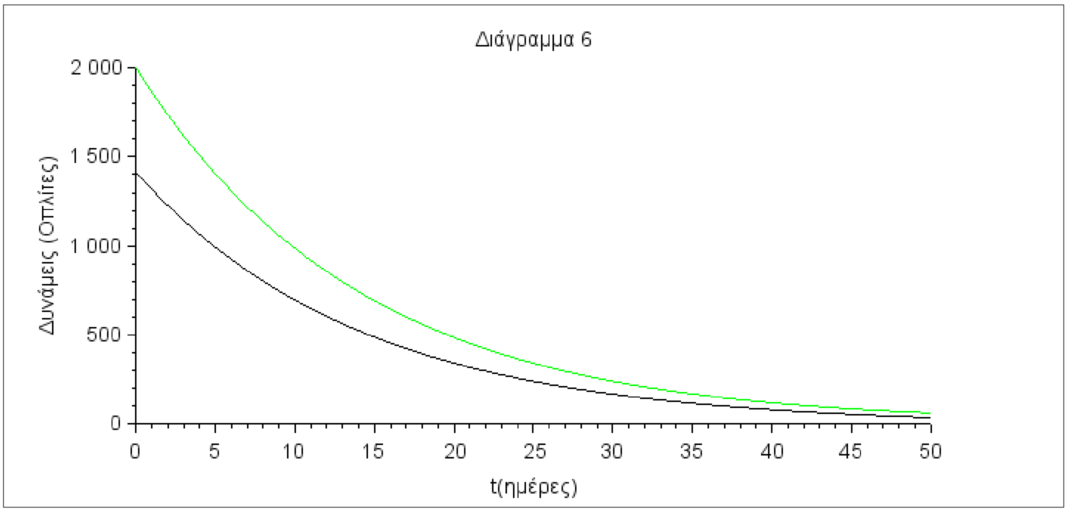
- A: 1414 οπλίτες, a: 0.1 αποδοτικότητα
- B: 2000 οπλίτες, b: 0.05 αποδοτικότητα
- Ορίζεται ο χρόνος της προσομοίωση σε t ∈ [0,90] (ημέρες μάχης)

Παρακάτω απεικονίζεται το σύστημα προσομοίωσης και έχει τις αρχικές τιμές που ορίσαμε.



Προσομοίωση 18 - Προσομοίωση τετραγωνικού νόμου περίπτωση 6

Εκτελώντας την παραπάνω προσομοίωση παράγεται το διάγραμμα της επόμενης σελίδας.



Διάγραμμα 19 - Διάγραμμα τετραγωνικού νόμου περίπτωση 6

Στο παράδειγμα αυτό, οι δύο δυνάμεις που συγκρούονται, έχουν διπλάσια διαφορά αποδοτικότητας και συγκεκριμένη διαφορά στον αριθμό οπλιτών, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει, να τείνει προς την ισοπαλία. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 6, οι 2 καμπύλες A και B μηδενίζονται ασυμπτωτικά, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει νικητής αυτής της αναμέτρησης.

Αναλυτική Λύση της Εξίσωσης

Για κάθε ένα από τα παραδείγματα που εκτελέστηκε προσόμοιωση, αποδόθηκε ένα διάγραμμα στο οποίο δόθηκαν κάποιες εξηγήσεις, οι οποίες συνάδουν με τη θεωρία που αναπτύξαμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου. Οι προσομοιώσεις δεν είναι ο μοναδικός τρόπος ο οποίος μπορεί να μελετηθεί αυτό το μοντέλο.

Θα μπορούσε να απλοποιηθεί περαιτέρω το μοντέλο και η κάθε μαθηματική εξίσωση που εμπεριέχεται σε αυτό. Σε προηγούμενα κεφάλαια, έχει αποδοθεί ο τύπος του τετραγωνικού νόμου και έχει γίνει επεξήγηση για τις μεταβλητές και τι αυτές αναπαριστούν. Παρακάτω δίνεται πάλι ο ίδιος τύπος, και αναλύεται η επίλυση του.

$$\frac{dA}{dt} = -bB \ , \quad \frac{dB}{dt} = -aA \tag{1}$$

Θα εξαλείψουμε τον παράγοντα του χρόνου t και από τις δυο διαφορικές εξισώσεις διαιρώντας τη δεύτερη εξίσωση με την πρώτη και έπειτα θα διαχωρίσουμε τις μεταβλητές. Οπότε,

$$\int \alpha A dA = \int bBdB, \tag{2}$$

και έπειτα

$$\alpha A^2 - bB^2 = σταθερά. \tag{3}$$

Αυτό έχει αξιοσημείωτες επιπτώσεις. Εφόσον αυτή η ποσότητα δεν αλλάζει ποτέ πρόσημο, μόνο ένα από τα A και B μπορούν να είναι μηδέν αν είναι 0 η σταθερά, μπορούν να μηδενιστούν και οι δύο. Αν η αρχική τιμή της (3) είναι θετική, λόγου χάρη, μόνο το B μπορεί να είναι μηδέν, και συνεπώς μόνο η A στρατιά μπορεί να κερδίσει. Οπότε η μεταβλητή της ποσότητας (αριθμητικές δυνάμεις) είναι κυρίαρχη και καθορίζει ποιος θα είναι ο νικητής της μάχης, και η μαχητική δύναμη (γνωρίζοντας ότι το γινόμενο $\alpha A^2 και\ bB^2$ είναι αντίστοιχα οι μαχητικές δυνάμεις) μεταβάλλεται από την μαχητική ικανότητα (αποδοτικότητα) των μονάδων επί το τετράγωνο του μεγέθους τους.

Θα δοθεί ένα παράδειγμα. Υποθέτουμε ότι η A στρατιά ξεκινάει με διπλάσιο αριθμό μονάδων (οπλιτών) από ότι η B στρατιά, $A_0 = 2B_0$, αλλά η αποδοτικότητα των μονάδων της B είναι 3 φορές μεγαλύτερη, $b = 3a$. Οπότε

$$\alpha A^2 - bB^2 = \alpha(2B_0)^2 - 3\alpha B_0^2 = \alpha B_0^2 > 0 \tag{4}$$

και η στρατιά A κερδίζει τη μάχη. Όπως αναφέραμε και στην αρχή του κεφαλαίου για τον τετραγωνικό νόμο, ισχύουν κάποιες βασικές προϋποθέσεις. Το συμπέρασμα είναι πως η ποσότητα υπερτερεί της ποιότητας, και συνεπώς εάν η στρατιά έχει μεγαλύτερο μέγεθος από την αντίπαλη στρατιά, για να κερδηθεί η μάχη, η βέλτιστη δυνατή περίπτωση για να επιτευχθεί, είναι να έρθουν όλες οι μονάδες ταυτοχρόνως και να εμπλακούν όσο το δυνατόν ταχύτερα. Αντιθέτως, αν η στρατιά υστερεί σε αριθμό, αλλά είναι πιο αποδοτική, τότε θα πρέπει να ακολουθηθεί διαφορετική τακτική, έτσι ώστε να εμπλακούν όσο το δυνατόν λιγότερες μονάδες του εχθρού για να μπορεί η αποδοτικότητα να χρησιμοποιηθεί προς όφελος της στρατιάς. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η μαχή των Καννών, όπου ο στρατός της Καρχηδόνας υπό την ηγεσία του Αννίβα Βάρκα νίκησε τον αριθμητικά μεγαλύτερο στρατό της Ρωμαϊκής Δημοκρατίας το 216 π.Χ.

Στο προηούμενο παράδειγμα, ας υποθέσουμε τι θα συνέβαινε στην περίπτωση που η στρατιά Β θα μπορούσε να διαιρέσει την στρατιά Α σε δυο ισοδύναμες δυνάμεις και να έρθει σε συγκρουσή με αυτές διαδοχικά. Στο τέλος της πρώτης συμπλοκής, ανάμεσα σε B_0*και σε* $A_0 = B_0$,*η* B_1στρατιά παραμένει, όπου έχουμε

$$\alpha B^2_0 - 3\alpha B^2_0 = -3\alpha B^2_1 \;\; => \;\; B_1 \sqrt{\frac{2}{3}B_0} \tag{5}$$

και στο τέλος της δεύτερης συμπλοκής,

$$\alpha B^2_0 - 3\alpha \frac{2}{3} B^2_0 = -\alpha B^2_0 < 0. \tag{6}$$

Η στρατιά Β έχει κερδίσει αυτή τη φορά, με $3\alpha B^2_2 = \alpha B^2_0$και συνεπώς $\sqrt{\frac{1}{3}}$ή σχεδόν 60% των αρχικών του δυνάμεων έχουν απομείνει σε αντίθεση με την στρατιά Α που υπέστη διάλυση. Αυτό γίνεται περισσότερο εντυπωσιακό αν αντί για 2 διαιρέσεις, γίνουν Ν-διαιρέσεις με ισοδύναμες δυνάμεις της Α στρατιάς.

$$bB^2_F = bB^2_0 - \frac{1}{N}\alpha A^2_0 \tag{7}$$

έτσι ώστε οι Ν διαιρέσεις να μειώσουν την μαχητική δύναμη της Α στρατιάς κατά Ν φορές. Ένα κλασσικό στρατιωτικό ρητό λέει το εξής: «Δεν πρέπει (σχεδόν) ποτέ να διαιρείς τις δυνάμεις σου».(Nial McKay)

Γραμμικός Νόμος του Lanchester

Ο Γραμμικός νόμος του Lanchester απορρίπτει την υπόθεση του τετραγωνικού νόμου, όπου τα πυρά μπορούν να συγκεντρωθούν σε ένα στόχο. Ο Lanchester θεώρησε τον γραμμικό νόμο ως μια αναπαράσταση αρχαίας μάχης που γινόταν σώμα με σώμα, κι αυτό διότι οι μαχητές με σπαθιά και δόρατα δεν έχουν το πλεονέκτημα να πολεμάνε ταυτόχρονα έναν αντίπαλο. Για παράδειγμα αν 5 μαχητές με σπαθιά ήταν ενάντια σε έναν, θα έπρεπε να τον αντιμετωπίσουν διαδοχικά, διότι δεν θα μπορούσαν να φτάσουν σε σημείο τέτοιο, ώστε να μπορούν να εμπλακούν ταυτόχρονα. Στο σύγχρονο κόσμο, ο γραμμικός νόμος ισχύει στην περίπτωση τις μονομαχίες του πυροβολικού, όπου χρησιμοποιούν έμμεσα τα πυρά.

Στις περιπτώσεις όπου τα πυρά είναι έμμεσα, και οι δύο πλευρές αντικρούονται σε μια συγκεκριμένη περιοχή. Οι δύο πλευρές δεν λαμβάνουν άμεσα πληροφορίες για το τι επιπτώσεις έχει υποστεί ο αντίπαλος και με αυτό τον τρόπο δεν είναι ικανές να αλλάξουν στόχο στην περίπτωση εξουδετέρωσης του αντιπάλου. Οι στόχοι συνεχίζουν να δέχονται πυρά, παρόλο που μπορεί να έχουν τεθεί εκτός μάχης και συνεπώς τα έμμεσα πυρά είναι λιγότερο αποδοτικά από τα άμεσα.

Οι μονομαχίες του πυροβολικού είναι ένα καλό παράδειγμα έμμεσης ανταλλαγής πυρών. Ο ρυθμός με τον οποίο έχει απώλειες η δύναμη Α δεν εξαρτώνται μόνο από τον αριθμό των δυνάμεων Β που στοχεύουν προς αυτούς και την αποδοτικότητα τους, αλλά και από το μέγεθος της ίδιας της δύναμης Α όπου βρίσκεται στο σημείο που δέχεται τα πυρά.

Μπορεί να γίνει καλύτερα αντιληπτό με την υπόθεση ότι η δύναμη Α διαμοιράζεται ομοιόμορφα σε ένα έδαφος μάχης και το εξετάζει προς βομβαρδισμό. Στη συνέχεια, αφού βομβαρδίσει το έδαφος, γίνεται κατανοητό ότι όσο περισσότερες αντίπαλες δυνάμεις βρίσκονται σε εκείνο το χώρο, τόσες θα είναι και οι απώλειες της ανά μονάδα χρόνου. Συνεπώς, ο ρυθμός απωλειών για μια δύναμη είναι ίδιος με τον τετραγωνιό νόμο και επιπλέον την προσθήκη ενός ακόμη όρου, τον αριθμό των δυνάμεων που δέχεται επίθεση. Με την ίδια υπόθεση του τετραγωνικού νόμου, ότι οι δυνάμεις είναι ομογενείς, έχουν τους ίδιους τύπους όπλων και είναι το ίδιο ευάλωτοι στις επιθέσεις που δέχονται, προκύπτουν οι γραμμικές εξισώσεις :

$$\frac{dA}{dt} = -A\ b\ B$$

$$\frac{dB}{dt} = -B\ a\ A$$

$\frac{dA}{dt}$: είναι ο ρυθμός μεταβολής της δύναμης A στην πάροδο του χρόνου t

$\frac{dB}{dt}$:είναι ο ρυθμός μεταβολής της δύναμης B στην πάροδο του χρόνου t

A, B : αριθμητικά στρατεύματα των δύναμεων, δηλαδή ο αριθμός των οπλιτών, των αρμάτων κλπ.

α, b: η αποδοτικότητα των δυνάμεων, δηλαδή την ικανότητα τους να σκοτώνουν, ή να τραυματίζουν τις μοναδιαίες δυνάμεις της άλλης πλευράς.

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε τη συνθήκη ισότητας για τον γραμμικό νόμο:

$$b\ B\ (0) = a\ A(0)$$

Οι γραμμικός νόμος του Lanchester διαφέρει από τον τετραγωνικό από πολλές απόψεις. Πρώτον, δεν υπάρχει κάποιο πλεονέκτημα στον αριθμό των δυνάμεων της μάχης. Εφόσον δεν υψώνεται αυτή η μεταβλητή στο τετράγωνο, έχει την ίδια βαρύτητα με την αποδοτικότητα. Επιπλέον, η συγκέντρωση των πυρών των δυνάμεων δεν έχει καμία επίδραση στην μείωση των απωλειών του νικητή της μάχης. Εφόσον και οι δύο πλευρές έχουν ως συντελεστή τις δυνάμεις τους στον ρυθμό απωλειών, δηλαδή στις εξισώσεις του Lanchester, το να προστεθούν επιπλέον δυνάμεις αυξάνει τον αριθμό που βρίσκεται στο πεδίο μάχης, οπότε ο εχθρός δύναται να τους εξουδετερώσει, όπως επίσης αυξάνει και το ρυθμό απωλειών του εχθρού. Οι μάχες τελειώνουν γρηγορότερα με αυτό τον τρόπο, αλλά ο νικητής έχει τον ίδιο αριθμό απωλειών σε στρατεύματα.

Προσομοιώσεις Γραμμικού Νόμου

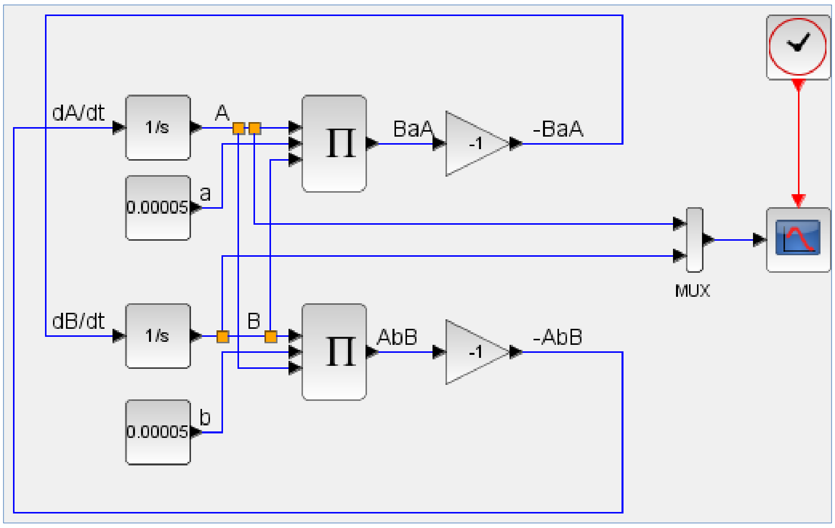
Στη συνέχεια αυτής της εργασίας, θα χρησιμοποιήσουμε το πρόγραμμα Xcos του Scilab για να προσομοιώσουμε και να αναπαραστήσουμε κάποια διαγράμματα, σύμφωνα με τον γραμμικό νόμο του Lanchester, έτσι ώστε να δούμε κάποιες πιθανές περιπτώσεις και να μελετήσουμε την συμπεριφορά του μοντέλου στην πάροδο του χρόνου. Θα προσπαθήσουμε να καλύψουμε ένα μεγάλο φάσμα πιθανών περιπτώσεων, όταν δυο στρατιωτικές δυνάμεις έρχονται σε σύγκρουση και θα μελετήσουμε τα διαγράμματα που προκύπτουν, θέτοντας διαφορετικές αρχικές τιμές για τα αριθμητικά μεγέθη των στρατών που εμπλέκονται, καθώς και για την αποδοτικότητα των οπλιτών όπου απαρτίζουν αυτές τις στρατιές. Θα κατασκευασθεί το αρχικό μοντέλο και πάνω σε αυτό θα αλλάζουμε κάθε φορά τις παραμέτρους που θέλουμε, έτσι ώστε να αποδοθεί το τελικό διάγραμμα κάθε φορά. Η στρατιά A θα αποδίδεται με μαύρο χρώμα, ενώ η B με πράσινο.

Γραμμικός νόμος Περίπτωση 1

Στην πρώτη περίπτωση θα θέσουμε ως αρχικές τιμές τις εξής:

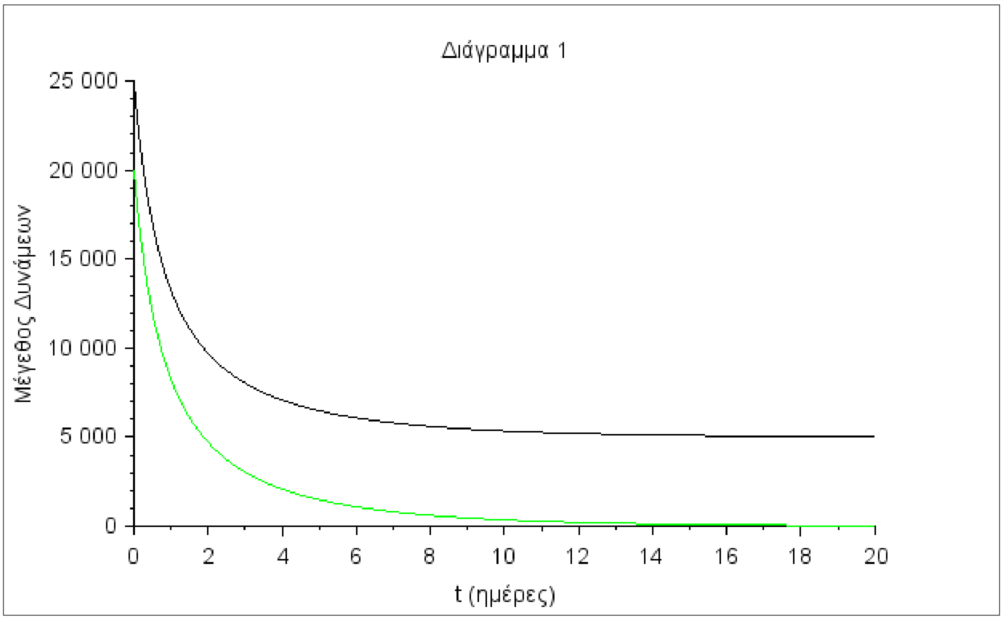
- A: 25000 αριθμητική δύναμη, a: 0.0005 αποδοτικότητα
- B: 20000 αριθμητική δύναμη, b: 0.0005 αποδοτικότητα
- Ορίζεται ο χρόνος της προσομοίωση σε $t \in [0,20]$ (ημέρες μάχης)

Παρακάτω απεικονίζεται το σύστημα προσομοίωσης και έχει τις αρχικές τιμές που ορίσαμε.



Προσομοίωση 19 - Προσομοίωση γραμμικού νόμου περίπτωση 1

Εκτελώντας την παραπάνω προσομοίωση παράγεται το διάγραμμα της επόμενης σελίδας.



Διάγραμμα 20 – Διάγραμμα γραμμικού νόμου περίπτωση 1

Στο διάγραμμα αυτό όπου το μέγεθος των δυνάμεων της Α (μαύρη καμπύλη) είναι μεγαλύτερο από αυτό της Β (πράσινη καμπύλη), και έχοντας ίδια αποδοτικότητα στην εξουδετέρουση του αντιπάλου, η μάχη διαρκεί 20 ημέρες περίπου, όπου οι δυνάμεις της δύναμης Β αποδεκατίζονται λόγω του μικρότερου αριθμού μεγέθους, οπότε η δύναμη Α με τον μεγαλύτερο αριθμό μαχητικών, είναι η νικήτρια αυτής της μάχης.

Παρόλα αυτά θα δούμε ότι οι απώλειες της είναι σε αριθμό, όσες μαχητικές δυνάμεις είχε η δύναμη Β στην αρχή της μάχης. Κι αυτό διότι και οι δύο παράμετροι της εξίσωσης έχουν την ίδια βαρύτητα.

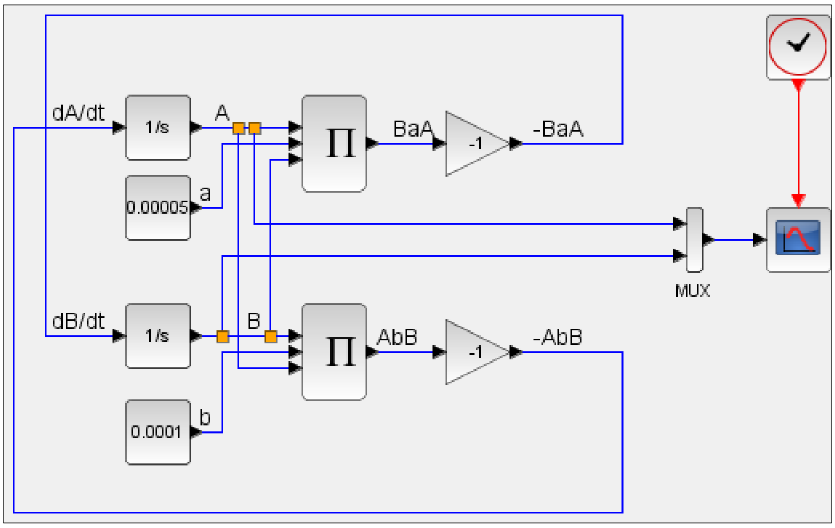
Άλλη μια παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε, είναι ότι οι μάχες που ερμηνεύονται με τον γραμμικό νόμο, σε αντίθεση με τις μάχες του τετραγωνικού, διαρκούν λιγότερο, με αποτέλεσμα το αποτέλεσμα της μάχης να διαμορφώνεται σχετικά πιο γρήγορα.

Γραμμικός νόμος Περίπτωση 2

Στην δεύτερη περίπτωση θα θέσουμε ως αρχικές τιμές τις εξής:

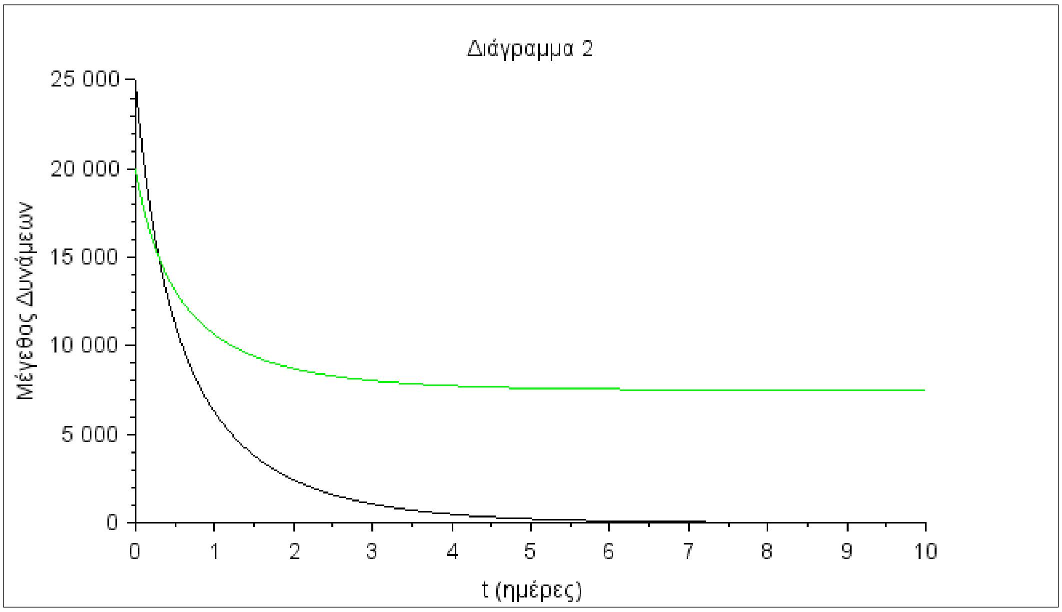
- A: 25000 αριθμητική δύναμη, a: 0.00005 αποδοτικότητα
- B: 20000 αριθμητική δύναμη, b: 0.0001 αποδοτικότητα
- Ορίζεται ο χρόνος της προσομοίωση σε $t \in [0,10]$ (ημέρες μάχης)

Στην επόμενη σελίδα απεικονίζεται το σύστημα προσομοίωσης και έχει τις αρχικές τιμές που ορίσαμε.



Προσομοίωση 20 - Προσομοίωση γραμμικού νόμου περίπτωση 2

Εκτελώντας την παραπάνω προσομοίωση παράγεται το παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα 21 - Προσομοίωση γραμμικού νόμου περίπτωση 2

Στο διάγραμμα αυτό όπου το μέγεθος των δυνάμεων της Α (μαύρη καμπύλη) δύναμης είναι και πάλι μεγαλύτερο από αυτές της Β (πράσινη καμπύλη), παρόλα αυτά η αποδοτικότητα της Β είναι διπλάσια. Η μάχη διαρκεί λίγο περισσότερο από 7 ημέρες, όπου οι δυνάμεις της Β κερδίζουν την μάχη, όπου η δύναμη Α φτάνει στο σημείο 0. Αν και με λιγότερες μαχητικές δυνάμεις, η δύναμη Β καταφέρνει να νικήσει σε αυτή τη μάχη, λόγω της υπερδιπλάσιας αποδοτικότητας της.

Οι απώλειες της Β ξεπερνούν τις 10000, κάτι που φαίνεται στο διάγραμμα. Εφόσον οι δύο παράμετροι της εξίσωσης έχουν την ίδια βαρύτητα, οι απώλειες είναι οι μισές περίπου (12500) από την αρχική τιμή της δύναμης Α.

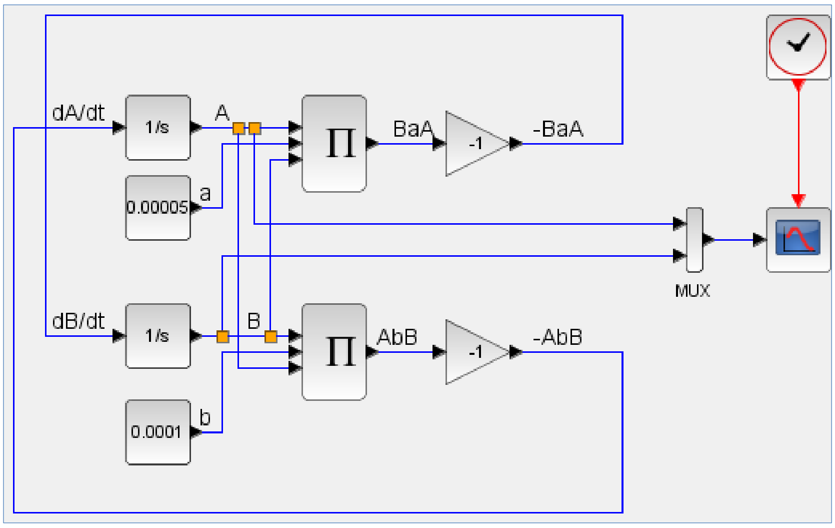
Στο επόμενο παράδειγμα θα κρατήσουμε την ίδια αποδοτικότητα, όπου η αποδοτικότητα της δύναμης B είναι διπλάσια από αυτή της A, και θα αυξήσουμε τον αριθμό της δύναμης A, έτσι ώστε να είναι διπλάσια της B.

Γραμμικός νόμος Περίπτωση 3

Στην τρίτη περίπτωση θα θέσουμε ως αρχικές τιμές τις εξής:

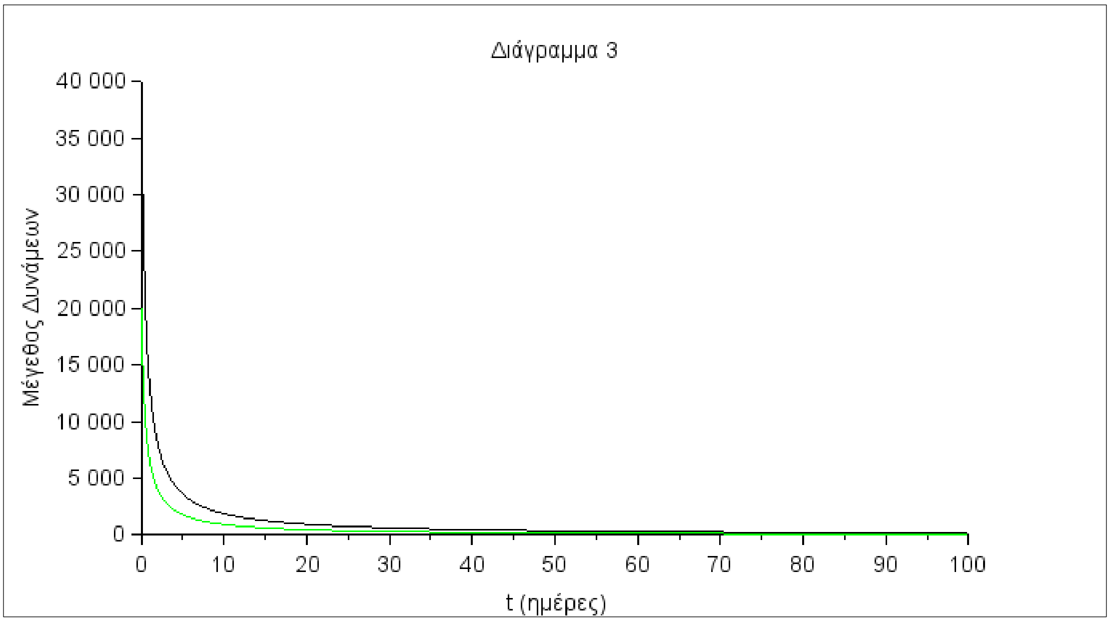
- A: 40000 αριθμητική δύναμη, a: 0.00005 αποδοτικότητα
- B: 20000 αριθμητική δύναμη, b: 0.0001 αποδοτικότητα
- Ορίζεται ο χρόνος της προσομοίωση σε t ∈ [0,100] (ημέρες μάχης)

Στην παρακάτω εικόνα απεικονίζεται το σύστημα προσομοίωσης και έχει τις αρχικές τιμές που ορίσαμε.



Προσομοίωση 21 - Προσομοίωση γραμμικού νόμου περίπτωση 3

Εκτελώντας την παραπάνω προσομοίωση παράγεται το παρακάτω διάγραμμα.



Διάγραμμα 22 - Προσομοίωση γραμμικού νόμου περίπτωση 3

Στο διάγραμμα αυτό όπου το μέγεθος των δυνάμεων της Α δύναμης (μαύρη καμπύλη) είναι ακριβώς διπλάσιο από το μέγεθος της Β (πράσινη καμπύλη), η αποδοτικότητα της Β είναι διπλάσια της Α, προκύπτει ένα ενδεχόμενο που δεν είδαμε ως τώρα, η ισοπαλία. Η μάχη αυτή δείχνει να μην έχει τέλος, μιας και οι 2 καμπύλες τείνουν στο 0 για όσο μεγάλο χρονικό διάστημα και αν ορίσουμε την διάρκεια της προσομοίωσης. Έπειτα από ένα σημείο, οι καμπύλες φθίνουν τόσο αργά, και δεν έχει νόημα να αποδοθεί σε μεγαλύτερο διάστημα, μιας και το υπολογιστικό κόστος θα είναι μεγάλο, χωρίς να μας παρέχει μεγαλύτερη ακρίβεια στις πληροφορίες που θέλουμε. Πρακτικά η μάχη τελειώνει όταν φτάσουν οι τιμές κάτω από 1, όπου δηλαδή κανείς στρατιώτης δεν μένει ζωντανός.

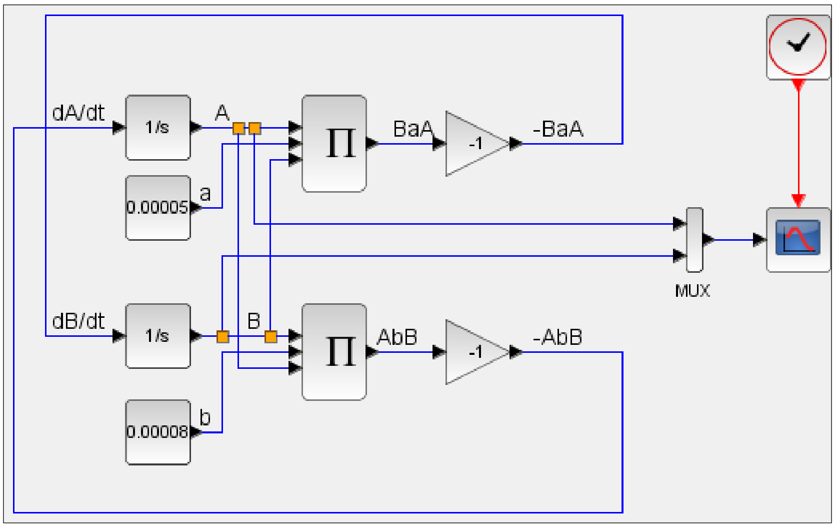
Αποδεικνύεται λοιπόν, ότι οι παράμετροι της εξίσωσης έχουν την ίδια βαρύτητα σε αντίθεση με τον τετραγωνικό νόμο, όπου η μεταβλητή του μεγέθους, υπερτερεί της αποδοτικότητας. Στον γραμμικό νόμο, ποσότητα και ποιότητα, έχουν το ίδιο βάρος στην εξίσωση.

Γραμμικός νόμος Περίπτωση 4

Στην τέταρτη περίπτωση θα θέσουμε ως αρχικές τιμές τις εξής:

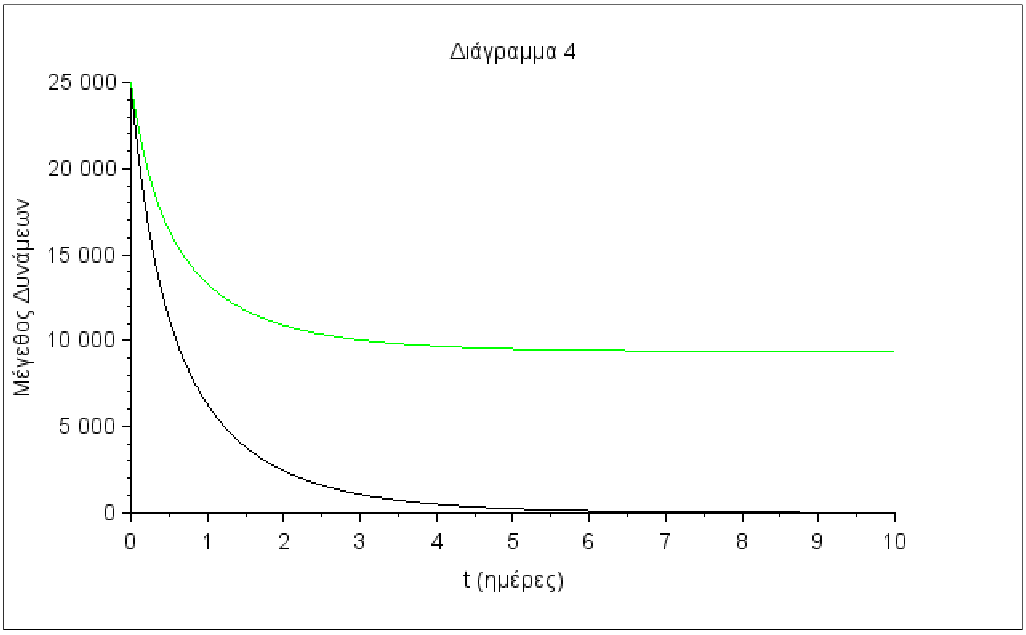
- A: 25000 αριθμητική δύναμη, a: 0.00005 αποδοτικότητα
- B: 25000 αριθμητική δύναμη, b: 0.00008 αποδοτικότητα
- Ορίζεται ο χρόνος της προσομοίωση σε t ∈ [0,10] (ημέρες μάχης)

Παρακάτω απεικονίζεται το σύστημα προσομοίωσης και έχει τις αρχικές τιμές που ορίσαμε.



Προσομοίωση 22 - Προσομοίωση γραμμικού νόμου περίπτωση 4

Εκτελώνταςτην παραπάνω προσομοίωση παράγεται το διάγραμμα της επόμενης σελίδας.



Διάγραμμα 23 - Προσομοίωση γραμμικού νόμου περίπτωση 4

Σε αυτή την προσομοίωση, βλέπουμε και την τελευταία περίπτωση, όπου το μέγεθος και των δύο δυνάμεων είναι ίσο, παρόλα αυτά η αποδοτικότητα της δύναμης Β (πράσινη καμπύλη) είναι μεγαλύτερη της Α (μαύρη καμπύλη), και συνεπώς, είναι νικήτρια αυτής της μάχης. Η μάχη διαρκεί περίπου 9 ημέρες.

Οι απώλειες της δύναμης Β είναι λίγο περισσότερες από 15000 όπως φαίνεται στο γράφημα. Ένας ακόμη τρόπος να υπολογιστούν, είναι πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των αρχικών δυνάμεων (στην περίπτωση που είναι ίσες) με το πηλίκο της μικρότερης προς τη μεγαλύτερη αποδοτικότητα των δυνάμεων.

Άλλα μοντέλα ανταγωνισμού των εξοπλισμών

Η έννοια του ανταγωνισμού των εξοπλισμών, αρκέτες φορές χρησιμοποιείται μεταφορικά, και δεν αφορά μόνο στρατιωτικές διαμάχες ή συγκρούσεις μεταξύ των στρατευμάτων των εθνών, αλλά και άλλου είδους ανταγωνιστικά περιβάλλοντα, στα οποία οι συμμετέχοντες σε αυτά, διεκδικούν και προσπαθούν να υπερισχύσουν έναντι του αντιπάλου τους.

Ένα άλλο μοντέλο το οποίο έχει μελετηθεί από τους Dawkins&Krebs, είναι το μοντέλο του ανταγωνισμού των εξοπλισμών μεταξυ των ειδών, ή και ενδο-ειδικά. Είναι παρόμοιο με το Μοντέλο του Richardson και πολλές φορές συγκρίνονται αυτά τα δυο μοντέλα. Ακολουθούν πανομοιότυπη διαδικασία, παρόλα αυτά έχουν διαφορετική προσέγγιση όσον αφορά τι προσδιορίζει το καθένα και που απευθύνεται. Σε αντίθεση με το μοντέλο του Richardson, όπου δεν γίνεται σαφής προσδιορισμός των παραμέτρων του, και μπορεί να ληφθεί υπόψην για διαφορετικούς συμμετέχοντες κάθε φορά, το μοντέλο των Dawkins & Krebs απευθύνεται στα είδη που καλούνται να επιβιώσουν σε ένα περιβάλλον. Η προσαρμογή σε μια γενεαλογική σειρά (π.χ θηρευτών) μπορεί να οδηγήσει στην επιλογή αλλαγής μιας άλλης (π.χ θηραμάτων), με αποτέλεσμα να επιτευχθεί αντί-προσαρμογή. Εάν αυτό προκύψει αμοιβαία, τότε μια ασταθής κλιμάκωση ή ένας «ανταγωνισμός στους εξοπλισμούς» μπορεί να παρουσιαστεί (Dawkins & Kreps, 1979: 489).

Ο διαχωρισμός που επιλέγει να κάνει το συγκεκριμένο μοντέλο και να κατηγοριοποιήσει τον ανταγωνισμό των εξοπλισμών, γίνεται με δυο ανεξάρτητους τρόπους. Μπορεί να είναι συμμετρικά ή ασσυμετρικά, ή μπορεί να είναι διακριτικός ή ενδοεπιλεκτικός ανταγωνισμός.

Σε έναν συμμετρικό ανταγωνισμό, η πίεση της επιλογής δρα στους συμμετέχοντες προς την ίδια κατεύθυνση. Ένα παράδειγμα είναι ένα ο ανταγωνισμός των δέντρων, τα οποία προσπαθούν να αναπτυχθούν και να ψηλώσουν περισσότερο, για να έχουν πρόσβαση στο ηλιακό φως. Για αυτό τον λόγο αποτελεί πλεονέκτημα το να είναι ένα δέντρο υψηλότερο, μιας και οι ανταγωνιστές του, έχουν μικρότερη επίδραση του ηλιακού φωτός πάνω τους, διότι το υψηλότερο δέντρο ρίχνει την σκιά του προς τα υπόλοιπα.

Σε έναν ασυμετρικό διαγωνισμό, η πίεση της επιλογής δρα στους συμμετέχοντες προς διαφορετικές κατευθύνσεις. Για παράδειγμα ένας ευρασιατικός λύγκας (αιλουροειδές) στην προσπάθεια του για επιβίωση τρέφεται με ελάφια. Αυτό τον υποχρεώνει να εξελίσσεται και να γίνεται καλύτερος στο κυνήγι ελαφιών, ταχύτερος και πιο αποτελεσματικός στην εκτέλεση, ενώ την ίδια στιγμή τα ελάφια υποχρεώνονται να εξελίσσονται κι αυτά, όχι όμως με τον ίδιο τρόπο, εστιάζοντας στο να αποφεύγουν τους θηρευτές τους και να είναι ταχύτερα. Ο σκοπός παρόλα αυτά και στις δύο περιπτώσεις αυτών των ζώων, είναι ένας, η επιβίωση.

Ο διακριτικός ανταγωνισμός, στην οικολογία, είναι μια μορφή ανταγωνισμού στον οποίο άτομα διαφορετικών ειδών ανταγωνίζονται για τους ίδιους πόρους σε ένα οικοσύστημα. Αυτό μπορεί να αντιπαραβληθεί με τον αμοιβαισμό, έναν τύπο συμβίωσης.(https://en.wikipedia.org/wiki/Interspecific_competition).

Ο ενδοεπιλεκτικός ανταγωνισμός είναι μια αλληλεπίδραση στην οικολογία του πληθυσμού, όπου μέλη του ίδιου είδους ανταγωνίζονται για περιορισμένους πόρους. Αυτό οδηγεί σε μείωση της φυσικής κατάστασης και για τα δύο άτομα, αλλά το πιο κατάλληλο άτομο επιβιώνει και είναι σε θέση να αναπαραχθεί. (https://en.wikipedia.org/wiki/Intraspecific_competition).

Συνεπώς, θα πρέπει να αναλογιστούμε τρόπους με τους οποίους μπορεί κάποιος ανταγωνισμός των εξοπλισμών να φτάσει στο τέλος του. Μια περίπτωση είναι μια γενεαλογική σειρά μπορεί να οδηγήσει την άλλη σε αφανισμό, ή θα μπορούσε να φτάσει ένα μέγιστο, έτσι ώστε να αποτρέψει την άλλη από το να κάνει το ίδιο. Μία άλλη περίπτωση είναι να φτάσουν και οι δύο πλευρές σε ένα σταθερό τοπικό μέγιστο, παράδειγμα αποτελεί το οικοσύστημα λουλούδια-μέλισσες. Άλλη μια εκδοχή είναι να μην υπάρχει σταθερό τέλος, με αποτέλεσμα οι ανταγωνισμοί αυτοί να κάνουν κύκλο επ’ αόριστον. (Dawkins & Kreps,1979)

Συμπεράσματα

Από την παραπάνω μελέτη και έρευνα προκύπτουν κάποια συμπεράσματα όσον αφορά τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν, το μοντέλο του ανταγωνισμού των εξοπλισμών του Richardson και τα μοντέλα μάχης του Lanchester.

Οι εφαρμογές τους δίνουν χρήσιμα αποτελέσματα και έχουν χρησιμοποιηθεί στο παρελθόν, όχι μόνο για στρατιωτικές επιχειρήσεις, αλλά και σε άλλους τομείς, όπου ο ανταγωνισμός μεταξύ δύο μερών χρήζει παρακολούθησης και μελέτης, όπως σε οικονομικά συστήματα, σε οικοσυστήματα όπου η επιβίωση του ενός εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την επιβίωση του άλλου.

Στο μοντέλο του ανταγωνισμού των εξοπλισμού του Richardson, μελετήσαμε κάποιες περιπτώσεις για τις δύο χώρες που ανταγωνίζονται μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν στις περισσότερες περιπτώσεις οδηγούν σε σταδιακή αύξηση των εξοπλισμών των χωρών, άλλες φορές με σταθερό ρυθμό, και άλλες ανεξέλεγκτα. Σπανίως οι δύο χώρες οδηγούνται στον αφοπλισμό. Σε κάθε περίπτωση όμως, γνωρίζουμε πως το μαθηματικό μοντέλο αυτό, απλώς προσεγγίζει την πραγματικότητα, μιας και έχει αναφερθεί πως διάφορες μεταβλητές του πραγματικού συστήματος, δεν λαμβάνονται υπόψη. Και σε αυτό το σημείο, έγκειται η χρησιμότητα του μοντέλου αυτού, διότι είναι απλό και λιτό, με αποτέλεσμα να αποφεύγονται συγχήσεις όπου θα οδηγούσαν σε εντελώς λάθος συμπεράσματα.

Η άλλη περίπτωση που μελετήθηκε, τα μοντέλα μάχης του Lanchester, είναι ακόμα πιο απλή. Παρόλο που είναι 2 τα μοντέλα για κάθε είδους μάχη που μελετάται, το αποτέλεσμα είναι τις περισσότερες φορές το ίδιο. Υπάρχει δηλαδή, ένας νικητής, ένας χαμένος και ενίοτε εμφανίζεται – σε εξαιρετικά σπάνιες περιπτώσεις – το φαινόμενο της ισοπαλίας. Για την ακρίβεια, ακόμα και στο φαινόμενο αυτό, έχουμε δύο χαμένους, και κανένα νικητή, όσον αφορά το απόλυτο αριθμητικό αποτέλεσμα της μάχης τουλάχιστον. Έχουμε καλύψει (σχεδόν) όλες τις πιθανές περιπτώσεις έτσι ώστε να προκύψουν διάφορα συμπεράσματα για κάθε αναπαράσταση μιας μάχης. Η μοναδική περίπτωση που δεν έχει μελετηθεί, είναι η περίπτωση στην οποία ένα στράτευμα υποχωρεί κατά τη διάρκεια της μάχης. Είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο να μελετηθεί κάτι τέτοιο, μιας και πέρα από τις δύο μεταβλητές που υπάρχουν σε αυτό το μοντέλο, θα έπρεπε να ληφθούν υπόψη και διάφορες στρατηγικές, οι οποίες δεν είναι το ζητούμενο αυτής της εργασίας.

Συνεπώς, η προσομοίωση είναι μια μέθοδος που σε συνδυασμό με κάποια μαθηματικά μοντέλα μπορεί να αποδώσει χρήσιμα συμπεράσματα και να προσεγγίσει λύσεις, όπου θα ήταν αδύνατο να μελετηθούν, σε πραγματικά συστήματα.

Βιβλιογραφία

[1] Paul Smoker (1964). “Fear in the arms race: A mathematical study”. Peace Research Centre, Lancaster, England
[2] Anatol Rapoport (1957). “Lewis F. Richardson's mathematical theory of war”. Journal of Conflict Resolution
[3] Niall MacKay (2005). “Lanchester combat models”. Department of Mathematics, University of York
[4] Stephen N.J Majeski, David L. Jones (1981). ”Arms Race Modeling: Causality Analysis and Model Specification”. Department of Political Science Syracuse University, Department of Political Science University of Illinois
[5] Thomas W. Lucas, Turker Turkes(2003). “Fitting Lanchester Equations to the Battles of Kursk and Ardennes”. Operations Research Department, Naval Postgraduate School, Monterey, California, Turkish Army, Ankara, Turkey
[6] John W. R. Lepingwell (1987). “The Laws of Combat? Lanchester Reexamined” The MIT Press
[7] Michael D. Intriligator (1982). “Research on conflict theory: Analytic Approaches and areas of application” Department of Economics and Political Science University of California, Los Angeles
[8] Reinhard Haberfellner ,Olivier de Weck Ernst Fricke, Siegfried Vössner (2019). “Systems Engineering: Fundamentals and Applications” Springer Nature Switzerland AG
[9] Σκορδούλης Μιχαήλ, Χαλικιάς Μιλτιάδης(2014). “Εφαρμογές των μαθηματικών θεωριών πολέμου στη διοικητική των επιχειρήσεων” T.E.I. ΠΕΙΡΑΙΑ ΣΧΟΛΗ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ
[10] R. Dawkins and J.R Krebs (1979). “Arms races between and within species” Department of Zoology, South Parks Road, Oxford OX1 3PS, U.K.
[11] Courtney S. Coleman (1983). “Combat Models” Springer-Verlag New York Inc. 1983
[12] William R. Caspary(1967). “Richardson's Model of Arms Races: Description, Critique, and an Alternative Model”. WASHINGTON UNIVERSITY
[13] Charles H. Anderton(1989). “Arms Race Modeling: Problems and prospects”.Department of Economics,College of the Holy Cross
[14] Nils Petter Gleditsch, Ron P. Smith. “Lewis Fry Richardson: His Intellectual Legacy and Influence in the Social Sciences: The Influence of the Richardson Arms Race Model ” Peace Research Institute Oslo (PRIO) Oslo, Norway