Τεχνολογικο Εκπαιδευτικο Ιδρυμα Κεντρικης Μακεδονιας
Σχολη Τεχνολογικων Εφαρμογων
Τμημα Μηχανικων Πληροφορικης Τ.Ε.

# Αριθμητικές Μέθοδοι Τιμολόγησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης

## Πτυχιακη Εργασια

του

**ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΚΟΜΠΙΕΡΟΒΣΚΙ-ΣΤΕΦΑΝΙΔΗ**

**Επιβλέπων:** Χρήστος Αναστασίου
Καθηγητής

Σέρρες, Νοέμβριος 2018

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Κεντρικής Μακεδονίας
Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.

# Αριθμητικές Μέθοδοι Τιμολόγησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης

## Πτυχιακη Εργασια

του

**ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ ΚΟΜΠΙΕΡΟΒΣΚΙ-ΣΤΕΦΑΝΙΔΗ**

**Επιβλέπων:** Χρήστος Αναστασίου
Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 23η Νοεμβρίου 2018.

| | | |
|---|---|---|
| *(Υπογραφή)* | *(Υπογραφή)* | *(Υπογραφή)* |
| ............................. | ............................. | ............................. |
| Χρήστος Αναστασίου | Βαρσάμης Δημήτριος | Αλκιβιάδης Τσιμπίρης |
| Καθηγητής | Αναπληρωτής Καθηγητής | Επίκουρος Καθηγητής |

Σέρρες, Νοέμβριος 2018

Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Κεντρικής Μακεδονίας
Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε.



**Υπεύθυνη Δήλωση**
Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της πτυχιακής εργασίας, και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην πτυχιακή εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης, βεβαιώνω ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος σπουδών του Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής Τ.Ε. του ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας.

*(Υπογραφή)*

.............................
Αναστάσιος Κομπιερόβσκι-Στεφανίδης

# Περίληψη

Η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης ήταν ένα πρόβλημα που απασχόλησε ευρέως την οικονομική κοινότητα από την πρώτη στιγμή της σύλληψης των συμβολαίων. Για χρόνια η τιμολόγηση τους γινόταν με εμπειρικούς τρόπους και ελλιπή μοντέλα μη ολοκληρωμένα από μαθηματικής άποψης. Η πρώτη επιτυχής μοντελοποίηση ήρθε με την δημοσίευση της εργασίας των Fisher Black και Myron Scholes το 1973 με τίτλο"The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Έπειτα ο Robert C. Merton ήταν ο πρώτος που δημοσίευσε μια εργασία που επέκτεινε την μαθηματική κατανόηση της τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης και ήταν ο πρώτος που ανέφερε τον όρο "Black-Scholes Options Pricing Model". Το 1993 ο Merton και Scholes έλαβαν το βραβείο Νόμπελ οικονομικών, την χρονιά του 1997, από τον Σουηδικό οργανισμό, για τις ανακαλύψεις τους. Ο Black αναφέρθηκε τιμητικά από την επιτροπή για τις συνεισφορές του καθώς είχε αποβιώσει νωρίτερα το 1995(Το βραβείο Νόμπελ δεν δίνεται μεταθανάτια). Η δημοσίευση της εργασίας τους οδήγησε σε ραγδαία άνοδο της αγοράς των συμβολαίων αυτών καθώς παρείχε μαθηματική θεμελίωση και σαφήνεια στο χρηματιστήριο του Σικάγο που ήταν το πρώτο που ενέταξε το 1973 τα συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης στις δραστηριότητες του. Στόχος της πτυχιακής εργασίας είναι η επίλυση της εξίσωσης Black-Scholes με τις πιο σύγχρονες αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται στον πρακτικό κόσμο. Για να μπορέσει να γίνει αυτό θα υπάρξει θεωρητική ανάλυση των συμβολαίων αυτών, η παράθεση των μαθηματικών εννοιών του μοντέλου και η κατάληξη στην ομώνυμη εξίσωση του. Έπειτα θα αναλυθούν οι τρεις κυριότερες μέθοδοι επίλυσης της εξίσωσης που τιμολογεί το συμβόλαιο. Οι μέθοδοι αυτοί είναι, η Μέθοδος Monte Carlo, η μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών και η μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων.

## Λέξεις Κλειδιά

Περιουσιακό Στοιχείο, Χρηματοοικονομικό Παράγωγο, Δικαίωμα Προαίρεσης, κίνηση Brown, Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση, Μοντέλο Black-Scholes,Monte Carlo, Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών, Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

# Abstract

Pricing options has been a major problem for the economic community since the start of contracts. For years their pricing has been done empirically and with incomplete mathematical models. The first successful modeling came with the publication of Fisher Black and Myron Scholes in 1973 entitled "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Then Robert C. Merton was the first to publish a work that expanded the mathematical understanding of stock option pricing and was the first to mention the Black-Scholes Options Pricing Model. In 1993, Merton and Scholes received the Nobel Prize in economics in 1997 from the Swedish Academy for their discoveries. Black was mentioned as a contributor by the Swedish Academy for his contributions as he had died earlier in 1995 (The Nobel Prize is not given posthumously). The publication of their work led to a rapid rise in the market for these contracts as it provided mathematical legitimacy for the Chicago stock exchange, which was the first to include stock option contracts in 1973. The aim of the thesis is to solve the Black-Scholes equation with the most modern numerical methods used in the practice. In order to do this, there will be a theoretical analysis of these contracts, mathematical concepts for asset pricing will be discussed so than we can arrive at Black Scholes model and Equation. Then we will analyze the three main methods of solving the equation and pricing the contract. These methods are Monte Carlo method, Finite Difference method, and Finite Element method.

## Keywords

Asset, Financial Derivative, Option Contract, Brownian Motion, Stochastic Differential Equation, Black-Scholes Model, Monte Carlo Method, Finite Difference Method, Finite Element Method

*στους γονείς μου*

# Ευχαριστίες

Θα ήθελα καταρχήν να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Αναστασίου Χρήστο για την επίβλεψη αυτής της διπλωματικής εργασίας, για την ευκαιρία που μου έδωσε να την εκπονήσω και για την καθοδήγησή του και την εξαιρετική συνεργασία που είχαμε. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου και τους φίλους μου για την καθοδήγηση και την ηθική συμπαράσταση που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια.

# Περιεχόμενα

# Κατάλογος Σχημάτων

# Κατάλογος Πινάκων

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

Οι αγορές και τα χρηματιστήρια είναι ένα από τα κύρια γρανάζια της παγκόσμιας οικονομίας. Το συνολικό παγκόσμιο κεφάλαιο των δημόσιων εταιρειών που βρίσκονται στις αγορές, υπολογίζεται περίπου στα 70 τρισεκατομμύρια. Καθημερινά αλλάζουν χέρια τρισεκατομμύρια υπό την μορφή μετοχών, συναλλαγμάτων, εμπορευμάτων(χρυσός, πετρέλαιο κλπ.), ομολόγων και χρηματοοικονομικών παραγώγων.

Η αγορά των χρηματοοικονομικών παραγώγων υπολογίζεται στα 1,2 τετρακισεκατομμύρια. Αυτό συμβαίνει καθώς υπάρχουν εκατοντάδες παράγωγα, όπως είναι οι προθεσμιακές συμβάσεις, τα δικαιώματα προαίρεσης τα swaps κ.α., για κάθε περιουσιακό στοιχείο που είναι διαθέσιμο στην αγορά. Η ιστορία των παραγώγων αυτών ξεκινάει πολλούς αιώνες πριν την γέννηση των σύγχρονων αγορών όπως τις ξέρουμε.

Συμβόλαια παρόμοια με τα δικαιώματα προαίρεσης χρησιμοποιούνται από αρχαιοτάτων χρόνων. Η πρώτη καταγραφή αγοράς τέτοιου συμβολαίου έγινε στην αρχαία Ελλάδα. Ο μαθηματικός Θαλής ο Μιλήσιος προέβλεψε την αύξηση της σοδιάς των ελιών και πριν την περίοδο περισυλλογής αγόρασε το δικαίωμα να χρησιμοποιήσει ελαιοτριβεία την άνοιξη. Όταν λοιπόν ήρθε η άνοιξη και οι σοδιές ήταν μεγαλύτερες από το αναμενόμενο νοίκιασε τα ελαιοτριβεία του σε υψηλότερη τιμή απ΄ όσο είχε πληρώσει για το ¨δικαίωμα¨.

Η ανεπίσημη εμφάνιση των δικαιωμάτων προαίρεσης στον σύγχρονο κόσμο έγινε την δεκαετία του 1920 στην Αμερική στα επονομαζόμενα bucket shops. Τα bucket shops ήταν μαγαζιά όπου η φήμη τους και οι ηθικές τους ήταν αρκετά αμφισβητήσιμες σε σχέση με τις εδραιωμένες φίρμες. Συγκεκριμένα ο Jesse Livermore έκανε γνωστά τα μαγαζιά αυτά καθώς προέβλεπε τις πορείες των μετοχών και δεχόταν στοιχήματα για τις μετοχές από τρίτους ποντάροντας κόντρα στις προβλέψεις τους.

Παρόλες τις παράνομες δραστηριότητες και την φήμη τους, τα δικαιώματα προαίρεσης δεν είχαν καταφέρει να εισέλθουν στις αγορές των χρηματιστηρίων καθώς η τιμολόγηση τους ήταν ένα πρόβλημα που πολλοί προσπάθησαν να λύσουν, αλλά στο τέλος τα μοντέλα τους ήταν ελλιπή. Όλα αυτά μέχρι το 1973 όπου μετά την δημοσίευση των εργασιών των Black, Scholes και Merton όπου παραθέτουν ένα μαθηματικό μοντέλο για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων με αποτέλεσμα το χρηματιστήριο του Σικάγο να είναι το πρώτο που εκδίδει συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης την ίδια κιόλας χρονιά.

Σήμερα τα δικαιώματα προαίρεσης είναι ίσως η πιο ενεργή αγορά παραγώγων στον κόσμο. Χρησιμοποιούνται κυρίως για την μείωση του ρίσκου στην θέση μιας μετοχής. Γι΄ αυτό η ακριβής τιμολόγηση τους είναι ένα από τα πιο σημαντικά και κρίσιμα πράγματα που πρέπει να κάνει σωστά ένας αναλυτής καθώς από τους υπολογισμούς του εξαρτώνται εκατομμύρια.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τις πλέον διαδεδομένες αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητα των χρηματιστηρίων θα δούμε πως γίνεται η τιμολόγηση των συμβολαίων δικαιωμάτων προαίρεσης.

## 1.1 Οργάνωση του τόμου

Η εργασία αυτή είναι οργανωμένη σε επτά κεφάλαια: Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται το θεωρητικό υπόβαθρο των βασικών εννοιών που σχετίζονται με τη διπλωματική αυτή. Αρχικά περιγράφονται τα περιουσιακά στοιχεία, στη συνέχεια τα χρηματοοικονομικά παράγωγα και τέλος μερικά ειδικές έννοιες που θα μας χρειαστούν. Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται πλήρης θεωρητική ανάλυση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Αρχικά περιγράφονται τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα έπειτα τα Αμερικάνικα και τέλος αναφέρονται κάποιες πιο ειδικές περιπτώσεις. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται όλες οι μαθηματικές έννοιές που θα μας χρειαστούν για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στο θέμα της εργασίας. Θα δούμε κάποιες έννοιες του στοχαστικού λογισμού και θα καταλήξουμε στο μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση ενός περιουσιακού στοιχείου όπως μια μετοχή. Έπειτα στο Κεφάλαιο 5 προχωράμε στο περίφημο μοντέλο Black-Scholes χτίζοντας το πρώτα βήμα προς βήμα και μετά αναλύοντας το. Τα επόμενα τρία κεφάλαια αφιερώνονται για τις μεθόδους επίλυσης, Δυωνιμικού δέντρου, Monte Carlo και Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών αντίστοιχα. Θα αναλύσουμε κάθε μέθοδο και θα δούμε τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα κάθε μιας από αυτές καθώς και την συμπεριφορά τους σε δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου αλλά και Αμερικάνικου. Τέλος στο Κεφάλαιο 9 θα παραθέσουμε τα συμπεράσματα μας συγκρίνοντας τις τρεις μεθόδους, θα δοθεί η συνεισφορά αυτής της πτυχιακής εργασίας, καθώς και μελλοντικές επεκτάσεις.

# Κεφάλαιο 2

# Όροι και Έννοιες της Αγοράς

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αναλυτικά οι βασικές έννοιες που θα σχετίζονται με την εργασία αυτή.

## 2.1 Περιουσιακά Στοιχεία

Περιουσιακό στοιχείο είναι οτιδήποτε μπορεί να κατέχει κανείς ως ιδιοκτησία, ή μπορεί να ελέγχει προς όφελος του, και το οποίο έχει οικονομική (εμπορική, ανταλλακτική) αξία. Η έννοια των περιουσιακών στοιχείων, από καθαρά οικονομική άποψη, μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της ιδιότητας τους να μεταφέρουν αγοραστική δύναμη στο μέλλον[7]. Για παράδειγμα, για να αποκτήσουμε ένα μονοετές ομόλογο ονομαστικής αξίας 100 ευρώ «θυσιάζουμε» παρούσα αγοραστική δύναμη ίση με την ονομαστική και αποκτούμε μελλοντικά (σε ένα χρόνο) αγοραστική δύναμη ίση με την ονομαστική συν το κουπόνι. Μερικοί τύποι περιουσιακών στοιχείων είναι οι μετοχές, τα ομόλογα, τα συναλάγματα κ.α.

### 2.1.1 Θέση Αγοράς (Long position)

Θέση αγοράς (Long position) είναι η θέση την οποία έχει πάρει ένας επενδυτής αγοράζοντας ένα χρεόγραφο, ένα νόμισμα, ένα συμβόλαιο ή ένα εμπόρευμα με σκοπό την επένδυση ή την κερδοσκοπία. Ο επενδυτής παίρνοντας θέση long, εκτιμά η τιμή του χρεογράφου θα ανέβει στο μέλλον, οπότε θα το πουλήσει, κλείνοντας τη θέση του (close position) και καταγράφοντας πραγματοποιηθέντα κέρδη.

### 2.1.2 Ανοικτή Πώληση / Θέση Πώλησης (Short selling / position)

Ανοικτή πώληση (short selling) είναι μία τεχνική που χρησιμοποιείται από τους επενδυτές με σκοπό να κερδίσουν από την πτώση των τιμών περιουσιακών στοιχείων. Οι επενδυτές δανείζονται περιουσιακά στοιχεία που δεν κατέχουν, από άλλους επενδυτές, τα πουλάνε και σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή θα αναγκαστούν να τα αγοράσουν πάλι για να τα επιστρέψουν στο δανειστή. Ο δανειστής δεν διατρέχει κανέναν κίνδυνο γιατί θα πάρει πίσω τις μετοχές του συν μία μικρή απόδοση για την διάρκεια που τις είχε δανείσει. Ο short seller ελπίζει να κερδίσει από την πτώση των τιμών των χρεογράφων, επωφελούμενος την διαφορά στις τιμές μεταξύ ημερομηνίας αγοράς-πώλησης.

## 2.2 Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (Derivatives)

Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα είναι επενδυτικά χρηματοοικονομικά εργαλεία που βασίζουν την τιμή τους και προκύπτουν από άλλα βασικά προϊόντα. Η αξία των παραγώγων δηλαδή προέρχεται από την αξία των υποκειμένων μέσων (underlying instruments) όπως τις συναλλαγματικές ισοτιμίες, τα επιτόκια, τις τιμές των χρεογράφων, των μετοχών, των εμπορευμάτων και των χρηματοοικονομικών δεικτών. Σε αντίθεση με τις υποκείμενες αξίες, οι συμβάσεις των παράγωγων προϊόντων έχουν συνήθως περιορισμένη διάρκεια και πάντα συγκεκριμένες ημερομηνίες λήξης.

## 2.3 Θεωρία Αποτελεσματικής Αγοράς (Efficient market theory)

Θεωρία της αποτελεσματικής αγοράς είναι μια θεμελιώδης οικονομική θεωρία που ορίζει ότι οι χρηματαγορές είναι διαρκώς πλήρως ενημερωμένες, δηλαδή, οι παρούσες τιμές των χρεογράφων αντικατοπτρίζουν πλήρως κάθε σχετική και διαθέσιμη πληροφορία κατά τρόπο αποτελεσματικό και αλλάζουν συνεχώς προκειμένου να ενσωματώσουν οποιαδήποτε νέα πληροφορία προκύψει.

Γι' αυτό το λόγο είναι αδύνατο να νικήσει κάποιος την αγορά χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε πληροφορία αφού αυτή, σύμφωνα με τη θεωρία, έχει ήδη προεξοφληθεί και ενσωματωθεί στην τιμή του χρεογράφου.

## 2.4 Εξισορροπητική Κερδοσκοπία (Arbitrage)

Εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrage) είναι η ταυτόχρονη αγορά και πώληση της ίδιας (ή παρόμοιας) επένδυσης σε δύο διαφορετικές αγορές με δύο διαφορετικές τιμές, στρατηγική η οποία μπορεί να οδηγήσει σε κέρδη χωρίς την ανάληψη κινδύνου. Άρα ο κερδοσκόπος (arbitrageur) θα έχει πάντα δύο θέσεις αντίθετες μεταξύ τους, όπου η μία καλύπτει την άλλη. Παράδειγμα:Έστω ότι ένα βαρέλι πετρέλαιο πωλείται για 135 $ στη Νέα Υόρκη και 134,5$ στο Λονδίνο. Η ταυτόχρονη αγορά της επένδυσης στο Λονδίνο και πώληση της στην Νέα Υόρκη μπορεί να οδηγήσει σε κέρδη της τάξης του $0,5 το βαρέλι χωρίς κίνδυνο. Στην θεωρία της Αποτελεσματικής Αγοράς δεν δημιουργείται ευκαιρία για (Arbitrage), στην πραγματικότητα όμως υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που δημιουργείται η ευκαιρία για εξισορροπητική κερδοσκοπία αλλά οι διαφορές μηδενίζονται σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα.

## 2.5 Επιτόκιο Μηδενικού Κινδύνου (Risk-free rate)

Ακίνδυνο επιτόκιο ή επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι το επιτόκιο το οποίο μπορεί να επιτευχθεί επενδύοντας σε οικονομικά προϊόντα που δεν ενσωματώνουν κίνδυνο. Παρόλο που μια πραγματικά ακίνδυνη επένδυση υπάρχει μόνο θεωρητικά, συχνά θεωρούνται ως ακίνδυνες επενδύσεις τα κυβερνητικά ομόλογα επειδή η πιθανότητα να πτωχεύσει μία χώρα είναι πολύ μικρή. Καθώς αυτό το επιτόκιο μπορεί να επιτευχθεί ακίνδυνα εννοείται ότι οποιαδήποτε επένδυση ενσωματώνει κάποιο επιπλέον ρίσκο, πρέπει να ανταμείψει τους επενδυτές με υψηλότερες αποδόσεις. Το ακίνδυνο επιτόκιο είναι πολύ σημαντικό στην θεωρία χαρτοφυλακίου και στην ορθολογική τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων.

## 2.6 Κόσμος Ουδέτερου Ρίσκου

Μια από τις πιο σημαντικές υποθέσεις σε όλα τα μαθηματικά μοντέλα γύρω από τα χρηματοοικονομικά είναι ο κόσμος του ουδέτερου ρίσκου. Η αρχή αυτή μας λέει ότι ο επενδυτής δεν ενδιαφέρεται για το ρίσκο μιας επένδυσης αλλά μόνο για την αναμενόμενη επιστροφή της επένδυσης. Αν για παράδειγμα υπάρχει η επιλογή να βγάλει κανείς κέρδος 50$ με πιθανότητα 100% ή αντίστοιχα να έχει 50% να κερδίσει 100$ και 50% να μην κερδίσει τίποτα για τον επενδυτή ουδέτερου ρίσκου τα δύο αυτά σενάρια δεν έχουν καμία απολύτως διαφορά στα μάτια του. Στην πραγματικότητα όμως κάθε επενδυτής έχει διαφορετικές προτιμήσεις στα ρίσκα που είναι διατεθιμένος να πάρει, όμως αυτό δεν είναι εφικτό να μοντελοποιηθεί οπότε είναι μαθηματικά αποδεκτό να υποθέτουμε ότι τα μοντέλα ̈ζουν' σε έναν κόσμο που το ρίσκο είναι αδιάφορο.

# Κεφάλαιο 3

# Συμβόλαια Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Στο κεφάλαιο αυτό εμβαθύνουμε περισσότερο στις έννοιες και τις ορολογίες των συμβολαιογραφικών δικαιωμάτων προαίρεσης παραθέτοντας τα βασικότερα είδη τους.

## 3.1 Συμβόλαια Δικαιωμάτων Προαίρεσης (Option contracts)

Συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης είναι συμβόλαια για μελλοντικές αγοροπωλησίες χρεογράφων. Δίνουν στον αγοραστή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να ζητήσει την εκπλήρωση της συμφωνίας. Στα συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης δηλαδή, ο αγοραστής (holder) αποκτά το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει έναν υποκείμενο τίτλο σε μία συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή και για προκαθορισμένη τιμή (τιμή εξάσκησης), πληρώνοντας την τιμή του δικαιώματος (option premium) χωρίς να έχει καμία άλλη υποχρέωση. Εάν θέλει μπορεί να μην εξασκήσει αυτό το δικαίωμα οπότε απλά χάνει το κεφάλαιο που έδωσε για την αγορά του δικαιώματος. Τα δικαιώματα προαίρεσης κατηγοριοποιούνται βάση του υποκείμενου τίτλου ιδιοκτησίας.[12]

- Equity option (μετοχή)
- Bond option (ομόλογο)
- Future option (Συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης)
- Index option (δείκτης)
- Commodity option (εμπόρευμα)
- Currency option (συνάλλαγμα)
- Basket option (Καλάθι χρηματοοικονομικών στοιχείων)

Παρακάτω βλέπουμε τα χαρακτηριστικά ενώς Συμβολαίου :

- **Buyer/Holder/Αγοραστής** : Αυτός που αγοράζει το δικαίωμα προαίρεσης.
- **Seller/Issuer/Πωλητής** : Αυτός που εκδίδει και πουλάει τα δικαίωμα προαίρεσης.
- **Premium/Τιμή συμβολαίου** : Το κόστος αγοράς του συμβολαίου.
- **Strike Price/Τιμή εξάσκησης** : Η τιμή $\boldsymbol{K}$ αγοράς-πώλησης που ορίζεται στο συμβόλαιο για το περιουσιακό στοιχείο.
- **Maturity date/Expiry/Ημερομηνία ωρίμανσης** : Η ημερομηνία $\boldsymbol{T}$ εξάσκησης του δικαιώματος.
- **Call Option** : Το **δικαίωμα αγοράς** του περιουσιακού στοιχείου την ημερομηνία ωρίμανσης $\boldsymbol{T}$ στην τιμή εξάσκησης $\boldsymbol{K}$.
- **Put Option** : Το **δικαίωμα πώλησης** του περιουσιακού στοιχείου την ημερομηνία ωρίμανσης $\boldsymbol{T}$ στην τιμή εξάσκησης $\boldsymbol{K}$.

## 3.2 Τύποι Συμβόλαιων

Παρακάτω θα παρουσιαστούν οι πιο βασικοί τύποι συμβολαίων δικαιωμάτων προαίρεσης και θα γίνουν αναφορές σε πιο ειδικές περιπτώσεις.

### 3.2.1 Ευρωπαϊκά Συμβόλαια(European Options)

Τα ευρωπαϊκά συμβόλαια είναι η πιο απλή μορφή δικαιώματος και μπορούν να εξασκηθούν μόνο την ημερομηνία ωρίμανσης, δηλαδή σε ένα συγκεκριμένο σημείο στον χρόνο.

#### Δικαίωμα Αγοράς

- **Long Call** : Ο επενδυτής πιστεύει πως η μετοχή θα ανέβει πάνω από μια τιμή $\boldsymbol{K}$ μέσα στην επόμενη χρονική περίοδο.

  **1ο σενάριο**: Αγοράζει την μετοχή την τρέχουσα χρονική στιγμή **t** και πουλάει την μετοχή του όταν η τιμή της ανέβει μελλοντικά. Έτσι όμως ρισκάρει σε περίπτωση που η μετοχή δεν ανέβει να χάσει το κεφάλαιο του.

  **2ο σενάριο**: Αγοράζει το συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς της μετοχής(Call Option) με τιμή εξάσκησης έως $\boldsymbol{K}$ . Πληρώνει ένα premium ποσό για το συμβόλαιο πολύ μικρότερο από το 1ο σενάριο όπου επενδύει μεγαλύτερο κεφάλαιο και αγοράζει έναν όγκο μετοχών. Αν η τιμή της μετοχής δεν ανέβει πάνω από $\boldsymbol{K}$ αλλά πέσει τελικά δεν εξασκεί το δικαίωμα και έχει χάσει πολύ λιγότερα χρήματα σε σχέση με το 1ο σενάριο άρα το ρίσκο του είναι μικρότερο. Σε περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει πάνω από $\boldsymbol{K}$ το παρακάτω γράφημα δείχνει στο σενάριο αυτό τις απολαβές του και τα συνολικά κέρδη του.

**Σημείωση** : Τα κέρδη του είναι χαμηλότερα από το 1ο σενάριο αλλά αυτό που ενδιαφέρει τον επενδυτή είναι να μειώσει το ρίσκο.

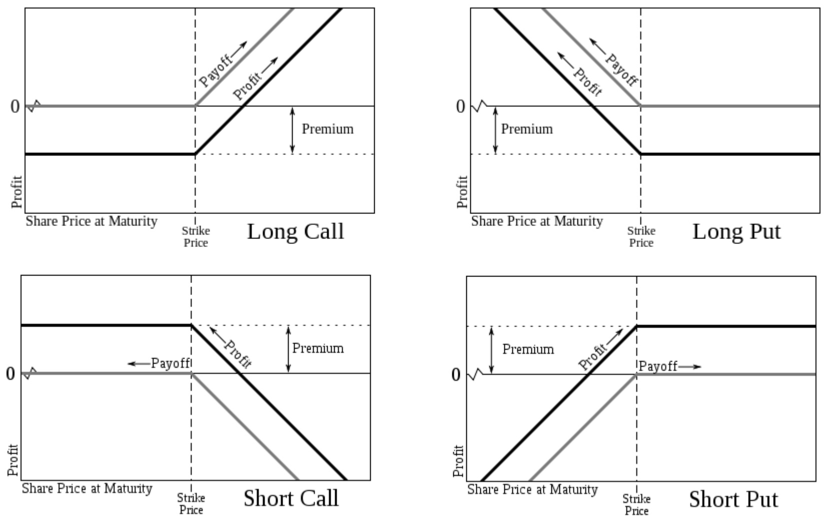
- **Short Call** : Από την μεριά του επενδυτή που πιστεύει πως η μετοχή θα πέσει σημαντικά μέσα στην επόμενη χρονική περίοδο κάτω από τιμή $\boldsymbol{K}$, εκδίδει το συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς της μετοχής(Call Option) για τιμή $\boldsymbol{K}$. Αν η τιμή της μετοχής δεν ανέβει αλλά πέσει οι αγοραστές του συμβολαίου δεν εξασκούν το δικαίωμα οπότε ο επενδυτής βγάζει κέρδος υπό την μορφή του premium.

  **Σημείωση** : Σε περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει οι πιθανές απώλειες του είναι απεριόριστες.

**Δικαίωμα Πώλησης**

- **Long Put** : Ο επενδυτής πιστεύει πως η μετοχή θα πέσει σημαντικά μέσα στην επόμενη χρονική περίοδο κάτω από μια τιμή $\boldsymbol{K}$. Αγοράζει το συμβόλαιο δικαιώματος πώλησης της μετοχής(Put Option). Πληρώνει ένα premium ποσό για το συμβόλαιο . Αν η τιμή της μετοχής δεν πέσει κάτω από $\boldsymbol{K}$ αλλά ανέβει τελικά δεν εξασκεί το δικαίωμα και έχει ζημιά το premium. Σε περίπτωση που η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από $\boldsymbol{K}$ το παρακάτω γράφημα δείχνει στο σενάριο αυτό τις απολαβές του και τα συνολικά κέρδη του.

- **Short Put**: Ο επενδυτής πιστεύει πως η μετοχή θα ανέβει σημαντικά μέσα στην επόμενη χρονική περίοδο πάνω από τιμή $\boldsymbol{K}$. Εκδίδει το συμβόλαιο δικαιώματος πώλησης της μετοχής(Put Option) για τιμή $\boldsymbol{K}$. Αν η τιμή της μετοχής δεν πέσει αλλά ανέβει οι αγοραστές του συμβολαίου δεν εξασκούν το δικαίωμα οπότε ο επενδυτής βγάζει κέρδος υπό την μορφή του premium. Σε περίπτωση που η τιμή της μετοχής πέσει οι πιθανές απώλειες του είναι απεριόριστες.




Σχήμα 3.1: Γραφική Παράσταση θέσεων για τα Ευρωπαϊκά Συμβόλαια.

### 3.2.2 Αμερικάνικα Συμβόλαια (American Options)

Τα Αμερικάνικα συμβόλαια είναι σχεδόν όμοια με τα Ευρωπαϊκά συμβόλαια με μια βασική διαφορά. Προσφέρουν το δικαίωμα εξάσκησης τους οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι την ημερομηνία ωρίμανσης.

### 3.2.3 Εξωτικά Συμβόλαια

Τα Ευρωπαϊκά και Αμερικάνικα συμβόλαια ονομάζονται και Vanilla Options γιατί είναι οι πιο απλές μορφές των δικαιωμάτων προαίρεσης. Υπάρχουν όμως και πιο περίπλοκα συμβόλαια που έχουν περισσότερες ιδιότητες που συσχετίζονται με την εξόφληση τους. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι τα Ασιατικά δικαιώματα προαίρεσης(Asian Options).

**Asian option ή δικαίωμα μέσης** τιμής είναι ένα εξωτικό δικαίωμα προαίρεσης του οποίου η πληρωμή εξαρτάται από την μέση τιμή της αξίας του υποκείμενου χρεογράφου στη διάρκεια μιας ορισμένης χρονικής περιόδου και όχι μόνο κατά την ωρίμανση του, όπως συμβαίνει στα απλά δικαιώματα προαίρεσης (plain vanilla options).

Άλλοι τέτοιοι τύποι είναι τα Barrier Options, Compound Options, Contingent premium option, Bermuda Option etc.

# Κεφάλαιο 4

# Μοντελοποίηση Τιμής ενός Περιουσιακού Στοιχείου

Τώρα που γνωρίζουμε τι είναι τα Συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης για να προχωρήσουμε στο μοντέλο Black-Scholes και στην τιμολόγηση τους πρέπει πρώτα να γνωρίσουμε κάποιες μαθηματικές έννοιες που θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση του μοντέλου και ταυτόχρονα να δούμε πως θα μοντελοποιήσουμε την τιμή ενώς περιουσιακού στοιχείου.

## 4.1 Εισαγωγή

Παρατηρώντας κανείς την ημερήσια τιμή μιας μετοχής είναι ξεκάθαρο ότι η τροχιά της τιμής μέσα στην μέρα έχει συνεχόμενες τυχαίες διακυμάνσεις οι οποίες δεν είναι δυνατόν να μοντελοποιηθούνε χρησιμοποιώντας τον κλασσικό λογισμό. Για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα μαθηματικό μοντέλο που θα μας βοηθήσει στην κατανόηση και επεξεργασία της μετοχής θα χρειαστεί να εισέλθουμε στον στοχαστικό λογισμό και τις στοχαστικές διαδικασίες.

Θα ξεκινήσουμε από τον διακριτό χρόνο, θα συνεχίσουμε στον συνεχόμενο και στο τέλος θα καταλήξουμε στην πιο γνωστή στοχαστική διαδικασία για την μοντελοποίηση μιας μετοχής την κίνηση Brown ή αλλιώς Διαδικασία Wienner.

## 4.2 Αξιώματα και Θεωρήματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται μερικά αξιώματα και θεωρήματα της θεωρίας των πιθανοτήτων.

### 4.2.1 Ο νόμος των Μεγάλων Αριθμών

(Αδύναμος νόμος των μεγάλων αριθμών). Έστω α.ο.κ. (ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες) τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_1, \ldots, X_n$ με μέση τιμή $\mu$ και διακύμανση $\sigma$ και έστω $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n} X_i$. Τότε για κάθε θετικό $\epsilon$, $P\left(|\overline{X} - \mu| \geq \epsilon\right) \to 0$ με $n \to \infty$.

**Απόδειξη :** Λόγω γραμμικότητας της αναμενόμενης τιμής, βλέπουμε ότι

$$E[\overline{X}] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n} E[X_i] = \mu \tag{4.1}$$

Επομένως $E[\overline{X} - \mu] = 0$
Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την διακύμανση του $\overline{X}$. Έχουμε ότι

$$V[\overline{X}] = E[(\overline{X} - \mu)^2] = E[(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{i=n}(X_i - \mu))^2]$$

,όπου από το γεγονός ότι τα $X_i$ είναι ανεξάρτητα, γίνεται

$$E[(\overline{X} - \mu)^2] = \frac{1}{n^2}E[\sum_{i=0}^{i=n}(X_i - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Αφού

$$\epsilon^2 P\left(|\overline{X} - \mu| \geq \epsilon\right) \leq E[(\overline{X} - \mu)^2] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Βλέπουμε ότι για

$$P\left(|\overline{X} - \mu| \geq \epsilon\right) \leq \frac{V[\overline{X}]}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

όπου το δεξί σκέλος της εξίσωσης τείνει στο 0 όσο το $n$ τείνει στο άπειρο. Το θεώρημα παραπάνω παραθέτεται στην αδύναμη μορφή του.

1. Οι συνθήκες μπορούν να χαλαρώσουν και πάλι να έχουμε το ίδιο συμπέρασμα,

2. Ένα πιο δυνατό συμπέρασμα μπορεί να ειπωθεί από την ίδια υπόθεση (strong law of large number).

### 4.2.2 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν από έναν πληθυσμό τυχαίων μεταβλητών που ακολουθεί οποιαδήποτε κατανομή με μέση τιμή $\mu$ και διασπορά $\sigma^2$ επιλέξουμε τυχαία δείγματα μεγέθους $n$ και υπολογίσουμε τους μέσους τους, τότε, για μεγάλα $n$ (θεωρητικά $n \to \infty$ ) η κατανομή αυτών των μέσων (των δειγματικών) είναι κατά προσέγγιση κανονική κατανομή με μέση τιμή επίσης $\mu$ και διασπορά $\frac{\sigma^2}{n}$.

### 4.2.3 Ιδιότητα Markov

Η αλυσίδα Markov, ή Μαρκοβιανή αλυσίδα, που πήρε το όνομα της από τον Αντρέι Μαρκόφ, είναι ένα μαθηματικό σύστημα που μεταβάλλεται από μια κατάσταση σε μια άλλη, ανάμεσα σε ένα πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Είναι μια τυχαία διαδικασία που δε διατηρεί μνήμη για τις προηγούμενες μεταβολές: Η επόμενη κατάσταση εξαρτάται μόνο από την τωρινή κατάσταση και σε καμιά περίπτωση από αυτές που προηγήθηκαν. Αυτό το συγκεκριμένο είδος ¨αμνησίας' ονομάζεται μαρκοβιανή ιδιότητα.

### 4.2.4 Ιδιότητα Martingale

Στην θεωρία πιθανοτήτων, ένα martingale είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (δηλ. Μια στοχαστική διαδικασία) για την οποία, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή στην παρούσα ακολουθία, η προσδοκία της επόμενης τιμής στην ακολουθία είναι ίση με την παρούσα παρατηρούμενη τιμή ακόμη και δεδομένης της γνώσης όλων των προηγούμενων τιμών.

## 4.3 Στοχαστικές Διαδικασίες

**Ορισμός** : Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t) : t \in T\}$, όπου $t$ είναι μια παράμετρος που παίρνει τιμές σε ένα κατάλληλα ορισμένο σύνολο $T$.

Για κάθε σημείο $\omega \in \Omega$ που αντιστοιχίζει $t \mapsto X(t, \omega)$ είναι το αντίστοιχο μονοπάτιδειγματοληψία.

Η ιδέα είναι ότι αν εκτελέσουμε το πείραμα και παρατηρήσουμε τις τυχαίες τιμές $X(\cdot)$ καθώς ο χρόνος εξελίσσεται, στην πραγματικότητα παρατηρούμε ένα μονοπάτι $X(t, \omega|t \geq 0$ για κάποιο καθορισμένο $\omega \in \Omega$. Αν επαναλάβουμε το πείραμα, θα παρατηρήσουμε ένα διαφορετικό μονοπάτι.

Αν $t = 0, 1, 2, ...$, έχουμε στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο.

Αν $t \in [0, a)$, έχουμε στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο.

**Εναλλακτικός ορισμός** : Μια στοχαστική διαδικασία είναι η κατανομή πιθανότητας σε μονοπάτια.

Παράδειγμα :

1. Έστω $f(t) = t$ με πιθανότητα 1.

2. Έστω $f(t) = t$ για κάθε $t$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$.

   Έστω $f(t) = -t$ για κάθε $t$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$.

3. Έστω $f(t) = t$ ή $-t$ με πιθανότητα $\frac{1}{2}$ για κάθε αποτέλεσμα για κάθε $t$.

Παρατηρούμε ότι με τον κλασσικό ορισμό δεν είναι ξεκάθαρο αμέσως ότι αυτές είναι στοχαστικές διαδικασίες αλλά άμα σκεφτεί κανείς τον εναλλακτικό ορισμό τότε μπορούμε να καταλάβουμε πολύ περισσότερα πράγματα.

Στην **πρώτη περίπτωση** για τυχαίο $t$ γνωρίζοντας όλες τις προηγούμενες $X_t$ είναι φανερό ότι $X_{t+1}$ θα είναι πάλι $t$.

Στην **δεύτερη περίπτωση** ομοίως για τυχαίο $t$ παρατηρούμε ότι βλέποντας το $X_t$ μπορούμε να γνωρίζουμε το $X_{t+1}$.

Στην **τρίτη περίπτωση** όμως για τυχαίο $t$ δεν μπορούμε να γνωρίζουμε το $X_{t+1}$, γνωρίζουμε μόνο τις πιθανότητες.

Η μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών γνωρίζοντας το παρελθόν, είναι να βγάλουμε λογικά συμπεράσματα για το μέλλον .

## 4.4 Απλός Τυχαίος Περίπατος

Έστω $Y_1, Y_2, .., Y_n$ είναι ανεξάρτητες όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε $Y_i = \pm 1$ με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{2}$.

Έστω $X_0 = 0$ και $X_k = Y_1 + ... + Y_k$, για όλα τα $k \geq 1$.

Αυτό δίνει κατανομή πιθανότητας στις ακολουθίες $\{X_0, X_1, ....\}$ και ορίζει έτσι μία διακριτού χρόνου στοχαστική διαδικασία. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή ως ο μονοδιάστατος απλός τυχαίος περίπατος, την οποία εμείς θα αναφέρουμε ως τυχαίο περίπατο από τώρα και στο εξής.

### 4.4.1 Ιδιότητες Τυχαίου Περίπατου

Από το **Κεντρικό Θεώρημα Ορίου** μπορούμε να δούμε ότι για αρκετά μεγάλο $n$, η κατανομή του είναι $\frac{1}{\sqrt{n}} X_n$ και συγκλίνει στην κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.

Αυτή η παρατήρηση μας δίνει αρκετές πληροφορίες για τον τυχαίο περίπατο. Παρακάτω θα παραθέσουμε κάποιες ιδιότητες του :

1. $E[X_i] = 0$ για κάθε $i$.
2. (Ανεξάρτητες αυξομειώσεις) Για κάθε $0 = k_0 \leq k_1 \leq k_2 \leq ... \leq k_n$, οι τυχαίες μεταβλητές $X_{k_{i+1}} - X_{k_i}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
3. (Στασιμότητα) Για όλα τα $h > 1$ και $k > 0$ η κατανομή του $X_{k+h} - X_k$ είναι ίδια με την κατανομή του $X_h$.

**Παράδειγμα :** Έστω πως παίζουμε ένα τυχερό παιχνίδι όπου ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα και κάθε φορά που έρχεται κορώνα κερδίζουμε 1 δολάριο και κάθε φορά που έρχεται γράμματα χάνουμε 1 δολάριο. Το κεφάλαιο μας κατά την διάρκεια του παιχνιδιού είναι ένας απλός τυχαίος περίπατος.

Αν μετά από 6 ρίψεις έχω ΓΚΚΓΚΓ τότε δεν χάσαμε ούτε κερδίσαμε. Αν $R_i$ το τυχαίο ποσό 1\$ ή -1\$ που κερδίζω σε μια $i$ ρίψη τότε έχουμε

$$E[R_i] = 0, \quad E[R_i^2] = 1, \quad E[R_i R_j] = 0.$$

Σε αυτό το παράδειγμα δεν μας ενδιαφέρει αν οι αναμενόμενες τιμές έχουν συσχέτιση με το παρελθόν. Με άλλα λόγια το γεγονός να ρίξω 5 συνεχόμενες κορώνες δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της έκτης ρίψης.

Έστω $S_i$ το μέσο συνολικό ποσό χρημάτων που έχω κερδίσει μέχρι την $i$ ρήψη.

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} R_j$$

Υπολογίζουμε τώρα τις αναμενόμενες τιμές του ˜Σι χωρίς να μας ενδιαφέρει τι πληροφορίες έχουμε για τις ρίψεις. Δηλαδή υπολογίζουμε αναμενόμενες τιμές του μέλλοντος πριν καν το πείραμα αρχίσει.

$$E[S_i] = 0, \quad E[S_i^2] = E[R_i^2 + 2R_1R_2 + ...] = i$$

Έστω ότι έχω ρίξει 5 φορές το νόμισμα, τι μπορώ να πω για την αναμενόμενη τιμή της έκτης ρίψης;

Αυτή είναι η αναμενόμενη τιμή υπό εξάρτηση, δηλαδή

$$E[S_6|R_1, R_2, ..., R_5] = S_5$$

**Παρατήρηση** : Αυτή είναι η ιδιότητα Markov. Συνεπώς ο απλός τυχαίος περίπατος μας έχει την ιδιότητα Markov.

Επίσης ο απλός τυχαίος περίπατος του πειράματος μας έχει και άλλη μια ιδιότητα. Μετά από 5 ρίψεις γνωρίζουμε το ποσό που έχουμε κερδίσει. Το αναμενόμενο ποσό μετά την έκτη ρίψη είναι το ποσό που ήδη έχουμε και συγκεκριμένα για κάθε $i$ ρίψη το αναμενόμενο ποσό είναι το ποσό που έχουμε ήδη κερδίσει.

$$E[S_i|S_j, j < i] = S_j$$

Συνεπώς ο απλός τυχαίος περίπατος μας έχει και την ιδιότητα Martingale.

## 4.5 Ιδιότητα Τετραγωνικής Μεταβολής

Θα ορίσουμε τώρα την τετραγωνική μεταβολή του τυχαίου περίπατου[13]. Η τετραγωνική μεταβολή ορίζεται ως

$$\sum_{j=1}^{i} (S_i - S_{j-1})^2.$$

Επειδή είτε κερδίζουμε είτε χάνουμε 1\$ μετά από κάθε ρίψη , $|S_j - S_{j-1}| = 1$. Συνεπώς η τετραγωνική μεταβολή είναι πάντα $i$.

$$\sum_{j=1}^{i}(S_i - S_{j-1})^2 = i.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε άλλη μια φορά το παράδειγμα με το νόμισμα και αυτό θα μας οδηγήσει στον τυχαίο περίπατο συνεχούς χρόνου.

## 4.6 Κίνηση Brown

Μια από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες είναι η κίνηση Brown. Η κίνηση Brown παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής άποψης όσο και από πλευράς εφαρμογών. Η στοχαστική αυτή διαδικασία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των χρηματοοικονομικών μαθηματικών όσον αφορά τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την κίνηση Brown και θα παρουσιάσουμε τις κυριότερες ιδιότητες της.

**Ορισμός :** Η κίνηση Brown είναι μια στοχαστική διαδικασία $B_t$ η οποία παίρνει τιμές στον $\Re$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. $W(0) = 0 \quad a.s(almost \quad surely)$.
2. $W_{t+u} - W_t \sim \mathcal{N}(0, u)$.
3. Το $W$ έχει ανεξάρτητες μεταβολές για κάθε $t > 0$ και οι μελλοντικές μεταβολές $W_{t+u} - W_t > 0$ είναι ανεξάρτητες από τις παρελθοντικές τιμές του $W_s, s < t$.

**Παράδειγμα :** Θα αλλάξουμε λίγο τους κανόνες του πειράματος μας με το νόμισμα. Πρώτα από όλα θα ορίσουμε χρόνο $t$ όπου εκτελείται το πείραμα. Οπότε σε περίοδο $t$ έχω 6 ρίψεις που συμβαίνουν κάθε $\frac{t}{6}$. Δεύτερον θα αλλάξω την ποσότητα του στοιχήματος από 1$ σε $\sqrt{\frac{t}{6}}$.

Το πείραμα εξακολουθεί να διατηρεί τις ιδιότητες Markov και Martingale και η τετραγωνική μεταβολή που υπολογίζεται για όλη την διαδικασία είναι

$$\sum_{j=1}^{6}(S_j - S_{j-1})^2 = 6 \times (\sqrt{\frac{t}{6}})^2 = t.$$

Το πείραμα μου έχει οριστεί έτσι ώστε η τετραγωνική μεταβολή του να ισοδυναμεί με τον χρόνο του πειράματος. Έστω πως παίρνω $n$ ρίψεις στην διάρκεια $t$. Η τετραγωνική μεταβολή γίνεται

$$\sum_{j=1}^{n}(S_j - S_{j-1})^2 = n \times (\sqrt{\frac{t}{n}})^2 = t.$$

**Επόμενο** βήμα είναι να ξεκινήσω να αυξάνω το $n$ κάνοντας το μεγαλύτερο και μεγαλύτερο. Συνεπώς αυξάνω την ταχύτητα του παιχνιδιού μειώνοντας συνεχώς τον χρόνο ανάμεσα σε δύο ρίψεις μειώνοντας και το ποντάρισμα. Έχω επιλέξει προσεκτικά τις καινούργιες μου μεταβολές με το χρονικό βήμα να μειώνεται κατά $n^{-1}$ αλλά το μέγεθος του πονταρίσματος μειώνεται μόνο κατά $n^{-\frac{1}{2}}$ .(ΓΡΑΦΗΜΑ)

Καθώς παίρνω το όριο $n = \infty$, το αποτέλεσμα του τυχαίου περίπατου μένει πεπερασμένο. Έχει αναμενόμενη τιμή, με την προϋπόθεση πως η αρχή του είναι το μηδέν,

$$E[S(t)] = 0$$

Και διακύμανση,

$$E[S(t)^2] = t$$

Χρησιμοποιώ το $S(t)$ για να ορίσω το ποσό που έχουμε κερδίσει ή την τυχαία μεταβλητή μετά από χρόνο $t$. Η διαδικασία του ορίου αυτού του τυχαίου περίπατου καθώς το διάστημα μεταξύ των ρίψεων τείνει στο μηδέν είναι η κίνηση **Brown**.

**Σημείωση :** Το 1827, ο βοτανικός Robert Brown, κοιτάζοντας ένα μικροσκόπιο σε σωματίδια που βρίσκονται σε κόκκους γύρης στο νερό, σημείωσε ότι τα σωματίδια μετακινήθηκαν μέσα στο νερό αλλά δεν ήταν σε θέση να προσδιορίσουν τους μηχανισμούς που προκάλεσαν αυτή την κίνηση. Τα άτομα και τα μόρια θεωρούνται εδώ και πολύ καιρό ως τα συστατικά της ύλης και πολλές δεκαετίες αργότερα, Ο Albert Einstein δημοσίευσε μια εργασία το 1905 το οποίο εξηγούσε λεπτομερώς πώς η κίνηση που είχε παρατηρήσει ο Brown ήταν αποτέλεσμα της γύρης που μετακινείται από μεμονωμένα μόρια νερού. (ιι) Οι τιμές των μετοχών μπορούν επίσης να μοντελοποιηθούν με την κίνηση Βροων.

### 4.6.1 Ιδιότητες Κίνησης Brown

1. Τέμνει τον άξονα $X$ άπειρες φορές.
2. Έχει πολύ κοντινή σχέση με την καμπύλη $x = y^2$ ( δεν παρεκκλίνει πολύ από αυτήν).
3. Δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.
4. **Πεπερασμένη** : Κάθε άλλη μείωση του στοιχήματος ή “αυξήσεων” με κάθε βήμα θα είχε ως αποτέλεσμα είτε σε έναν τυχαίο περίπατο που τείνει στο άπειρο σε πεπερασμένο χρόνο ή σε όριο όπου δεν υπήρχε καθόλου κίνηση.
5. **Συνέχεια**. Τα μονοπάτια είναι συνεχή και δεν παρουσιάζουν ασυνέχειες. Η κίνηση Brown είναι το όριο στον-συνεχή χρόνο του διακριτού τυχαίου περίπατου.
6. **Markov**. Η κατά συνθήκη κατανομή του $X(t)$ έχοντας την πληροφορία έως $\tau < t$ εξαρτάται μόνο από το $X(\tau)$.

7. **Martingale**. Έχοντας όλη την πληροφορία έως $\tau < t$ η υπό συνθήκη αναμενόμενη τιμή του $X(t)$ είναι $X(\tau)$.

8. **Τετραγωνική μεταβολή**. Αν διαιρέσουμε το διάστημα του χρόνου από 0 έως $t$ και $n+1$ σημεία $t_i = \frac{it}{n}$ τότε

$$\sum_{j=1}^{n}(X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 \to t \ \ (Technicaly \quad "almost \quad surely")$$

**Σημείωση :** Πολλές από τις αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων είναι αρκετά περίπλοκες και περιλαμβάνουν μια άρτια κατανόηση της θεωρίας της πιθανότητας και άλλων αξιωμάτων. Γι αυτό για τους σκοπούς της εργασίας παραλείπονται.

**Έχοντας** χτίσει την ιδέα και τις ιδιότητες της κίνησης Brown από μια σειρά πειραμάτων μπορούμε να πάψουμε να χρησιμοποιούμε πειράματα αφήνοντας την κίνηση Brown όπως ορίζεται από τις ιδιότητες της.

## 4.7 Στοχαστική Ολοκλήρωση

Θα ορίσω το **στοχαστικό ολοκλήρωμα**[8] ως

$$W(t) = \int_0^t f(\tau)dX(\tau) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})(X(t_j) - X(t_{j-1}))$$

Όπου $t_j = \frac{tj}{n}$.

Πριν ξεκινήσω να δουλεύω πάνω στο ολοκλήρωμα θα πρέπει να αναφέρω ότι η συνάρτηση $f(t)$ που ολοκληρώνω όπως φαίνεται παραπάνω παίρνει τις τιμές του αριστερού σημείου $t_{j-1}$ . Είναι σημαντικό ώστε κάθε τιμή της συνάρτησης δεν γνωρίζει για την τυχαία μεταβολή της που την πολλαπλασιάζει, δηλαδή η ολοκλήρωση της συνάρτησης δεν γνωρίζει το μέλλον της άρα είναι **μη προβλέψιμη**.

### 4.7.1 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Τα στοχαστικά ολοκληρώματα είναι σημαντικά για κάθε είδους θεωρία στοχαστικού λογισμού αφού έχουν ουσιώδης ορισμό. Παρόλα αυτά είναι ευρέως διαδεδομένη η παρακάτω εξίσωση

$$W(t) = \int_0^t f(\tau)dX(\tau)$$

Να συμβολίζεται ως εξής,

$$dW = f(t)dX$$

Το $dX$ μπορούμε να το σκεφτούμε σαν την αύξηση σε $X$, όπου $X$ είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση $\sqrt{dt}$. Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες. Ένας από τους λόγους που χρησιμοποιούμε τον δεύτερο συμβολισμό είναι γιατί μοιάζει αρκετά με μια κανονική διαφορική εξίσωση. Δεν προχωράμε βέβαια στο βήμα της διαίρεσης με $dt$ γιατί μετά θα είχαμε το δύσκολο έργο να ορίσουμε το $dX/dt$.

Προχωρώντας με αυτήν την ιδέα παραπέρα μπορούμε να πούμε ότι

$$dW = g(t)dt + f(t)dX$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι απλά συντομογραφία του

$$W(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)dX(\tau)$$

Εξισώσεις σαν την παραπάνω ονομάζονται στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Το ακριβές νόημα τους βέβαια προέρχεται από το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για το υπόλοιπο της εργασίας θα χρησιμοποιούμε την συντομογραφία.

### 4.7.2 Μέσο Τετραγωνικό Όριο(Mean Square Limit)

Θα περιγράψουμε τον τεχνικό όρο του μέσου τετραγωνικού ορίου. Θα μας φανεί χρήσιμος στον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος. Έστω η παρακάτω ποσότητα

$$E[\sum_{j=1}^{n}((X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 - t)^2]$$

Το παραπάνω μπορεί να γραφεί ως

$$E[\sum_{j=1}^{n}((X(t_j) - X(t_{j-1}))^4 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<i}((X(t_i) - X(t_{i-1}))^2((X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 -$$

$$2t\sum_{j=1}^{n}((X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 + t^2]$$

Αφού η διαφορά $X(t_j) - X(t_{j-1})$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση $t/n$ έχουμε ,

$$E[(X(t_j) - X(t_{j-1}))^2] = \frac{t}{n}$$

Και

$$E[(X(t_j) - X(t_{j-1}))^4] = \frac{3t^2}{n^2}$$

Συνεπώς η εξίσωση μας γίνεται

$$n\frac{3t^2}{n^2} + n(n-1)\frac{t^2}{n^2} - 2tn\frac{t}{n} + t^2 = O(\frac{1}{n})$$

καθώς το $n$ τείνει στο άπειρο η ποσότητα τείνει στο μηδέν. Οπότε μπορούμε να πούμε πως

$$\sum_{j=1}^{n}((X(t_j) - X(t_{j-1}))^2 = t$$

στο μέσο τετραγωνικό όριο. Για προφανείς λόγους το παραπάνω γράφεται ως

$$\int_0^t (dX)^2 = t$$

**Παρατήρηση :** Δεν θα έπρεπε να σκεφτόμαστε το $dX$ ως το τετράγωνο μιας κανονικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή μηδέν και διασπορά $dt$. Θα πρέπει να το σκεφτόμαστε σαν το άθροισμα των τετραγώνων άπειρων α.ο.κ κανονικών μεταβλητών όπου κάθε μία έχει μέση τιμή μηδέν και απειροελάχιστη διασπορά. Και τι γίνεται αφού τα αθροίσουμε· Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μια ποσότητα με μέση τιμή $dt$ και διασπορά που τείνει στο μηδέν καθώς ο αριθμός των μεταβλητών προσεγγίζει το άπειρο.

## 4.8 Το Λήμμα του Ίτο

Έστω η συνάρτηση $F(X) = X^2$ όπου $X$ μια κίνηση Brown , ισχύει όμως $dF = 2X$ ; Η απάντηση είναι όχι καθώς ο απλός λογισμός δεν έχει εφαρμογή στο στοχαστικό περιβάλλον. Έστω η χρονική κλίμακα

$$\frac{\delta t}{n} = h.$$

Η κλίμακα είναι τόσο μικρή όπου μπορώ να γράψω το ανάπτυγμα Taylor :

$$F(X(t+h)) - F(X(t)) = (X(t+h) - X(t))\frac{dF}{dX})X(t) + \frac{1}{2}(X(t+h) - X(t))^2\frac{d^2F}{dX^2})X(t) + ...$$

Μπορώ τώρα να πω ότι

$$(F(X(t+h)) - F(X(t))) + (F(X(t+2h)) - F(X(t+h))) + ...$$
$$+(F(X(t+nh)) - F(X(t+(n-1)h))) =$$
$$\sum_{j=1}^{n}(F(X(t+jh)) - F(X(t+(j-1)h)))\frac{dF}{dX}(X(t+(j-1)h))$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}X(t)\sum_{j=1}^{n}(F(X(t+jh)) - F(X(t+(j-1)h)))^2 + ...$$

Όπου χρησιμοποιώ την προσέγγιση :

$$\frac{d^2F}{dX^2}(X(t+(j-1)h)) = \frac{d^2F}{dX^2}(X(t)) \tag{4.2}$$

που με καλύπτει για την ακρίβεια που επιθυμώ.
Το πρώτο μέρος γίνεται :

$$F(X(t+nh)) - F(X(t)) = F(X(t+\delta t)) - F(X(t)) \tag{4.3}$$

Το δεύτερο μέρος γίνεται :

$$\int_t^{t+\delta t}\frac{dF}{dX}dX \tag{4.4}$$

και τέλος :

$$\int_t^{t+\delta t}\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}(X(t)) \tag{4.5}$$

Άρα έχω :

$$F(X(t+\delta t) - F(X(t)) = \int_t^{t+\delta t}\frac{dF}{dX}(X(\tau)dX(\tau) + \int_t^{t+\delta t}\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}(X(\tau))d\tau \tag{4.6}$$

Καθώς αυξάνω την κλίμακα από 0 έως $t$ καταλήγω να έχω

$$F(X(t)) = F(X(0)) + \int_t^{t+\delta t}\frac{dF}{dX}(X(\tau)dX(\tau) + \int_t^{t+\delta t}\frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}(X(\tau))d\tau \tag{4.7}$$

Που γράφεται ώς :

$$dF = \frac{dF}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dX^2}dt \tag{4.8}$$

Αυτό είναι το λήμμα του Ίτο.
Συνεπώς αν η $F = X^2$ τότε $dF = 2XdX + dt$.

Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση ,

$$dS = a(S)dt + b(S)dX$$

Για δύο συναρτήσεις $a(S)$ και $b(S)$ με $dX$ την τυπική κίνηση Brown. Έστω τώρα η συνάρτηση $V(S)$, ποια στοχαστική διαφορική εξίσωση την ικανοποιεί · Η απάντηση είναι ,

$$dV = \frac{dV}{dS}dS + \frac{1}{2}b^2\frac{d^2V}{dS^2}dt.$$

## 4.9 Λογισμός του ΙΤΟ με Πολλαπλές Μεταβλητές

Στα χρηματοοικονομικά προβλήματα βλέπουμε πολύ συχνά συναρτήσεις μιας στοχαστικής μεταβλητής $S$ και μιας ντετερμινιστικής μεταβλητής $t$, που συμβολίζει τον χρόνο, $V(S,t)$. Αν

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt.$$

**Υπενθύμιση** ότι τη παραπάνω είναι συντομογραφία του σωστού ολοκληρωτικού τύπου.

**Παράδειγμα :** Κάποιες φορές θα συναντήσουμε μια συνάρτηση δύο ή και παραπάνω τυχαίων μεταβλητών μαζί με τον χρόνο : $V(S1, S2, t)$. Ένα παράδειγμα θα ήταν η τιμή ενώς συμβολαίου που δίνει το δικαίωμα αγοράς της πιο ακριβής μετοχής από ένα ζεύγος(πχ. Nike, Adidas). Η συμπεριφορά των $S1, S2$ θα είναι

$$dS_1 = a_1(S_1, S_2, t)dt + b_1(S_1, S_2, t)dX_1$$

και

$$dS_2 = a_2(S_1, S_2, t)dt + b_2(S_1, S_2, t)dX_1$$

**Σημειώνουμε** ότι έχουμε δύο κινήσεις Brown $dX1, dX2$ . Μπορούμε να τις φανταστούμε ως κανονικά κατανεμημένες με διασπορά $dt$, αλλά συσχετίζονται. Η συσχέτιση μεταξύ τους μπορεί να ονομαστεί $\rho$ με

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

Υπενθυμίζω,

$$dX_1^2 = dt, \quad dX_2^2 = dt, \quad dX_1 dX_2 = \rho dt$$

Οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S_1}dS_1 + \frac{\partial V}{\partial S_2}dS_2 + \frac{1}{2}b_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2}dt + \frac{1}{2}b_2^2\frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2}dt + \rho b_1 b_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2}dt$$

Παρακάτω θα δούμε δύο τελευταία παραδείγματα για να καταλήξουμε στην εξίσωση που θα χρησιμοποιήσουμε για την μοντελοποίηση ενός περιουσιακού στοιχείου.

Όπως είδαμε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση ενός μοντέλου για μια μεταβλητή $S$ είναι της παρακάτω μορφής

$$dS = ....dt + ....dX$$

Όπου το κομμάτι μπροστά από το $dt$ είναι ντετερμινιστικό και το κομμάτι μπροστά από το $dX$ μας λέει πόση τυχαιότητα υπάρχει. Μοντελοποίηση είναι να αποφασίσουμε τι θα συμπληρώσουμε στα κενά, είναι η επιλογή των συναρτήσεων για το ντετερμινιστικό και για το τυχαίο κομμάτι. Παρακάτω θα δούμε δύο παραδείγματα :

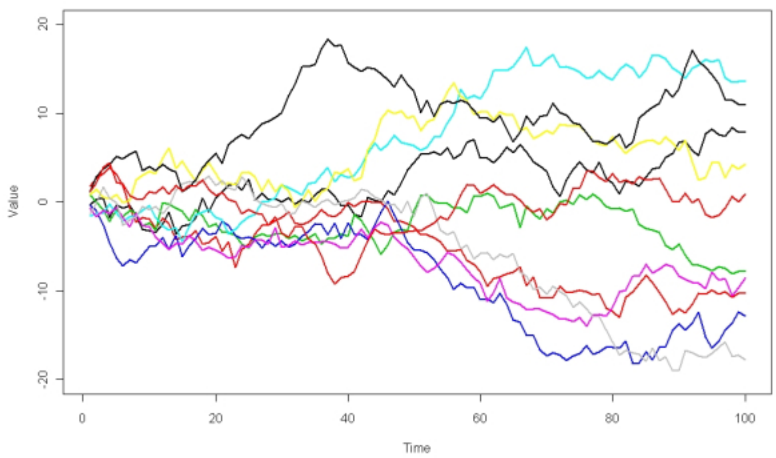
## 4.10 Κίνηση Brown με Ρεύμα

**Παράδειγμα 1 :**

Το πρώτο παράδειγμα είναι μια απλή κίνηση Brown με ρεύμα :

$$dS = \mu dt + \sigma dX$$

Μια προσομοίωση της παραπάνω εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω γράφημα. Όπως βλέπουμε το $S$ παίρνει αρνητικές τιμές. Άρα η κίνηση Brown με ρεύμα δεν είναι καλό μοντέλο για πολλές χρηματοοικονομικές ποσότητες, όπως επιτόκια η τιμές περιουσιακών στοιχείων.



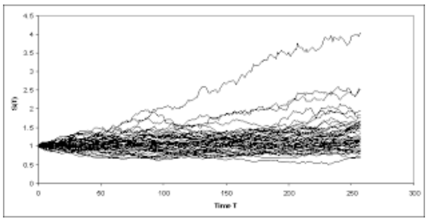
## 4.11 Λογοκανονικός Τυχαίος Περίπατος

**Παράδειγμα 2 :**

Το δεύτερο παράδειγμα είναι παρόμοιο με το πρώτο αλλά το ρεύμα και η τυχαιότητα είναι ανάλογα του $S$:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

Η εξίσωση αυτή συμπεριφέρεται όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα. Όσο το $S$ δεν παίρνει αρνητικές τιμές τότε η εξίσωση δεν γίνεται ποτέ αρνητική και όσο το $S$ πλησιάζει στο μηδέν τόσο μικρότερες είναι οι αυξομειώσεις του $dS$.




Λαμβάνοντας την παραπάνω εξίσωση υπόψιν μας, μια συνάρτηση $V(S,t)$ ικανοποιείται από την παρακάτω εξίσωση :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt.$$

**Σημείωση :** Έστω ότι έχω δύο μετοχές $S1, S2$ , με αντίστοιχες τιμές 100\$ και 1000\$. Στο τέλος μιας χρηματιστηριακής μέρας οι μετοχές έχουν πάρει τις τιμές 200\$ και 1100\$ αντίστοιχα. Αν λάμβανα υπόψιν το πρώτο παράδειγμα παρατηρώντας την διαφορά των δύο μετοχών από το άνοιγμα στο κλείσιμο θα είχα $dS1 = dS2$. Οπότε θα κατέληγα στο συμπέρασμα ότι σε οποιαδήποτε μετοχή και να επενδύσω έχω το ίδιο αποτέλεσμα. Αν όμως λάβω υπόψιν μου το ποσοστό που ανέβηκε η κάθε μετοχή τότε $dS1/S = 100\%$ και $dS2/S = 10\%$. Εδώ είναι φανερή η διαφορά των δύο μετοχών στην αξία τους ως επένδυση. Αν παρατηρήσει κανείς την παραπάνω εξίσωση και διαιρέσει τα δύο μέλη με $S$ τότε πράγματι έχουμε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση που μοντελοποιεί την ποσοτική διαφορά ενός περιουσιακού στοιχείου.

# Κεφάλαιο 5

# Μοντέλο Black-Scholes

Έχοντας αποκτήσει τις μαθηματικές γνώσεις που μας χρειάζονται στο προηγούμενο κεφάλαιο, είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε ένα από τα πιο σημαντικά κεφάλαια των οικονομικών μαθηματικών που οδήγησαν στην ραγδαία εξέλιξη της βιομηχανίας των επενδύσεων. Το μοντέλο Black-Scholes και τα συμπεράσματα του είναι οι βάσεις για την θεωρία των παραγώγων. Οι βάσεις αυτές είναι η Δέλτα αντιστάθμιση κινδύνου(Delta Hedging) και η έννοια της μη Εξισορροπητικής Κερδοσκοπίας(No Arbitrage). Θα ξεκινήσουμε με το μοντέλο της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης για μια μετοχή και θα δούμε πως αλληλεπιδρά με τα δικαιώματα προαίρεσης της μετοχής αυτής η μετοχή, δημιουργόντας ένα χαρτοφυλάκιο χωρίς ρίσκο[5].

## 5.1 Ένα Ειδικό Χαρτοφυλάκιο

Έχοντας δει στο 3ο κεφάλαιο τα χαρακτηριστικά των δικαιωμάτων προαίρεσης, το δικαίωμα αγοράς σίγουρα αποτελείται από μια εξίσωση με πολλές μεταβλητές, όπως η τιμή εξάσκησης E, η ημερομηνία ωρίμανσης κλπ. Αν T είναι η ημερομηνία ωρίμανσης τότε τ ορίζουμε τον τωρινό χρόνο. Η τιμή θα εξαρτάται επίσης από πολλές μεταβλητές του περιουσιακού στοιχείου που αντιστοιχεί όπως η τιμή του, η μεταβλητότητα του. Μπορούμε να γράψουμε την αξία του συμβολαίου ως εξής :

$$V(S, t; \sigma, \mu; E, T; r).$$

Παρατηρήστε ότι τα ερωτηματηκά χωρίζουν διαφορετικούς τύπους μεταβλητών και παραμέτρων :

1. S ,t είναι μεταβλητές·

2. σ, μ είναι παράμετροι που συσχετίζονται με την τιμή του περιουσιακού στοιχείου.

3. E, T είναι παράμετροι που συσχετίζονται με τις λεπτομέριες του συμβολαίου.

4. r είναι η παράμετρος που συσχετίζεται με το συνάλλαγμα όπου η τιμή του στοιχείου συμβολίζεται.

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου δεν θα χρησιμοποιούμε αυτόν τον μεγάλο συμβολισμό αλλά τον συμβολισμό $V(S,t)$ για την τιμή του συμβολαίου.

Μία απλή απαρατήρηση είναι ότι αν η τιμή του στοιχείου αυξηθεί τότε θα αυξηθεί και η τιμή του συμβολαίου αγοράς και θα μειωθεί αν μειωθεί η τιμή του περιουσιακού στοιχείου αντίστοιχα. Αυτό είναι λογικό καθώς η τιμή του δικαιώματος αγοράς έχει μεγαλύτερο κέρδος όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του στοιχείου την στιγμή ωρίμανσης. Αυτό είναι ένα παράδειγμα θετικής συσχέτισης μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών στοιχείων. Το δικαίωμα πώλησης έχει αρνητική συσχέτιση. Θα εκμεταλλευτούμε την σχέση αυτή κατασκευάζοντας ένα ειδικό χαρτοφυλάκιο.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γράμμα Π για να συμβολίσουμε την αξία του χαρτοφυλακίου ενός Long Call και μιας short θέσης σε μια ποσότητα Δ του περιουσιακού στοιχείου.

$$\Pi = V(S,t) - \Delta S$$

Ο πρώτος όρος είναι η τιμή του συμβολαίου και ο δεύτερος η short θέση στο στοιχείο. Το πρόσημο (-) συμβολίζει ότι είμαστε short στο στοιχείο. Η ποσότητα Δ θα είναι κάποια σταθερή ποσότητα της επιλογής μας για την ώρα. Υποθέτουμε ότι το στοιχείο ακολουθεί λογοκανονικό τυχαίο περίπατο

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX$$

Έπειτα είναι φυσικό να αναρωτηθούμε ποια η τιμή του χαρτοφυλακίου από χρόνο $t$ σε $t + dt$. Συνεπώς θα έχω,

$$d\Pi = dV - \Delta dS$$

Παρατηρούμε ότι το Δ παραμένει σταθερό κατά την μεταβολή του χρόνου. Από τον Ito έχουμε :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt.$$

Συνεπώς το χαρτοφυλάκιο γίνεται :

$$d\Pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt - \Delta dS.$$

## 5.2 Απαλοιφή Ρίσκου

Την παραπάνω εξίσωση μπορώ να την ξανά γράψω συγκεντρώνοντας τους όρους, οπότε έχω :

$$d\Pi = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt + (\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta)dS$$

Το δεξί σκέλος της αποτελείται από δύο τύπους όρων. Έναν ντετερμινιστικό και έναν τυχαίο. Ο ντετερμινιστικός όρος είναι ότι προηγείται του $dt$ και ο τυχαίος ότι προηγείται του $dS$. Ο τυχαίος όρος στο χαρτοφυλάκιο είναι το ρίσκο μας. Υπάρχει κάποιος τρόπος να μειώσουμε το ρίσκο· Αυτό μπορεί να γίνει στην θεωρία(και σχεδόν στην πράξη) αν επιλέξουμε προσεκτικά το $\Delta$. Αν θέσουμε ,

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

τότε η τυχαιότητα μηδενίζεται. Οποιαδήποτε μείωση της τυχαιότητα ονομάζεται Αντιστάθμιση του Ρίσκου(Hedging). Η αντιστάθμιση ρίσκου εκμεταλλευόμενη την συσχέτιση μεταξύ δύο στοιχείων(στην περίπτωση μας ενός συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης και το περιουσιακό στοιχείο του) ονομάζεται Delta Hedging. Η δέλτα αντιστάθμιση κινδύνου είναι ένα παράδειγμα δυναμικής στρατηγικής αντιστάθμισης ρίσκου. Από μια χρονική στιγμή $t$ σε μια χρονική στιγμή $t + dt$ η ποσότητα $\Delta$ μεταβάλεται αφού είναι σαν το $V$, μια συνάρτηση των μεταβλητών $S, t$. Η έννοια της αντιστάθμισης ρίσκου Δέλτα περιγράφηκε πρώτα από τους Thorp & Kassouf(1967) αλλά τους ξέφυγε το επόμενο σήμαντικό(Nobel prize winning) βήμα.

## 5.3 Μη Εξισορροπητική Κερδοσκοπία No Arbitrage

Έχοντας λοιπόν επιλέξει προσεκτικά την ποσότητα $\Delta$ όπως ειπώθηκε παραπάνω έχουμε στα χέρια μας ένα χαρτοφυλάκιο όπου η αξία του μεταβάλλεται ως

$$d\Pi = (\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt.$$

Η μεταβολή αυτή είναι χωρίς κανένα ρίσκο. Αν έχουμε μια μεταβολή χωρίς κανένα ρίσκο $dP$ στο χαρτοφυλάκιο $\Pi$ τότε θα πρέπει να είναι ίση με την αύξηση που θα είχαμε αν βάζαμε την ίδια αξία σε ρευστό σε έναν τραπεζικό λογαριασμό με κάποιο επιτόκιο :

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Αυτό είναι ένα παράδειγμα no-arbitrage αρχής. Για να δούμε γιατί θα αναλύσουμε τα δύο παρακάτω σενάρια. Θα εξετάσουμε τι θα συνέβαινε αν η απόδοση του χαρτοφυλακίου ήταν, αφενός, μεγαλύτερη και, αφετέρου, μικρότερη από risk-free επιτόκιο. Αν ήταν σίγουρο ότι η απόδοση θα ήταν μεγαλύτερη από $r$ του delta-hedged χαρτοφυλάκιου τότε αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να δανειστούμε ρευστό με επιτόκιο $r$, να επενδύσουμε το ρευστό στο χωρίς ρίσκο χαρτοφυλάκιο και να έχουμε κέρδος. Αν από την άλλη ήταν μικρότερη η απόδοση από

$r$ τότε θα πάρουμε short θέση στο συμβόλαιο, έπειτα εφαρμόζουμε αντιστάθμιση κινδύνου δέλτα και επενδύουμε το ρευστό στην τράπεζα. Όπως και να έχει σε κάθε μια από τις δύο περιπτώσεις έχουμε κέρδος χωρίς κίνδυνο. Σε αυτό το σημείο θα πούμε ότι η δράση των επενδυτών που αγοράζουν και πωλούν ώστε να εκμεταλλευτούν την εξισορροπιτική κερδοσκοπία θα προκαλέσει την τιμή του συμβολαίου στην αγορά να κινηθεί προς την κατεύθυνση που εξαλείφει την κερδοσκοπία.

## 5.4 Εξίσωση Black-Scholes

Έχοντας λοιπόν ότι

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Αντικαθιστώντας τις ποσότητες προκύπτει,

$$(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt = r(V - S\frac{\partial V}{\partial S})dt.$$

Διαιρώντας με $dt$ και φέρνοντας όλα τα μέλη από την μία μεριά έχω :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Αυτή είναι η εξίσωση Black-Scholes.

## 5.5 Ουδετερότητα Κινδύνου

Παρατηρούμε ότι στην εξίσωση Black-Scholes το $\mu$ απουσιάζει που σημαίνει ότι το συμβόλαιο δεν εξαρτάται από την τάση του υποκέιμενου περιουσιακού στοιχείου. Έχοντας λοιπόν εξαλείψει κάθε είδος αβεβαιότητας/κινδύνου μπορούμε να πούμε πως η τιμή του δικαιώματος είναι η αναμενόμενη τιμή της αποπληρωμής του λαμβάνοντας υπόψιν το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Η απόδειξη γίνεται με την βοήθεια της φόρμουλας των Feynman-Kac και παραλείπεται στην παρούσα εργασία.

$$option\ \ value = e^{-r(T-t)}E\,[\,payoff\ (S)]$$

**Σημείωση :**Στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει γιατί πρώτον είναι αδύνατον να αντισταθμίζουμε συνεχόμενα και να εξαλείφουμε τον κίνδυνο και δεύτερον κάθε επενδυτής της αγοράς αντιλαμβάνεται διαφορετικά τον κίνδυνο μιας επένδυσης.

## 5.6 Οριακές συνθήκες δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου

Έχοντας αποκτήσει την εξίσωση Black-Scholes για να μπορέσουμε να ξεκινήσουμε την επίλυση θα πρέπει να θέσουμε κάποια όρια. Το πρώτο όριο που είναι και το πιο φανερό είναι πως το συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς δεν μπορεί να έχει αξία μεγαλύτερη από την μετοχή για οποιαδήποτε στιγμή. Αυτό ισχύει και για τα Ευρωπαϊκά αλλά και τα Αμερικάνικα συμβόλαια

$$Call \leq S(0)$$

Αυτό είναι το άνω κατώφλι και αν δεν ίσχυε τότε θα υπήρχε ευκαιρία για arbitrage π.χ κάποιος θα μπορύσε να αγοράσει μετοχή και να πουλήσει δικαίωματα αγοράς και να αποκτήσει κέρδος χωρίς ρίσκο. Το κάτω κατώφλι είναι

$$Call \geq S(0) - Ke^{-rT}$$

όπου $K$ η τιμή εξάσκησης και $T$ ο χρόνος ωρίμανσης.

Αλλιώς θα μπορούσε κάποιος να αγοράσει ένα συμβόλαιο να πάρει short θέση στην μετοχή, με την διαφορά να έχει επιτόκιο r που είναι και το κέρδος του.

Για τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης το παρακάτω ισχύει

$$Max(Ke^{-rT} - S(0), 0) \leq Put \leq Ke^{-rT}$$

Αν το αριστερό μέρος της εξίσωσης ήταν διαφορετικό θα υπήρχε ευκαιρία για arbitrage καθώς κάποιος θα μπορούσε να αγοράσει δικαιώματα πώλησης και να αγοράσει μετοχή δανείζοντας λεφτά με επιτόκιο r για να έχει κέρδος. Αν το δεξί μέρος της εξίσωσης δεν ίσχυε τότε πουλώντας συμβόλαια πώλησης και επενδύοντας με επιτόκιο ρ θα είχαμε μια επένδυση χωρίς ρίσκο, αν λοιπόν κάποιος εξασκούσε το δικαίωμα πώλησης τότε ο επενδυτής θα είχε παραπάνω από αρκετά λεφτά για να αγοράσει την μετοχή για K.

Όρια για Αμερικάνικα δικαιώματα πώλησης.

$$Max(K - S(0), 0) \leq Put \leq K$$

Παρόμοιες ευκαιρίες για arbitrage όπως οι προηγούμενες είναι η αιτία για τα όρια.

Το κάτω όριο για ένα Αμερικάνικου τύπου δικαίωμα αγοράς είναι

$$Call \geq S(0) - K$$

Άρα η τιμή του συμβολαίου θα είναι πάντα μεγαλύτερη από την αξία του συμβολαίου για οποιαδήποτε στιγμή. Αυτό σημαίνει ότι ένα Αμερικάνικο συμβόλαιο δεν πρέπει ποτέ να εξασκηθεί πριν την ωρίμανση του. Η διαίσθηση μας λέει ότι το Αμερικάνικο συμβόλαιο πρέπει να είναι πιο πολύτιμο από το αντίστοιχο Ευρωπαϊκό καθώς προσφέρει περισσότερες επιλογές εξάσκησης. Αυτό ισχύει για τα δικαιώματα αγοράς αλλά είναι προφανές ότι για το δικαίωματα αγοράς δεν υπάρχει διαφορά θα πρέπει να έχει την ίδια τιμή με το Ευρωπαϊκό συμβόλαιο[9].

## 5.7 Αποτίμηση δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου μέσω των εξισώσεων Black - Scholes

Οι Black και Scholes καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μόνο μία λύση που να ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση του Μοντέλου, υποκείμενη στην οριακή συνθήκη ενός δικαίωματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου. Στη συνέχεια μετατρέπουν την εξίσωση στην εξίσωση μεταφοράς θερμότητας (heat transfer equation), γνωστή από τον τομέα της φυσικής επιστήμης. Η λεπτομερής ανάλυση της λύσης της είναι εκτός του σκοπού της παρούσας εργασίας. Η κλειστή μορφή τύπου που προκύπτει για την αποτίμηση του δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου είναι η εξής:

$$c = S_o N(d_1) - Ke^{rT} N(d_2)$$

όπου $N(d_1), N(d_2)$ είναι κανονικά κατανεμημένες τυχαίες συναρτήσεις.
Επιπλέον ισχύει :

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S_o}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, d_2 = \frac{ln(\frac{S_o}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

ενώ με βάση την ισοδυναμία αγοράς – πώλησης ο αντίστοιχος τύπος για ένα δικαίωμα πώλησης ευρωπαϊκού τύπου είναι:

$$p = Ke^{rT} N(-d_2) - S_o N(-d_1)$$

Όπου $c$ η τιμή του δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου, $p$ η τιμή του δικαιώματος πώλησης ευρωπαϊκού τύπου, $S_0$ η τιμή της μετοχής για $t = 0$, $K$ η τιμή εξάσκησης, $r$ το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο δίχως κίνδυνο, $T$ ο χρόνος ως τη λήξη του δικαιώματος και $\sigma$ η μεταβλητότητα της υποκείμενης μετοχής.

**Σημείωση:**Κλειστές μορφές τύπων όπως οι παραπάνω εξισώσεις είναι στοιχειώδεις στον προγραμματισμό σε υπολογιστή και επιπρόσθετα, ταχύτατες στον υπολογισμό. Ήδη από την έναρξη της λειτουργίας του Chicago Board Options Exchange (CBOT), τον Απρίλιο του 1973, οι επαγγελματίες των αγορών τους χρησιμοποιούν καθημερινά στην πράξη. Οι εξισώσεις των Black – Scholes – Merton αποτελούν μέχρι και σήμερα το βασικό μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου. Επειδή όμως δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσιες στην περίπτωση πιο σύνθετων συμβολαίων(εξωτικά),όπως τα δικαιώματα αμερικάνικου τύπου που εξετάζονται στην παρούσα μελέτη, δημιουργήθηκε η ανάγκη για αριθμητικές επιλύσεις και την γρήγορη και ακριβή τιμολόγηση των εξωτικών συμβολαίων.

# Κεφάλαιο 6

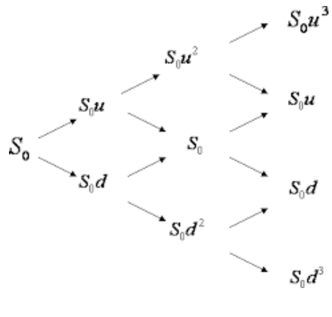
# Μέθοδος Δυωνυμικού Δέντρου

Η πρώτη αριθμητική μέθοδος που θα δούμε για την επίλυση της εξίσωσης και την τιμολόγιση των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι η μέθοδος του δυωνυμικού δέντρου. Είναι από τις πιο απλοϊκές αριθμητικές μεθόδους και μία από τις πιο διαδεδομένες. Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιηθεί το δυωνυμικό μοντέλο των Cox, Ross, Rubinstein (CRR) το οποίο μπορεί να χαρακτηριστεί σαν η διακριτή εκδοχή της διακύμανσης του μοντέλου Black-Scholes. Κάθε αριθμητική επίλυση είναι η προσέγγιση της τιμής, όπου ο στόχος είναι να βρούμε πως συμπεριφέρεται η τιμή και πως θα αποκτήσουμε την πιο γρήγορη και ακριβή λύση.

Τα δυωνυμικά δέντρα προέρχονται από τον διακριτό τυχαίο περίπατο του υποκείμενου στοιχείου ενός συμβολαίου. Η ιδέα είναι να χωρίσουμε τον χρόνο μέχρι την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου σε $N$ - όπου $N$ ένας μεγάλος αριθμός - χρονικά διαστήματα.

## 6.1 Κατασκευή του δυωνυμικού δέντρου

Σε κάθε χρονικό βήμα $dt$, η τιμή της μετοχής $S$ δύναται είτε να αυξηθεί κατά ένα σταθερό παράγοντα $u$, είτε να μειωθεί κατά ένα σταθερό παράγοντα $d$. Κατά συνέπεια, στην επόμενη περίοδο η τιμή της μετοχής θα είναι είτε $S_u = S \times u$ , είτε $S_d = S \times d$. Η πιθανότητα μίας ανοδικής κίνησης είναι ίση με $p$, ενώ η πιθανότητα μίας καθοδικής κίνησης είναι ίση με $1-p$[1]. Διαγραμματικά:




Σχήμα 6.1: Αναπαράσταση Δυωνιμικού Δέντρου.

Σε ένα περιβάλλον ουδετερότητας ως προς τον κίνδυνο ($risk-neutral$), θα πρέπει να ισχύει:

$$Se^{rdt} = pSu + (1-p)Sd$$

ή

$$e^{(rdt} = pu + (1-p)d$$

Γνωρίζω ότι η διακύμανση είναι :

$$Var[S] = \sigma^2 S^2 dt$$

και επίσης

$$Var[S] = E[S^2] - E[S]^2$$

κατά συνέπεια,

$$\sigma^2 dt = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2$$

Έχοντας διαιρέσει και τις δύο πλευρές με $S^2$.
όπου ισούται,

$$e^{rdt}(u+d) - ud - e^{2rdt} = \sigma^2 dt$$

Σύμφωνα με Cox, Ross, Rubinstein

$$u = \frac{1}{d}$$

γίνεται πλέον φανερή η εξομοίωση του αποτελέσματος μίας ανοδικής πορείας ακολουθούμενης από καθοδική με αυτό μίας καθοδικής πορείας ακολουθούμενης από μία ανοδική. Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις ,τελικά προκύπτουν οι όροι $p, u$ και $d$. Ειδικότερα,η πιθανότητα της αύξησης $p$ είναι ίση με:

$$p = \frac{e^{(r-q)dt} - d}{u - d}$$

Οι παράγοντες $u$ και $d$ αντίστοιχα είναι:

$$u = e^{\sigma\sqrt{dt}}, d = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η τιμή της υποκείμενης μετοχής σε κάθε κόμβο του δυωνυμικού δέντρου. Έστω ότι η ζωή ενός δικαιώματος χωρίζεται σε $N = \frac{T}{dt}$ χρονικά βήματα και με $(i, j)$ συμβολίζεται ο j-στος κόμβος στο χρόνο $idt$, όπου $0 \leq i \leq N$ και $0 \leq j \leq i$. Με δεδομένο ότι η αρχική τιμή της μετοχής όπου $T = 0$ είναι γνωστή, ισοδύναμα για την τιμή της μετοχής στον εκάστοτε κόμβο προκύπτει:

$$S_t = S_0 u^j d^{i-j}, j = 0, 1, ....i$$

Η αξία του δικαιώματος στους τελικούς κόμβους είναι η εσωτερική του αξία (intrinsic value), και υπολογίζεται βάσει της εξίσωσης για το δικαίωμα αγοράς και της εξίσωσης για το δικαίωμα πώλησης. Η διαδικασία που ακολουθείται μέχρι αυτό το σημείο είναι όμοια για δικαιώματα ευρωπαϊκού και αμερικάνικου τύπου, καθώς στους τελικούς κόμβους η αξία τους ταυτίζεται.

## 6.2 Οπισθογενής επαγωγή

Το τελευταίο στάδιο της τεχνικής των δυωνυμικών δέντρων βασίζεται σε μία αντίστροφη διαδικασία που είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως οπισθογενής επαγωγή (backwards induction), διαδικασία που σκοπό έχει την εύρεση της βέλτιστης λύσης σε κάθε πιθανό χρονικό σημείο. Από την αξία του δικαιώματος στους τελικούς κόμβους προκύπτει, βήμα προς βήμα, η αξία του δικαιώματος στους αμέσως προηγούμενους κόμβους. Η τιμολόγηση του δικαιώματος στον αρχικό κόμβο ($T = 0$), πραγματοποιείται αφού έχει προηγηθεί ο υπολογισμός των τιμών για το σύνολο των κόμβων.

### 6.2.1 Δικαίωμα ευρωπαϊκού τύπου

Η οπισθογενής επαγωγή για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος ευρωπαϊκού τύπου είναι αρκετά απλή, δεδομένου ότι το δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί μόνο στη λήξη. Η αξία στον κόμβο $i, j$ για ένα δικαίωμα αγοράς υπολογίζεται ως εξής:

$$C_{i,j} = e^{-rdt}(pC_{i+1,j+1} + (1-p)C_{i+1,j})$$

Ενώ η αξία του αντίστοιχου δικαιώματος πώλησης είναι:

$$P_{i,j} = e^{-rdt}(pP_{i+1,j+1} + (1-p)P_{i+1,j})$$

### 6.2.2 Δικαίωμα αμερικάνικου τύπου

Στην περίπτωση των δικαιωμάτων αμερικάνικου τύπου, η τελική διαδικασία είναι κάπως πιο περίπλοκη, καθώς θα πρέπει σε κάθε κόμβο να λαμβάνεται υπόψη και η δυνατότητα της νωρίτερης εξάσκησης. Συνεπώς, είναι απαραίτητο σε κάθε κόμβο να πραγματοποιείται μία σύγκριση μεταξύ της αξίας που προκύπτει από το δυωνυμικό δέντρο και της εσωτερικής αξίας του δικαιώματος. Ειδικότερα, στην περίπτωση ενός δικαιώματος αγοράς αμερικάνικου τύπου:

$$C_{i,j} = max\{S_0 u^j d^{i-j} - K, e^{-rdt}(pC_{i+1,j+1} + (1-p)C_{i+1,j})\}$$

$$P_{i,j} = max\{K - S_0 u^j d^{i-j}, e^{-rdt}(pP_{i+1,j+1} + (1-p)P_{i+1,j})\}$$

### 6.2.3 Εφαρμογή στα Ευρωπαϊκά Συμβόλαια

Χρησιμοποιώντας το λογισμικό του MATLAB μπορούμε να δούμε πως συμπεριφέρεται η αριθμητική μέθοδος CRR. Έστω ένα Ευρωπαϊκού τύπου συμβόλαιο αγοράς με τιμή εξάσκησης 30$ και τιμή ωρίμανσης την 1 Σεπτεμβρίου με τωρινή ημερομηνία 1 Ιανουαρίου. Η τιμή της μετοχής είναι στα 25$ και έχει διακύμανση 35%. Το ετήσιο επιτόκιο είναι 1,11%.

Όπως παρατηρείται από το παραπάνω γράφημα αυξάνοντας τον αριθμό των βημάτων το δυωνυμικό δέντρο προσεγγίζει την τιμή του Black-Scholes μοντέλου, αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται και ο χρόνος.

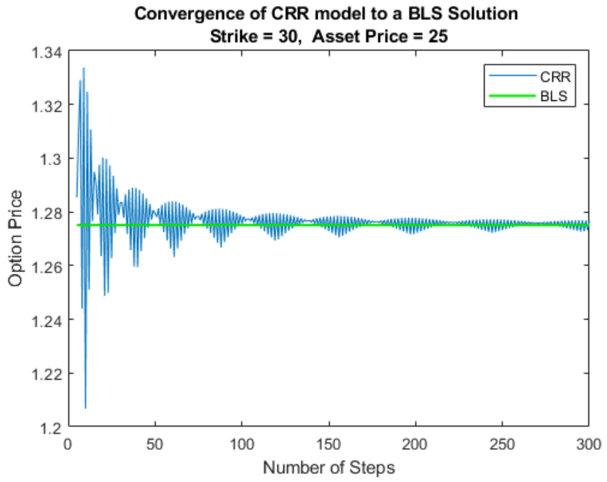
### 6.2.4 Εφαρμογή στα Αμερικάνικα Συμβόλαια

Το μεγάλο πλεονέκτημα του μοντέλου CRR παρόλο που όπως είδαμε, καθυστερεί να προσεγγίσει την τιμή του Black-Scholes είναι η δυνατότητα του να τιμολογήσει τα Αμερικάνικου τύπου συμβόλαια που το Black-Scholes μοντέλο υστερεί. Για ένα συμβόλαιο με τα παρακάτω χαρακτηριστικά βλέπουμε πως συμπεριφέρεται το μοντέλο. Έστω μια μετοχή με τιμή 52$, επιτόκιο 10%, με διακύμανση 40% και ένα αμερικάνικο δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης 50$ που ωριμάζει σε 12 μήνες. Εφαρμόζοντας το μοντέλο βλέπουμε την συμπεριφορά της μετοχής και του συμβολαίου.

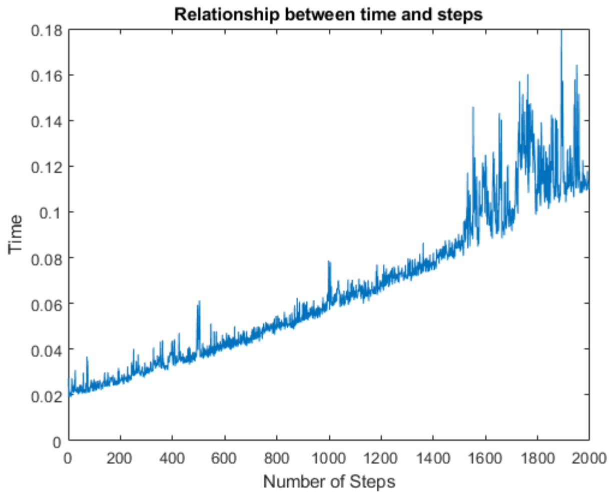
## 6.3 Μοντέλο Leiser - Reimer

Το μοντέλο των Cox, Ross, Rubinstein έθεσε τα θεμέλια για πιο περίπλοκα μοντέλα δέντρων που έχουν την δυνατότητα να τείνουν στην τιμή των συμβολαίων πιο γρήγορα ελαχιστοποιόντας την απόκλιση τους από την πραγματική τιμή. Ένα από αυτα τα μοντέλα παρουσιάστηκε Το 1999 σε μια εργασία που δημοσίευσαν οι Leiser , Reimer τονίζουν τα μειονεκτήματα των μέχρι τότε δενδρικών μοντέλων συμπεριλαμβανομένου και του CRR και ορίζουν το δικό τους μοντέλο για να εξαλείψουν τα μειονεκτήματα αυτά. Παρακάτω θα δούμε μόνο τους τύπους του μοντέλου και την εφαρμογή τους αλλά ενθαρρύνεται η ανάγνωση της εργασίας των Leiser , Reimer καθώς παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον[4]. Το μοντέλο ορίζεται ως εξής :

Έχουμε




Σχήμα 6.2: Προσέγγιση της τιμής του CRR στην αντίστοιχη του BLS.




Σχήμα 6.3: Σχέση χρόνου - Επαναλήψεων.

$$r_n = e^{rdt}$$

$$d_1 = \frac{log(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T - t}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

Όπου αναγνωρίζουμε τα $d_1, d_2$ από τις εξισώσεις Black-Scholes Έπειτα εισάγουμε :

$$p = B(d_2, N)$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 52.0000 | 58.1367 | 65.0226 | 72.7494 | 79.3515 | 89.0642 | 99.9658 | 112.2016 | 125.9352 | 141.3498 | 158.6512 | 178.0702 | 199.8662 |
| 2 | 0 | 46.5642 | 52.0336 | 58.1706 | 62.9882 | 70.6980 | 79.3515 | 89.0642 | 99.9658 | 112.2016 | 125.9352 | 141.3498 | 158.6512 |
| 3 | 0 | 0 | 41.7231 | 46.5981 | 49.9992 | 56.1192 | 62.9882 | 70.6980 | 79.3515 | 89.0642 | 99.9658 | 112.2016 | 125.9352 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 37.4120 | 39.6887 | 44.5467 | 49.9992 | 56.1192 | 62.9882 | 70.6980 | 79.3515 | 89.0642 | 99.9658 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 31.5044 | 35.3606 | 39.6887 | 44.5467 | 49.9992 | 56.1192 | 62.9882 | 70.6980 | 79.3515 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 28.0688 | 31.5044 | 35.3606 | 39.6887 | 44.5467 | 49.9992 | 56.1192 | 62.9882 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25.0078 | 28.0688 | 31.5044 | 35.3606 | 39.6887 | 44.5467 | 49.9992 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 22.2806 | 25.0078 | 28.0688 | 31.5044 | 35.3606 | 39.6887 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 19.8509 | 22.2806 | 25.0078 | 28.0688 | 31.5044 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 17.6861 | 19.8509 | 22.2806 | 25.0078 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15.7573 | 17.6861 | 19.8509 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 14.0390 | 15.7573 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12.5080 |

Σχήμα 6.4: Εξέλιξη τιμής της μετοχής βάση του μοντέλου CRR.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.8960 | 3.7740 | 2.1385 | 1.0170 | 0.3643 | 0.0742 | 1.0672e-05 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 8.1812 | 5.5223 | 3.3295 | 1.7065 | 0.6692 | 0.1519 | 2.1842e-05 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 11.0581 | 7.8740 | 5.0574 | 2.8036 | 1.2132 | 0.3109 | 4.4703e-05 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 14.5247 | 10.9080 | 7.4641 | 4.4889 | 2.1629 | 0.6362 | 9.1494e-05 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18.4956 | 14.6394 | 10.6545 | 6.9602 | 3.7716 | 1.3020 | 1.8726e-04 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 21.9312 | 18.4956 | 14.6394 | 10.3619 | 6.3786 | 2.6646 | 3.8326e-04 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 24.9922 | 21.9312 | 18.4956 | 14.6394 | 10.3113 | 5.4533 | 7.8442e-04 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 27.7194 | 24.9922 | 21.9312 | 18.4956 | 14.6394 | 10.3113 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 30.1491 | 27.7194 | 24.9922 | 21.9312 | 18.4956 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 32.3139 | 30.1491 | 27.7194 | 24.9922 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 34.2427 | 32.3139 | 30.1491 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 35.9610 | 34.2427 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 37.4920 |

Σχήμα 6.5: Εξέλιξη τιμής του συμβολαίου βάση του μοντέλου CRR.

$$\bar{p} = B(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}, N)$$

Όπου $B$ είναι η αντίστροφη της δυωνυμικής κατανομής και $N$ ο αριθμός των χρονικών διαστημάτων. Αντιστρέφοντας την κατανομή προκύπτει ότι

$$p = B(z,n) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}exp\left[-\left(\frac{z}{n+\frac{1}{3}+\frac{0.1}{n+1}}\right)^2\left(n+\frac{1}{6}\right)\right]}$$

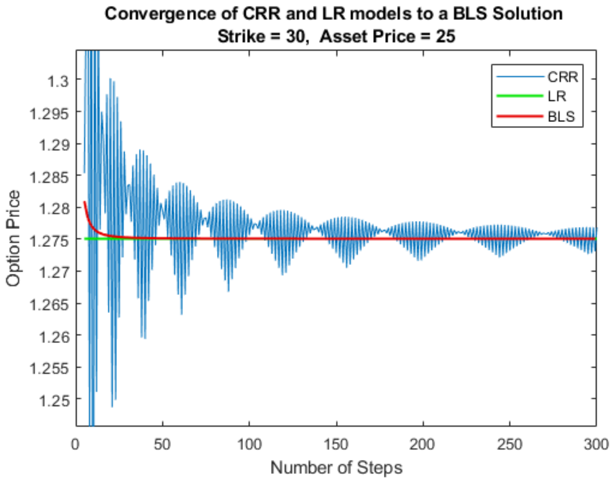
Όπου το πρόσημο παίρνει την τιμή του προσήμου του $z$. Τέλος έχουμε:

$$u = r_n\frac{\bar{p}}{p} \quad , \quad d = r_n\frac{1-\bar{p}}{1-p}$$

**Σημείωση** : Λόγω της αντιστροφής το μοντέλο δέχεται μονό αριθμό χρονικών διαστημάτων.

Το μοντέλο αυτό για το ίδιο σενάριο Ευρωπαϊκού συμβολαίου που είδαμε προηγουμένος συμπεριφέρεται ως εξής :

Είναι φανερό ότι η σύγκλιση του στην τιμή του συμβολαίου είναι πολύ πιο γρήγορη και από το CRR μοντέλο.




Σχήμα 6.6: Προσέγγιση της τιμής του CRR και LR στην αντίστοιχη του BLS.

### 6.3.1 Συμπεράσματα

Η μέθοδος του δυωνυμικού μοντέλου μας προσφέρει μια αρκετά καλή προσέγγιση αλλά έχει μερικά μειονεκτήματα. Καθώς οι χρηματιστές χρειάζονται πολύ ακριβείς τιμές των συμβολαίων το δυωνυμικό δέντρο καθυστερεί πολύ να προσεγγίσει την τιμή του BLS, όταν χρησιμοποιούνται 2000 βήματα το μέτρο της αβεβαιότητας είναι κοντά στα 0.0002 που στην περίπτωση μας, αν αναλογιστεί κανείς το μέγεθος των χρηματικών ποσών, είναι αρκετά μεγάλο. Επίσης υπάρχει και το πρόβλημα της μνήμης που σημαίνει ότι το N δεν μπορεί να πάρει πάρα πολύ μεγάλες τιμές καθώς ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί πίνακα $(N+1) \times (N+2)$. Παραπάνω ρίξαμε μια πρώτη ματιά στο πιο βασικό μοντέλο δέντρου για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης που άνοιξε τον δρόμο για πιο ακριβή και γρήγορα δενδρικά μοντέλα όπως το Leiser - Reimer που είδαμε ότι προσεγγίζει πολύ πιο γρήγορα την ακριβή τιμή ενώς συμβολαίου, ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι υπάρχουν διάφοροι τρόπου βελτιστωποίησης όπως η Richardson Extrapolation που βελτιώνουν σημαντικά και τα δύο μοντέλα ως προς την προσέγγιση τους.

# Κεφάλαιο 7

# Μέθοδος Μόντε Κάρλο

Η προσομοίωση Monte Carlo αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στη χρηματοοικονομία με εφαρμογές όπως στη τιμολόγησή χαρτοφυλακίων, τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης και υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk). Το πλεονέκτημα της μεθόδου προσομοίωσης έγκειται στο γεγονός ότι οι περιπτώσεις κατά τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την τιμή ενός δικαιώματος είναι λίγες και απαιτούν εφαρμογή συγκεκριμένων μοντέλων, όπως το μοντέλο των Black-Scholes. Εφόσον λοιπόν η αναλυτική λύση στην πράξη είναι δύσκολή, γίνεται προσεγγιστικός υπολογισμός της τιμής με χρήση υπολογιστικών μεθόδων. Ωστόσο ένα μειονέκτημα των συγκεκριμένων μεθόδων είναι η περιπλοκότητα των πράξεων αφού για να καθοριστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για τη τιμή που θέλουμε χρειάζεται μεγάλος αριθμός επαναλήψεων. Το μειονέκτημα αυτό μετριάζεται σε μεγάλο βαθμό με τη χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων όπως το πρόγραμμα MATLAB το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε σε σε συνδιασμό κάποιων μεθόδων.

## 7.1 Μεθοδολογία Προσομοίωσης Μόντε Κάρλο

Το σημείο αρχής μας είναι η κατασκευή μιας προσομοίωσης μια διαφορικής εξίσωσης βασισμένη στην κίνηση Brown. Πρώτα θα παράξουμε ένα μονοπάτι τυχαίου περιπάτου που αντιπροσωπεύει την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και το δικαίωμα του τιμολογείται στην λήξη του. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται - λαμβάνοντας υπόψιν την τιμολόγιση του δικαιώματος βάση του ουδέτερου κινδύνου που αναφέραμε στο 5ο κεφάλαιο - και ο μέσος όρος των δοκιμών καθορίζει την τιμή του δικαιώματος βάση του θεωρήματος των μεγάλων αριθμών[11].

Για το μονοπάτι του περιουσιακού στοιχείου χρησιμοποιούμε τον ουδέτερου κινδύνου τυχαίο περίπατο :

$$dS = rSdt + \sigma S\phi_i\sqrt{dt} \tag{7.1}$$

Όπου $\phi_i \backsim \mathcal{N}(0,1)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Ο τρόπος προσομοίωσης του περιουσιακού στοιχείου λέγεται μέθοδος Euler. Βρισκοντας το $dS$ είναι σαν να βρίσκουμε και την επόμενη τιμή του $S$.

Έπειτα υπολογίζουμε την τιμή του δικαιώματος(έστω ένα δικαίωμα αγοράς) :

$$C_i = e^{-rT}(S(T) - K), \quad \forall \phi_i \tag{7.2}$$

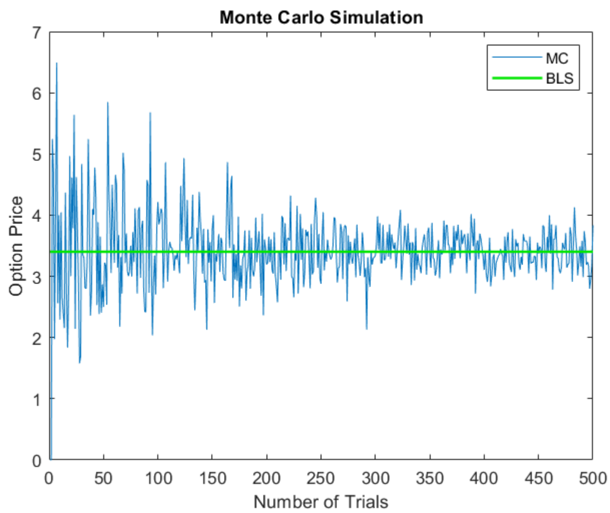
Τέλος έχουμε :

$$C \approx \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} C_i \tag{7.3}$$

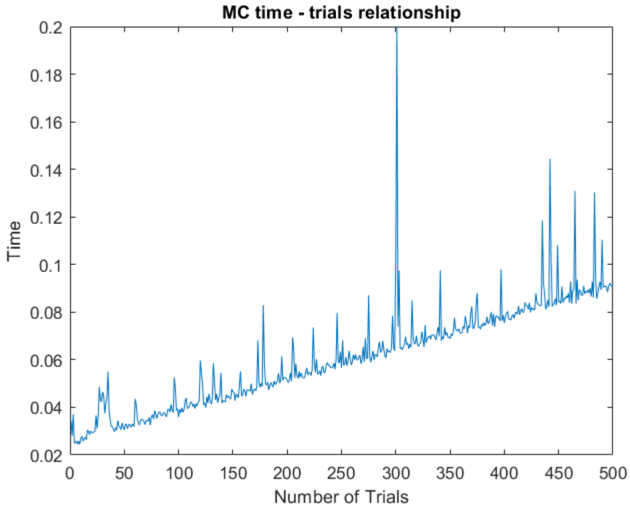
## 7.2 Εφαρμογή στο MATLAB

Έστω ένα δικαίωμα πώλησης που εκδίδεται τον Ιανουάριο του 2018 και έχει στιγμή ωρίμανσης τον Ιανουάριο του 2020 με την υποκείμενη μετοχή να βρίσκεται στην τιμή των 100$ με διακύμανση 10% και τιμή εξάσκησης τα 105$. Το ετήσιο επιτόκιο είναι 5%.

Υπολογίζουμε πρώτα την τιμή του με το Black-Scholes και έπειτα με την μέθοδο monte carlo αυξάνοντας το πλήθος των επαναλήψεων. Στα επόμενα γραφήματα βλέπουμε πως διαμορφώνεται η τιμή των προσομοιώσεων αλλά και πόσο διαρκεί κάθε προσομοίωση καθώς αυξάνουμε το πλήθος των επαναλήψεων.




Σχήμα 7.1: Σχέση τιμής - επαναλήψεων.




Σχήμα 7.2: Σχέση χρόνου - επαναλήψεων.

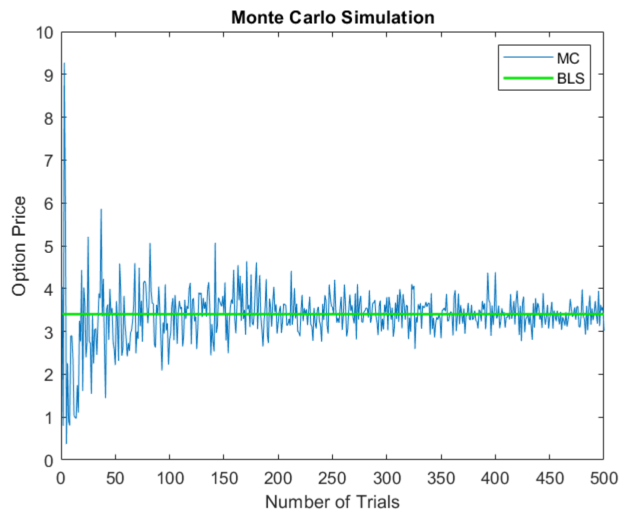
Παρατηρούμε ότι η προσσέγιση στην πραγματική τιμή γίνεται αρκετά αργά με την προσομοίωση να έχει αρκετά μεγάλη χρονική διάρκεια. Όπως όμως γνωρίζουμε ο κόσμος των επενδύσεων απαιτεί γρήγορα και ακριβή αποτελέσματα. Παρακάτω θα δούμε πως επιτυγχάνεται αυτό με την αντιθετική μέθοδο.

## 7.3 Αντιθετική Μέθοδος

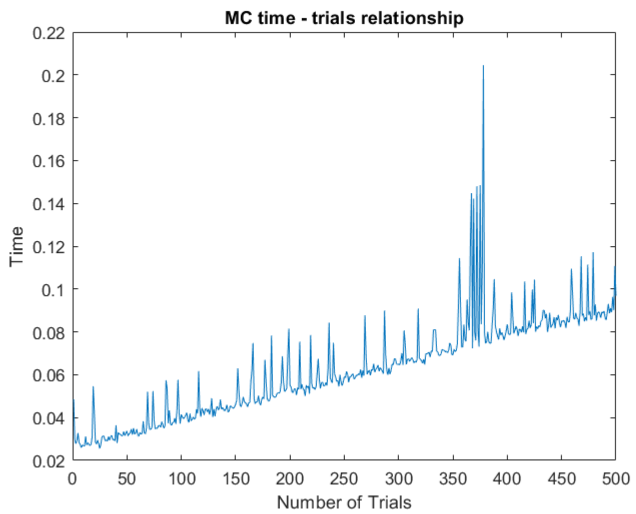
Η αντιθετική μέθοδος είναι μία από τις πολλές μεθόδους βελτίωσης της μεθόδου Monte Carlo και ίσως η πιο απλή από όλες. Έχοντας $\phi_i \backsim \mathcal{N}(0,1)$ τότε και η $(-\phi_i)$ είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή $(-\phi_i) \backsim \mathcal{N}(0,1)$. Οπότε επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με πριν μόνο που χρησιμοποιούμε την τυχαία μεταβλητή $(-\phi_i)$ και στο τέλος για κάθε επανάληψη παίρνουμε τον μέσο όρο των τιμών των συμβολαίων

$$C_i = \frac{(C_i^+ + C_i^-)}{2} \tag{7.4}$$

Με αυτόν τον τρόπο πετυχαίνουμε την πιο γρήγορη προσέγγιση στην πραγματική τιμή όπως φαίνεται στα παρακάτω γραφήματα.




Σχήμα 7.3: Σχέση τιμής - επαναλήψεων με αντιθετική.




Σχήμα 7.4: Σχέση χρόνου - επαναλήψεων με αντιθετική.

## 7.4 Αμερικάνικα Δικαιώματα

Παραπάνω είδαμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την βασική μέθοδο monte carlo για την τιμολόγηση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αλλά και πως να βελτιώσουμε την ταχύτητα της προσέγγισης της στην πραγματική τιμή. Η βασική μέθοδος όμως δεν επαρκεί για την τιμολόγηση των Αμερικάνικων δικαιωμάτων όπου το δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί νωρίτερα από την τιμή ωρίμανσης. Αυτό συμβαίνει γιατί η κατεύθυνση μας στον χρόνο δεν μας επιτρέπει να τιμολογήσουμε το δικαίωμα χρονικές στιγμές νωρίτερα από την ωρίμανση καθώς δεν μπορούμε να ξέρουμε αν πληρείται το κριτήριο της πρώιμης εξάσκησης.

**Σημείωση :** Στην θεωρία υπάρχει τρόπος να προσωμοιώσουμε τα αμερικάνικα συμβόλαια με την βασική μέθοδο αλλά ο όγκος της προσωμοίωσης είναι πολύ μεγάλος για να θεωρηθεί πρακτικός.

### 7.4.1 Μέθοδος Longstaff & Schwartz

Ανά τα χρόνια έχουν παρουσιαστεί πολλοί αλγόριθμοι για την τιμολόγηση αμερικάνικων δικαιωμάτων με την μέθοδο monte carlo αλλά ο πιο διαδεδομένος από αυτούς είναι ο αλγόριθμος των Longstaff & Schwartz. Αυτή η μέθοδος συνδυάζει την βασική μέθοδο Monte Carlo μαζί με την μέθοδο της παλινδρόμησης ελάχιστων τετραγώνων[6].

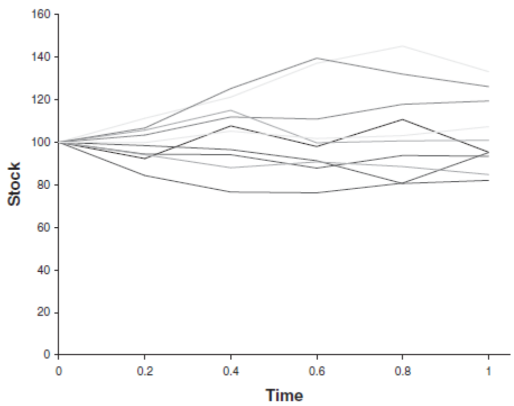
Ξεκινάμε πρώτα πάλι με τον υπολογισμό της τιμής μιας μετοχής για πολλές φορές αποκτώντας διαφορετικά μονοπάτια. Έπειτα υπολογίζουμε την τιμή του συμβολαίου την στιγμή της ωρίμανσης για κάθε μονοπάτι. Το επόμενο βήμα είναι να ξεκινήσουμε να πηγαίνουμε πίσω σε κάθε χρονική στιγμή και να κοιτάμε αν μας συμφέρει η πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος ή αν μας συμφέρει να περιμένουμε την επόμενη χρονική στιγμή, για κάθε μονοπάτι. Έπειτα κατασκευάζουμε έναν πίνακα όπου η μια στήλη του περιλαμβάνει την τιμή της μετοχής την τωρινή χρονική στιγμή και η άλλη στήλη περιλαμβάνει τις μελλοντικές απολαβές του συμβολαίου μειωμένες βάσει του επιτόκιου μηδενικού κινδύνου, για κάθε μονοπάτι. Θεωρούμε τιμές $x_i$ τις τιμές της πρώτης στήλης και $y_i$ τις τιμές της δεύτερης στήλης. Εφαρμόζουμε την μέθοδο της πολυωνυμικής παλινδρόμησης ελαχίστων τετραγώνων και καταλήγουμε να έχουμε μια συνάρτηση

$$Y = a_1 X^2 + a_2 X + a_3 \tag{7.5}$$

όπου τα $a_1, a_2, a_3$ είναι γνωστά και $Y$ είναι η αποπληρωμή που θα έχουμε αν εξασκήσουμε μελλοντικά το συμβόλαιο και $X$ η τωρινή τιμή της μετοχής. Υπολογίζουμε τις μελλοντικές αποληρωμές βάσει της εξίσωσης για κάθε μονοπάτι και τις συγκρίνουμε με τις αποπληρωμές της πρόωρης εξάσκησης.Επαναλαμβανουμε αυτήν την διαδικασία για κάθε μονοπάτι και για κάθε χρονική περίοδο. Έτσι λοιπόν στο τέλος έχουμε τις βέλτιστες αποπληρωμές σε όλα τα μονοπάτια. Μειώνουμε τις αποπληρωμές βάσει του επιτοκίου στην χρονική στιγμή 0 δηλαδή την αρχή της διαδικασίας και βρίσκουμε τον μέσο όρο. Ο μέσος όρος είναι και η τιμή του συμβολαίου.

### 7.4.2 Εφαρμογή

(Παράδειγμα από το βιβλίο του Paul Wilmot). Θεωρούμε το συμβόλαιο πώλησης αμερικάνικου τύπου με τιμή εξάσκησης 100\$ που ωριμάζει σε 1 χρόνο από τώρα. Η μετοχή βρίσκεται αυτήν την στιγμή στα 100\$ και έχει διακύμανση 20% με το επιτόκιο να βρίσκεται στο 5%. Πρώτα θα προσομοιώσουμε τα μονοπάτια της μετοχής όπως κάνουμε κανονικά στην μέθοδο μόντε κάρλο.Παρακάτω βλέπουμε τις πορείες 10 μονοπατιών. 5 από αυτά είναι κάτω από 100\$ και 5 δεν είναι. Για την εύκολη επεξήγηση της μεθόδου χρησιμοποιούμε μεγάλο βήμα για τον χρόνο.




Σχήμα 7.5: 10 μονοπάτια της μετοχής.

| Realization | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 | Payoff |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 92.30759 | 107.7357 | 98.04343 | 110.7416 | 95.34586 | 4.654138 |
| 2 | 100 | 103.4446 | 111.9465 | 110.9322 | 117.8379 | 119.4419 | 0 |
| 3 | 100 | 111.2298 | 121.2417 | 137.1683 | 145.1687 | 133.1789 | 0 |
| 4 | 100 | 105.7152 | 115.0572 | 99.73054 | 100.6804 | 100.9471 | 0 |
| 5 | 100 | 98.47278 | 96.5825 | 91.32007 | 80.63689 | 82.1163 | 17.8837 |
| 6 | 100 | 94.40168 | 94.16078 | 87.83702 | 93.84797 | 93.45847 | 6.541526 |
| 7 | 100 | 106.7042 | 125.264 | 139.4822 | 132.0177 | 126.2041 | 0 |
| 8 | 100 | 84.37568 | 76.60055 | 76.21345 | 80.85454 | 95.19434 | 4.805663 |
| 9 | 100 | 94.21698 | 88.00477 | 90.81541 | 88.63676 | 84.80556 | 15.19444 |
| 10 | 100 | 99.81029 | 105.2631 | 101.747 | 103.1483 | 107.3703 | 0 |

Σχήμα 7.6: Οι τιμές των μετοχών με τις αποπληρωμές τους.

Στον πίνακα έχουμε την τιμή κάθε μονοπατιού σε κάθε χρονικό βήμα και από δίπλα έχουμε τις αποπληρωμές τους την τελευταία χρονική στιγμή που είναι και η στιγμή ωρίμανσης. Επόμενο βήμα είναι να κατασκευάσουμε έναν πίνακα $X, Y$ με τιμές $X$ τις αξίες των αποληρωμών για την χρονική στιγμή $j = 0.8$. Για να βρούμε την αξία της αποπληρωμής σε μια παρελθοντική χρονική στιγμή :

$$payoff \times e^{-rdt} = payoff \times e^{-0.05*0.2} = payoff \times 0.99005 \tag{7.6}$$

Για την στήλη $Y$ παίρνω απλά την τιμή της μετοχής για την χρονική στιγμή που εξετάζω δηλαδή $j = 0.8$.

Present value (at time 0.8) of the payoff if we hold on until expiration.

Stock prices at time 0.8, but only for those paths which are **in the money at this time**.

| Realization | Y | X |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | 0.99005 x 17.8837 | 80.63689 |
| 6 | 0.99005 x 6.541526 | 93.84797 |
| 7 | | |
| 8 | 0.99005 x 4.805663 | 80.85454 |
| 9 | 0.99005 x 15.19444 | 88.63676 |
| 10 | | |

**Σημείωση :** Όπως φαίνεται από τον πίνακα εξετάζω μόνο τα μονοπάτια που μου παρέχουν αποπληρωμή μεγαλύτερη του μηδενός την παρούσα χρονική στιγμή $j = 0.8$, σε μελλοντικές παραλλαγές της μεθόδου υπάρχουν περιπτώσεις όπου λαμβάνονται υπόψιν και τα υπόλοιπα μονοπάτια.

Έχοντας συμπληρώσει τον πίνακα εφαρμόζω την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και παίρνω το πολυώνυμο :

$$Y = -0.1472X^2 + 25.347X - 1075.2 \tag{7.7}$$

Τώρα ήρθε η ώρα να συγκρίνουμε, την αποπληρωμή που θα είχαμε για $j = 0.8$ θεωρόντας της τιμές της μετοχής στην παρούσα χρονική στιγμή, με την αποπληρωμή την χρονική στιγμή $j = 1$ που ισουται με Υ χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο που κατασκευάσαμε προηγουμένως χρησιμοποιώντας για Χ την τιμή της μετοχής την παρούσα χρονική στιγμή. Έτσι λοιπόν έχουμε :

Using the payoff for immediate exercise max(100 – X,0)

Using the formula Y = –0.1472 X^2 + 25.347 X – 1075.2 where X is the stock price at time 0.8

| Realization | Exercise now | Hold on |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | 19.36311255 | 11.5635 |
| 6 | 6.152033497 | 7.109119 |
| 7 | | |
| 8 | 19.14546028 | 11.90641 |
| 9 | 11.36323851 | 15.0028 |
| 10 | | |

Από την σύγκριση έχω τον πίνακα :

| Realization | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | 0 | 4.654138 |
| 2 | | | | 0 | 0 |
| 3 | | | | 0 | 0 |
| 4 | | | | 0 | 0 |
| 5 | | | | 19.36311 | 0 |
| 6 | | | | 0 | 6.541526 |
| 7 | | | | 0 | 0 |
| 8 | | | | 19.14546 | 0 |
| 9 | | | | 0 | 15.19444 |
| 10 | | | | 0 | 0 |

Επαναλαμβάνω το ίδιο πηγαίνοντας πίσω στον χρόνο για $j = 0.6, j = 0.4, j = 0.2$ και καταλήγω μετά από τις συγκρίσεις να έχω τον πίνακα :

| Realization | 0.2 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4.6541375 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 19.363113 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6.541526 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 23.786554 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 11.995234 | | | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Τελευταίο βήμα είναι να βρω την αξία κάθε αποπληρωμής για την χρονική στιγμή $j = 0$ :

$$payoff \times e^{-0.05dt} \tag{7.8}$$

όπου $dt$ είναι διαφορετικό για κάθε μονοπάτι. Αφού πάρω τις τωρινές τιμές

| REALIZATION | Payoff |
|---|---|
| 1 | 4,24759 |
| 2 | 0 |
| 3 | 0 |
| 4 | 0 |
| 5 | 18,60387 |
| 6 | 62,22492 |
| 7 | 0 |
| 8 | 23,08356 |
| 9 | 11,75771 |
| 10 | 0 |

Βρίσκω τον μέσο όρο και αυτός είναι η τιμή του δικαιώματος :

$$Option \;\; price = 11,991765 \tag{7.9}$$

# Κεφάλαιο 8

# Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών χρησιμοποιείται για την επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων σε πάρα πολλούς τομείς. Έτσι λοιπόν έχει βρει εφαρμογή και στον τομέα της τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων βασίζεται στην ιδέα της προσέγγισης κάθε μερικής παραγώγου από ένα πηλίκο διαφοράς μετατρέποντας την λειτουργική εξίσωση σε ένα σύνολο αλγεβρικών εξισώσεων. Έπειτα η ιδέα αυτή εφαρμόζεται σε ένα διακριτό πλέγμα[10].

Για μια συνάρτηση $f$ η παράγωγος σε διακριτή μορφή μπορεί να οριστεί ως:

$$\frac{\partial f(x,h)}{\partial h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{8.1}$$

όπου το $h$ αντιπροσωπεύει το βήμα της παραγώγισης και είναι πεπερασμένο. Όπως μπορεί να καταλάβει κανείς η εξίσωση δεν είναι ακριβής. Η παραπάνω εξίσωση προέρχεται από την σειρά Taylor για $f(x+h)$ :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + ... \tag{8.2}$$

Αφαιρώντας $f(x)$ και από τις δύο μεριές και διαιρώντας με $h$ έχουμε :

$$\frac{\partial f(x,h)}{\partial h} = f'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + ... = f'(x) + O(h) \tag{8.3}$$

Είναι φανερό πως το σφάλμα είναι $O(h)$. Η προσέγγιση αυτή λέγεται παραγώγιση προς τα εμπρός. Με το ίδιο σκεπτικό χρησιμοποιώντας την σειρά Taylor

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) - ... \tag{8.4}$$

Καταλήγουμε στην παραγώγιση προς τα πίσω :

$$\frac{\partial f(x,h)}{\partial h} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{8.5}$$

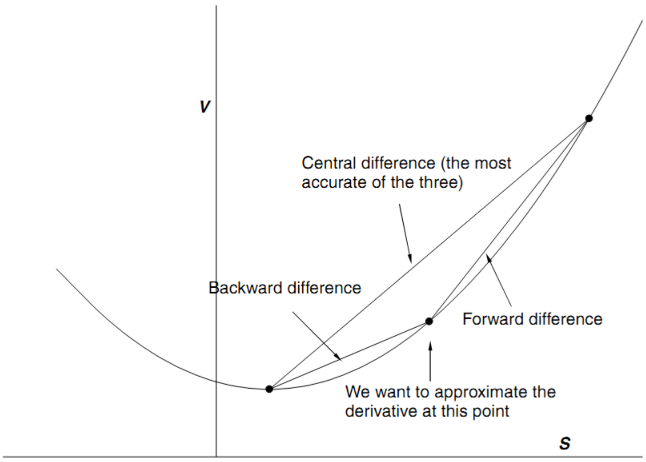
Αφαιρόντας την ... από και διαιρώντας με $2h$ παίρνω την καλύτερη προσέγγιση μέχρι τώρα την κεντρική παραγώγιση :

$$\frac{\partial f(x,h)}{\partial h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = f'(x) + \frac{h^2}{3!} f^{(3)}(x) + ... = f'(x) + O(h^2) \tag{8.6}$$

με σφάλμα $O(h^2)$.

Τέλος η δεύτερη παράγωγος μπορεί να σχηματιστεί προσθέτοντας τις ...,... και διαιρώντας με $h^2$.

$$\frac{\partial^2 f(x,h)}{\partial h^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) - f(x-h)}{h^2} \tag{8.7}$$




Σχήμα 8.1: Γραφική αναπαράσταση πρώτης παραγώγου των τριών μεθόδων.

Το σφάλμα εξακολουθεί να είναι $O(h^2)$[3]. Ανάλογα με τον συνδιασμό των παραγωγίσεων που θα χρησιμοποιήσουμε στην εξίσωση $BSM$ καταλήγουμε και σε διαφορετικές μεθόδους, την έμμεση , άμεση και την Crank-Nicolson. Τώρα που παρουσιάσαμε τους τύπους για την προσέγγιση των παραγώγων δημιουργείται η ανάγκη για ένα πλέγμα. Πρώτα πρέπει να θέσουμε τα όρια για τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης βάση των ορίων που συζητήθηκαν στο Κεφάλαιο 5. Έχουμε για το δικαίωμα αγοράς :

$$f_{i,n} = max(idS - K, 0), \quad i = 0, 1..., M \tag{8.8}$$

Και αντίστοιχα για το δικαίωμα πώλησης :

$$f_{i,n} = max(K - idS, 0), \quad i = 0, 1..., M \tag{8.9}$$

Επίσης το $S$ περιορίζεται στο $S = 0$ και για το δικαίωμα αγοράς $f_{0,j} = 0$ και για το δικαίωμα πώλησης :

$$f_{0,j} = Ke^{-r(N-j)dt}, \;\; j = 0, 1..., N \tag{8.10}$$

Το άνω όριο του $S$ είναι ανύπαρκτο και για λυθεί αυτό το πρόβλημα παίρνουμε σαν άνω όριο ένα πολύ μεγάλο $S$ τυπικά 3 με 4 φορές μεγαλύτερο από την τιμή εξάσκησης. Άρα για δικαίωμα αγοράς :

$$f_{M,j} = Mds - Ke^{-r(N-j)dt} \tag{8.11}$$

Και φυσικά για το δικαίωμα πώλησης $f_{0,j} = 0$.

Για τα Αμερικάνικα δικαιώματα έχω για το δικαίωμα πώλησης:

$$f_{0,j} = K$$

$$f_{i,N} = max(K - idS, 0)$$

$$f_{M,j} = 0$$

Από τον συνεχή χώρο $(S, t)$, κατασκευάζουμε τον διακριτό χώρο χωρίζοντας τον χρόνο από 0 σε T(ημερομηνία ωρίμανσης) σε N διαστήματα μεγέθους $dt$ και κάνουμε το ίδιο για τον άξονα της τιμής χωρίζοντας τον σε M διαστήματα μεγέθους $dS$. Συνεπώς το πλέγμα μας απότελείται από $(S, t)$ σημεία έτσι ώστε $S = 0, dS, 2dS, \ldots, Mdt = Smax$ και $t = 0, dt, 2dt, \ldots, Ndt = T$. Στην εργασία αυτή θα διαιρεθούν σε ίσα διαστήματα και οι δύο άξονες χωρίς όμως αυτό να συμβαίνει πάντα. Έχοντας λοιπόν τις αριθμητικές επιλύσεις των παραγώγων και το πλέγμα θα δούμε πρώτα την επίλυση για ένα Ευρωπαϊκό συμβόλαιο και μετά για ένα Αμερικάνικο.

### 8.0.1 Άμεση μέθοδος

Η άμεση μέθοδος χρησιμοποιεί την κεντρική παραγώγιση ως προς την τιμή της μετοχής $S$ και την παραγώγιση προς τα πίσω για την προσέγγιση του χρόνου $t$.

Έχω λοιπόν την εξίσωση Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{8.12}$$

Η παραγώγιση προς τα πίσω μας δίνει :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\delta t} \tag{8.13}$$

Η κεντρική παραγώγιση μας δίνει :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{(\delta S)^2} \tag{8.14}$$

Αντικαθιστόντας στην εξίσωση έχω :

$$\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\delta t} + ri\delta S\frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \delta S^2 \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\delta S^2} = rf_{i,j} \tag{8.15}$$

όπου μπορεί να γραφεί ως :

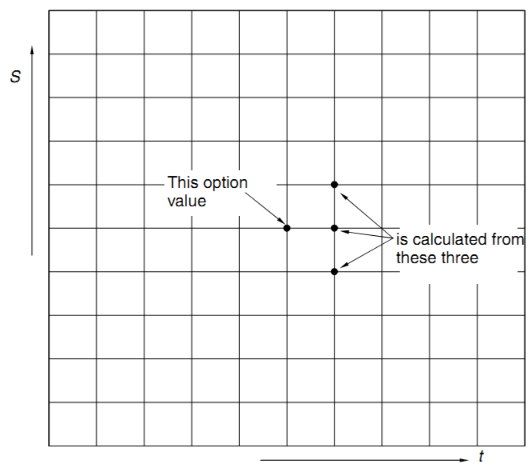
$$f_{i,j-1} = \alpha_i^* f_{i-1,j} + b_i^* f_{i,j} + c_i^* f_{i+1,j}, \quad j = N, N-1, ..., 1, 0; \quad i = 1, 2, ..., M-1 \tag{8.16}$$

όπου ,

$$\alpha_i^* = \frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 - ri) \tag{8.17}$$

$$bi^* = 1 - \delta t(\sigma^2 i^2 + ri) \tag{8.18}$$

$$ci^* = \frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 + ri) \tag{8.19}$$




Σχήμα 8.2: Η σχέση των τιμών των δικαιωμάτων στην άμμεση μέθοδο.

Αφού η αποπληρωμή του συμβολαίου είναι γνωστή τότε και οι τιμές για $j = N$ είναι γνωστές, $M-1$ τιμές δικαιωμάτων για $N-1-th$ βήμα μπορούν έπειτα εύκολα να υπολογιστούν και άλλες δύο τιμές είναι γνωστές από τα όρια$(i = 0, i = N)$. Έτσι λοιπόν συνεχίζουμε μέχρι να έχουμε τιμές σε όλο το πλέγμα. Όσον αφορά την πρόωρη εξάσκηση των αμερικάνικων συμβολαίων, μπορούμε σε κάθε βήμα να κάνουμε τον ίδιο έλεγχο με το δυωνιμικό δέντρο και να συγκρίνουμε την τωρινή τιμή και την αναμενόμενη τιμή αν δεν εξασκήσουμε το συμβόλαιο.

Η άμεση μέθοδος δείχνει μια χαρά αλλά έχει ένα μεγάλο μειονέκτημα, την σταθερότητα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $0 < \frac{dt}{dS^2} \leq \frac{1}{2}$ η μέθοδος είναι σταθερή ενώ αλλιώς δεν είναι. Αυτό σημαίνει ότι για να βελτιωθεί η ακρίβεια πρέπει αν μειώσουμε στο μισό το βήμα για την μετοχή τότε το βήμα του χρόνου πρέπει να μειωθεί 4 ή παραπάνω φορές. Συνεπώς ο υπολογιστικός χρόνος αυξάνεται κατά 8. Η βελτίωση που θα έχουμε στην ακρίβεια θα είναι 4 φορές καλύτερη και όχι 8 καθώς $O(dt, dS^2)$.

### 8.0.2 Έμμεση μέθοδος

Για να ξεπεράσουμε το εμπόδιο της αστάθειας χρησιμοποιούμε την έμμεση μέθοδο. Η μόνη διαφορά με πριν είναι ότι για $\frac{df}{dt}$ χρησιμοποιούμε την παραγώγιση προς τα πίσω, οπότε τώρα η εξίσωση γίνεται,

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\delta t} + ri\delta S \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 i^2 \delta S^2 \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\delta S^2} = rf_{i,j} \tag{8.20}$$

Άρα έχω :

$$f_{i,j+1} = \alpha_i^* f_{i-1,j} + b_i^* f_{i,j} + c_i^* f_{i+1,j}, \quad j = N, N-1, ..., 1, 0; \quad i = 1, 2, ..., M-1 \tag{8.21}$$

όπου ,

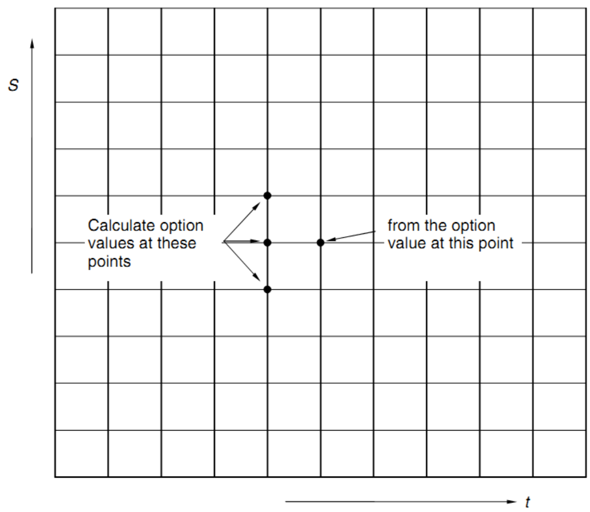
$$\alpha_i^* = \frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 - ri) \tag{8.22}$$

$$bi^* = 1 - \delta t(\sigma^2 i^2 + ri) \tag{8.23}$$

$$ci^* = \frac{1}{2}\delta t(\sigma^2 i^2 + ri) \tag{8.24}$$

M-1 στοιχεία στο προτελευταίο βήμα θα υπολογιστούν από την τελευταία σειρά. Σε αυτήν την περίπτωση δεν είναι τόσο εύκολο όπως στην άμεση μέθοδο καθώς από μια τιμή στο βήμα του χρόνου $T$, τρεις τιμές από $T - dt$ πρέπει να βρεθούν. Ευτυχώς υπάρχουν και άνω και κάτω όρια συνεπώς έχουμε ένα σύστημα εξισώσεων που μπορεί να λυθεί. Αυτή η διαδικασία υπολογισμού προς τα πίσω συνεχίζεται μέχρι να φτάσει το βήμα του χρόνου στην τωρινή τιμή.

Παραπάνω βλέπουμε το σύστημα εξισώσεων που κατασκευάζεται κατά την διάρκεια της έμμεσης μεθόδου.




Σχήμα 8.3: Η σχέση των τιμών των δικαιωμάτων στην έμμεση μέθοδο.

$$
\begin{vmatrix}
b_1 & c_1 & & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & & \\
 & a_3 & b_3 & c_3 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\
 & & & & a_{M-1} & b_{M-1}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix} f_{1,j} \\ f_{2,j} \\ f_{3,j} \\ \vdots \\ f_{M-2,j} \\ f_{M-1,j} \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} f_{1,j+1} \\ f_{2,j+1} \\ f_{3,j+1} \\ \vdots \\ f_{M-2,j+1} \\ f_{M-1,j+1} \end{vmatrix}
-
\begin{vmatrix} a_1 f_{0,j} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{M-1} f_{M-1,j} \end{vmatrix}
$$

$$Mfi = f_{i+1}^{*} \tag{8.25}$$

όπου $f_i$ είναι το διάνυσμα στο αριστερό μέρος, ενώ $f_{i+1}^{*}$ η παραγώγιση στα δεξιά. Το σύστημα λύνεται παίρνοντας υπόψιν μας τα όρια χρησιμοποιώντας το $a$. Ακόμα μπορούμε να εφαρμόσουμε Lower-Upper Decomposition ή SOR (Successive Over-relaxation).

### 8.0.3 Crank-Nicolson μέθοδος

Η μέθοδος Crank-Nicolson έκανε την εμφάνιση της για να βελτιστοποιήσει την ακρίβεια έως και $O(dt^2)$ συνδιάζοντας την άμμεση και την έμμεση μέθοδο[2]. Εφαρμόζοντας στην διαφορική εξίσωση BSM έχουμε :

$$\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\delta t} + \frac{ri\ S}{2}\frac{f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1}}{2\delta S} + \frac{ri\delta S}{2}\frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\delta S} +$$

$$\frac{1}{4}\sigma^2 i^2 \delta S^2 \frac{f_{i+1,j-1} - 2f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}}{\delta S^2} + \frac{1}{4}\sigma^2 i^2 \delta S^2 \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\delta S^2} = \frac{r}{2} f_{i,j-1} + \frac{r}{2} f_{i,j}$$

Όπου μπορεί να γραφεί ως,

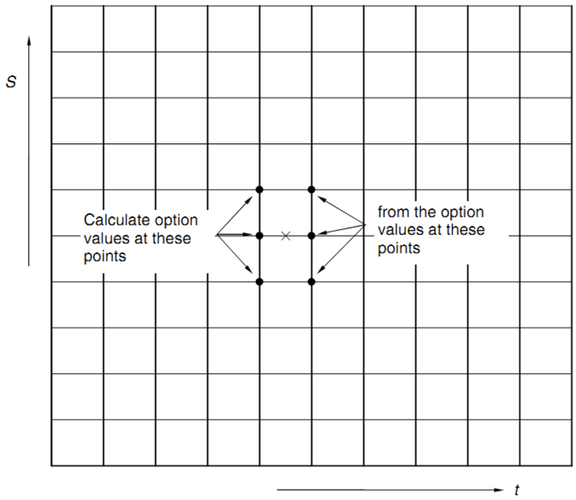
$$-\alpha_i f_{i-1,j-1} + (1 - b_i) f_{i,j-1} - c_i f_{i+1,j-1} = \alpha_i f_{i-1,j} + (1 + b_i) f_{i,j} - c_i f_{i+1,j} \tag{8.26}$$

όπου ,

$$\alpha_i = \frac{1}{4}\delta t(\sigma^2 i^2 - ri) \tag{8.27}$$

$$bi = -\frac{\delta t}{2}(\sigma^2 i^2 + ri) \tag{8.28}$$

$$ci = \frac{1}{4}\delta t(\sigma^2 i^2 + ri) \tag{8.29}$$




Σχήμα 8.4: Η σχέση των τιμών των δικαιωμάτων στην CN μέθοδο.

Παρόμοια με την έμμεση μέθοδο έχουμε :

$$M_1 f_{j-1} = M_2 f_j \tag{8.30}$$

Όπου

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1-\beta_1 & -\gamma_1 & & & & \\ -\alpha_2 & 1-\beta_2 & -\gamma_2 & & & \\ & -\alpha_3 & 1-\beta_3 & -\gamma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\alpha_{M-2} & 1-\beta_{M-2} & -\gamma_{M-2} \\ & & & & -\alpha_{M-1} & 1-\beta_{M-1} \end{vmatrix}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1+\beta_1 & \gamma_1 & & & & \\ \alpha_2 & 1+\beta_2 & \gamma_2 & & & \\ & \alpha_3 & 1+\beta_3 & \gamma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{M-2} & 1+\beta_{M-2} & \gamma_{M-2} \\ & & & & \alpha_{M-1} & 1+\beta_{M-1} \end{vmatrix}$$

είναι το σύστημα εξισώσεων που χρειάζεται να λυθεί, όπως είδαμε και στην έμμεση μέθοδο πάλι με τις μεθόδους LU,SOR.

## 8.1 Εφαρμογή

**Σημείωση :** Για την παρούσα εργασία θα δούμε πως συμπεριφέρονται οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών για τετράγωνα πλέγματα όπου ο χρόνος και οι τιμές έχουν χωριστεί σε ίσα διαστήματα. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που δεν συμβαίνει πάντα αυτό αλλά ο χρόνος και η τιμή χωρίζονται σε διαφορετικό αριθμό διαστημάτων.

Χρησιμοποιόντας το Matlab υλοποιούμε τις τρεις μεθόδους και συγκρίνουμε την συμπεριφορά τους μεταξύ τους :

Έστω η μετοχή στην τιμή 50$ με διακύμανση 20% και ένα Ευρωπαϊκού τύπου συμβόλαιο πώλησης με τιμή εξάσκησης 60$ και χρόνο ωρίμανσης 1 έτος από την παρούσα στιγμή. Το επιτόκιο είναι 5%.

| M = N | Explicit | Implicit | CN | BLS |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 8,6853 | 8,6918 | 8,6984 | 8,6975 |
| 100 | -6,27E+33 | 8,698 | 8,6952 | |
| 500 | NaN | 8,6977 | 8,6974 | |
| 1000 | NaN | 8,6976 | 8,6975 | |

όπως φαίνεται η άμεση μέθοδος δεν προσφέρει σταθερότητα καθώς όσο αυξάνουμε το πλήθος των διαστημάτων τα αποτελέσματα που παίρνουμε δεν είναι αυτά που θα θέλαμε. Αντιθέτως η έμμεση μέθοδος συμπεριφέρεται αρκετά καλά με μια σταθερή προσέγγιση στην πραγματική τιμή του συμβολαίου. Είναι φανερό όμως πως η Crank Nicolson μέθοδος που συνδιάζει τις δύο προηγούμενες είναι σε θέση να προσεγγίσει ακριβώς την τιμή του συμβολαίου πιο γρήγορα από την έμμεση μέθοδο.

Τώρα θα εξετάσουμε τα αποτελέσματα για N=M=500 αλλά για διαφορετικές τιμές εξάσκησης και για δικαίωμα αγοράς με όλες τις άλλες μεταβλητές να μένουν ίδιες.

| K | Explicit | Implicit | CN | BLS |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 7,69E+45 | 21,4079 | 21,4685 | 21,4688 |
| 40 | 7,69E+45 | 12,2419 | 12,294 | 12,2944 |
| 50 | 7,69E+45 | 5,1804 | 5,2247 | 5,2253 |
| 60 | 7,69E+45 | 1,588 | 1,6233 | 1,6237 |
| 70 | 7,69E+45 | 0,3671 | 0,3921 | 0,3925 |

Ομοίως πράττουμε για διαφορετικές διακυμάνσεις της μετοχής

| σ | Explicit | Implicit | CN | BLS |
|---|---|---|---|---|
| 5% | 0,0033 | 0,0036 | 0,0035 | 0,0034 |
| 20% | NaN | 1,5888 | 1,6233 | 1,6237 |
| 50% | NaN | 2,0017 | 7,1081 | 7,3917 |

Η άμεση μέθοδος παρόλο που είναι εύκολη στην εφαρμογή της καθώς δεν χρειάζεται σύστημα εξισώσεων στην υλοποίηση της με αποτέλεσμα να είναι και πιο γρήγορη από τις άλλες δύο μεθόδους είναι αρκετά ασταθής βάση του πλήθους των διαστημάτων και όπως είδαμε είναι επηρεπείς και στις διαφορετικές τιμές εξάσκησης αλλά και στην διακύμανση της μετοχής.

Από την άλλη η έμμεση μέθοδος ξεπερνάει το πρόβλημα της αστάθειας αλλά είναι πιο περίπλοκη καθώς περιλαμβάνει την επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων, προσφέρει όμως ικανοποιητική ακρίβεια στα αποτελέσματα της. Βλέπουμε όμως πως ακόμα και αυτή όταν η διακύμανση αυξήθηκε είχε υστερούσε σε σχέση με την CN στην ευστάθεια της.

Περιπλέκοντας λίγο ακόμα τα πράγματα και αυξάνοντας την υπολογιστική ισχύ που χρειαζόμαστε πετυχαίνουμε την καλύτερη ακρίβεια με την μέθοδο CN που βλέπουμε πως προσφέρει σταθερά την καλύτερη προσέγγιση σε όλα τα παραπάνω σενάρια.

# Κεφάλαιο 9

# Σύγκριση Μεθόδων

Αφού παρουσιάσαμε τις τρεις κύριες αριθμητικές μεθόδους, τις αναλύσαμε και είδαμε πως συμπεριφέρονται στα Ευρωπαϊκά συμβόλαια όπου μπορούμε να γνωρίζουμε την ακριβή τιμολόγιση τους καθώς υπάρχει η κλειστή επίλυση της εξίσωσης Black-Scholes. Η ουσία όμως των αριθμητικών μεθόδων όπως είπαμε βρίσκεται στην δυνατότητα τους να τιμολογήσουν πιο σύνθετα δικαιώματα όπου δεν υπάρχει η δυνατότητα κλειστής λύσης. Γι αυτόν τον λόγο παρακάτω θα συγκρίνουμε την συμπεριφορά τους για ένα Αμερικάνικο δικαίωμα προαίρεσης.

Έστω ένα αμερικάνικου τύπου δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 50\$$ χρόνο ωρίμανσης 1 έτος αργότερα από την παρούσα στιγμή, με την υποκείμενη μετοχή να έχει διακύμανση 20% και το επιτόκιο να βρίσκεται στο 5%. θα δούμε πως συμπεριφέρονται οι μέθοδοι καθώς μεταβάλουμε την αρχική τιμή της μετοχής, στον παρακάτω πίνακα.

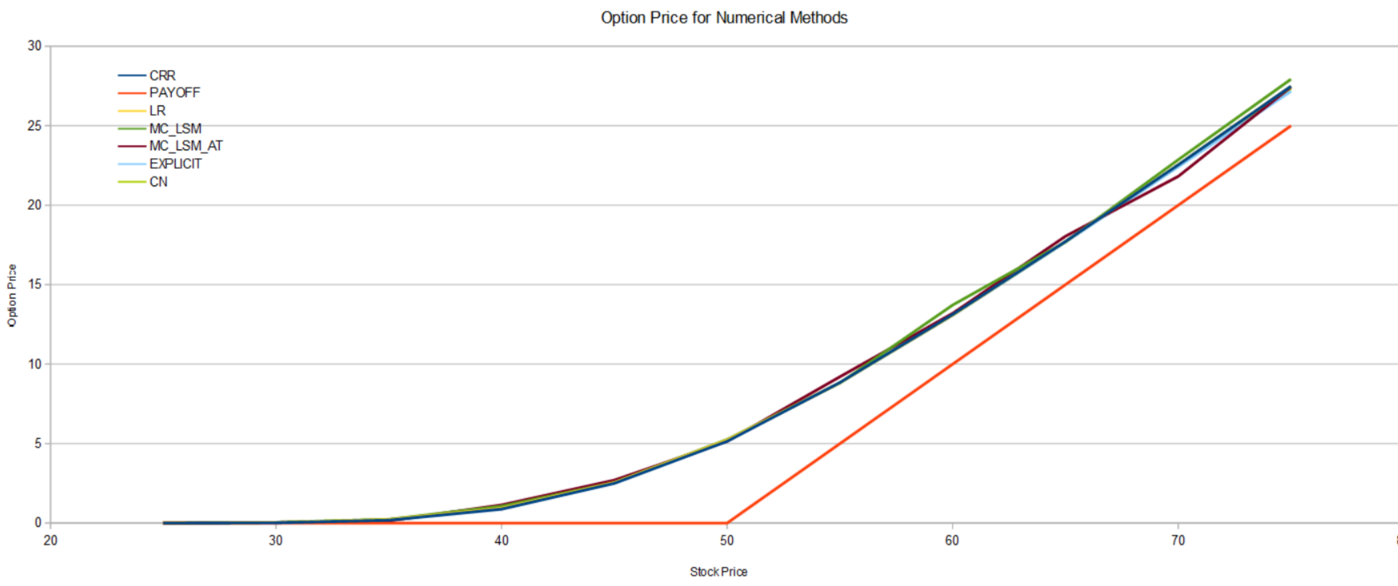
| Initial Stock Price | CRR | LR | MC_LSM | MC_LSM_AT | EXPLICIT | CN |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 0 | 0.0012568431 | 0 | 0.0051252988 | 0.0013163634 | 0.0013414856 |
| 30 | 0.0184936947 | 0.0276522594 | 0.0454968259 | 0.0432179508 | 0.0277086043 | 0.0278849463 |
| 35 | 0.1792576933 | 0.2217891954 | 0.2386058093 | 0.1373231658 | 0.2208325404 | 0.221207436 |
| 40 | 0.874217043 | 0.9309494786 | 1.0586531342 | 1.1398345038 | 0.9277393504 | 0.9279655906 |
| 45 | 2.5023401922 | 2.5466396761 | 2.5542513297 | 2.7025897404 | 2.5414835619 | 2.5413553302 |
| 50 | 5.142924758 | 5.2263656388 | 5.2614231029 | 5.1479191797 | 5.2203483011 | 5.2206752685 |
| 55 | 8.8443498327 | 8.8328650453 | 8.8176865197 | 9.2055095747 | 8.8250037561 | 8.8287099709 |
| 60 | 13.1221090954 | 13.0860883901 | 13.7195730779 | 13.1975362401 | 13.0686681055 | 13.0832304795 |
| 65 | 17.7187216568 | 17.7215631674 | 17.6870843531 | 18.0440027203 | 17.6714608345 | 17.7122906509 |
| 70 | 22.5420050034 | 22.5563896346 | 22.8635067997 | 21.8152599803 | 22.4213220328 | 22.5136785712 |
| 75 | 27.4836827202 | 27.4857851288 | 27.9297413023 | 27.4463643827 | 27.1677654836 | 27.344928404 |

Σχήμα 9.1: Πίνακας τιμών για διαφορετικές μεθόδους τιμολόγησης των συμβολαίων.

Από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι οι τιμές των μεθόδων δεν διαφέρουν πολύ αλλά να μην ξεχνάμε πως στην αγορά οι επενδυτές επενδύουν μεγάλα ποσά οπότε κάθε δεκαδικό ψηφίο μετράει.

Παρακάτω βλέπουμε τον χρόνο της κάθε μεθόδου όπου τα πράγματα είναι πιο ξεκάθαρα.

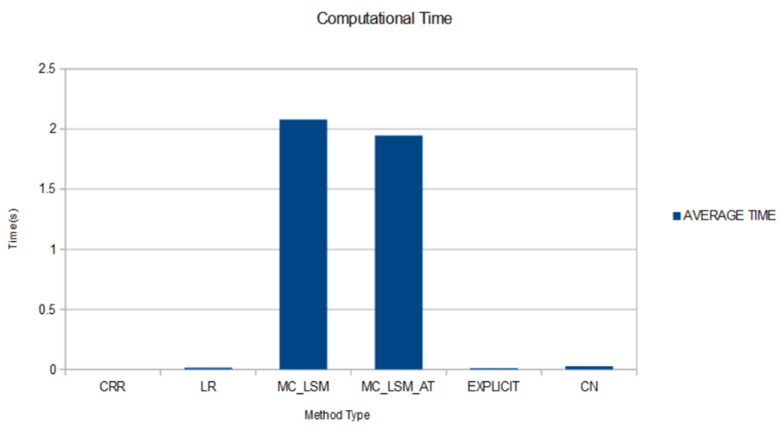
Εδώ τα πράγματα είναι ξεκάθαρα καθώς η μέθοδος μόντε κάρλο είναι φανερά πιο αργή από όλες τις μεθόδους. Επίσης φανερό είναι ότι το δυωνυμικό δέντρο είναι το πιο γρήγορο από όλες τις μεθόδους και η άμεση μέθοδος πιο γρήγορη από την Crank-Nicolson.




Σχήμα 9.2: Γραφική παράσταση τιμών.

| Initial Stock Price | CRR | LR | MC_LSM | MC_LSM_AT | EXPLICIT | CN |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 0.0006538574 | 0.0212447141 | 2.3256217298 | 1.8036553292 | 0.0146951996 | 0.0647865865 |
| 30 | 0.0003077834 | 0.0164117121 | 2.1231801029 | 1.9088122332 | 0.0118773768 | 0.0233565314 |
| 35 | 0.0004219258 | 0.0134224933 | 2.2648600315 | 1.9073090539 | 0.0105335593 | 0.0302692594 |
| 40 | 0.0004500056 | 0.0132696956 | 2.2077038482 | 2.0537753064 | 0.0088305397 | 0.0242747762 |
| 45 | 0.0010415041 | 0.0140052396 | 2.081807666 | 1.9201644818 | 0.0118894109 | 0.0281246217 |
| 50 | 0.0003464387 | 0.0152713818 | 1.9321487075 | 1.9427220161 | 0.0106484311 | 0.0250212604 |
| 55 | 0.0002352136 | 0.0183856833 | 2.0450647439 | 1.9465977533 | 0.0105477816 | 0.0229061611 |
| 60 | 0.0002217208 | 0.0162468802 | 2.0599368096 | 1.9787851891 | 0.0104500494 | 0.0212906628 |
| 65 | 0.0002184387 | 0.0141868464 | 1.989617415 | 1.9690221823 | 0.0105215251 | 0.0209321899 |
| 70 | 0.0002096866 | 0.0144731142 | 1.9349030774 | 1.9669183878 | 0.0083396908 | 0.0232846909 |
| 75 | 0.0002527179 | 0.0159638945 | 1.9109637997 | 2.0194738654 | 0.0078123746 | 0.0219726 |
| AVERAGE TIME | 0.0003962993 | 0.0157165141 | 2.0796189029 | 1.9470214362 | 0.0105587217 | 0.0278381218 |

Σχήμα 9.3: Πίνακας χρόνων.




Σχήμα 9.4: Γραφική παράσταση τιμών.

# Κεφάλαιο 10

# Επίλογος

## 10.1 Συμπεράσματα

Η τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι ένα μεγάλο επίτευγμα των σύγχρονων χρηματοοικονομικών. Ενθάρρυνε την ανάπτυξη και τη διάδοση γνωστών δικαιωμάτων όπως της αγοράς και της πώλησης σε πολλά περιουσιακά στοιχεία αλλά και των εξωτικών δικαιωμάτων. Το πλεονέκτημα της τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης δεν είναι να προσφέρει την ¨σωστή τιμή¨. Η τιμή της αγοράς είναι η καλύτερη επιλογή τιμολόγησης, πχ. μια δίκαιη αγορά προσφέρει την καλύτερη τιμή για τα δικαιώματα. Τα πραγματικά πλεονεκτήματα των μοντέλων τιμολόγησης είναι ότι μπορούν να προσφέρουν ένα ¨στιγμιότυπο' των συνθηκών που επικρατούν στην αγορά(πχ. η διακύμανση).

Η εργασία αυτή έκανε απλά μια εισαγωγή στον κόσμο των χρηματοοικονομικών μοντέλων και στις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων. Είδαμε πρώτα το δυωνυμικό μοντέλο που παρουσιάζει με έναν πολύ απλό και κατανοητό τρόπο την τιμολόγηση ενός δικαιώματος. Είναι πάρα πολύ εύκολο στην ανάπτυξη του και όπως είδαμε είναι και το πιο γρήγορο από τις τρεις μεθόδους μας και με πολύ ικανοποιητική ακρίβεια. Βέβαια υστερεί στην μοντελοποίηση της μετοχής καθώς υποθέτει ότι μπορεί να πάει μόνο πάνω ή κάτω. Μετά την παρουσίαση του από τους Cox,Ross,Rubenstein υπήρξαν άλλα δενδρικά μοντέλα(πχ. τριωνυμικό) που στόχο είχαν να καλύψουν αυτό το κενό αλλά και να προσφέρουν καλύτερες προσεγγίσεις και ταχύτητες σε εξωτικά δικαιώματα όπου το συγκεκριμένο μοντέλο υστερεί. Αργότερα είδαμε το μοντέλο Leisen-Reimer που είναι σε θέση να ξεπεράσει το προηγούμενο μοντέλο στον χρόνο προσέγγισης.

Μετά είδαμε την μέθοδο μόντε κάρλο. Η προσομοίωση με μόντε κάρλο είναι στην καρδιά των χρηματοοικονομικών και χρησιμοποιείται από κάθε είδους οικονομικό ίδρυμα(τράπεζες, ασφαλιστικές κλπ). Είδαμε πως η μέθοδος όμως αργεί στην προσέγγιση της τιμής και καταφέραμε να βελτιώσουμε αυτό το πρόβλημα με την αντιθετική μέθοδος. Ο υπολογιστικός χρόνος όμως είναι φανερά μεγαλύτερος και από το δυωνυμικό μοντέλο και από την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών. Η μέθοδος μόντε κάρλο όμως δεν φημίζεται για την τιμολόγηση απλών δικαιωμάτων όπως τα Ευρωπαϊκά ή τα Αμερικάνικα αλλά για δικαιώματα που έχουν αρκετά υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία ή για δικαιώματα που η αποπληρωμή τους εξαρτάται από το μονοπάτι του περιουσιακού στοιχείου και όχι μόνο για την τιμή που έχει την στιγμή της ωρίμανσης. Τέλος να σημειωθεί πως υπάρχουν κάποια δικαιώματα τόσο περίπλοκα που η τιμολόγηση τους μπορεί να γίνει μόνο με την μέθοδο μόντε κάρλο.

Τέλος είδαμε μια από τις πιο γνωστές αριθμητικές μεθόδους την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Συγκεκριμένα παρουσιάσαμε τρεις μεθόδους : Την άμεση την έμμεση και την μέθοδο Crank-Nicolson. Η άμεση μέθοδος είναι η πιο εύκολη στην εφαρμογή της από τις τρεις και η πιο γρήγορη. Η εφαρμογή της και στα Ευρωπαϊκά και στα Αμερικάνικα συμβόλαια έγινε πολύ εύκολα. Το μεγαλύτερο μειονέκτημα της όμως είναι η αστάθεια της καθώς σε κάποιες συνθήκες δεν προσφέρει καθόλου λογικά αποτελέσματα όπως είδαμε. Το πρόβλημα της αστάθειας καταφέραμε να το ξεπεράσουμε με την έμμεση μέθοδο θυσιάζοντας υπολογιστικό χρόνο και αμέσως μετά είδαμε την μέθοδο Crank-Nicolson η οποία έχει τον μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο από τις τρεις αλλά προσφέρει και την καλύτερη ακρίβεια. Θα πρέπει να ειπωθεί πως οι μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών στην πράξη είναι οι πιο ευρεία διαδεδομένες και χρησιμοποιούνται στην πλειοψηφία των περιπτώσεων.

Είναι φανερό λοιπόν ότι για διαφορετικές συνθήκες και διαφορετικά δικαιώματα την βέλτιστη λύση την προσφέρει και διαφορετική μέθοδος. Σε κάποια εξωτικά δικαιώματα υπάρχουν κλειστές λύσεις και προτιμώνται από τις αριθμητικές μεθόδους. Σε κάποια άλλα δεν υπάρχει άλλη επιλογή παρά μόνο η μέθοδος μόντε κάρλο. Κάποιοι άτυποι κανόνες είναι ότι για δικαιώματα που εξαρτώνται από τα μονοπάτια των υποκείμενων στοιχείων η μέθοδος μόντε κάρλο είναι η βέλτιστή. Αν μας ενδιαφέρει η ακρίβεια στην τιμή τότε χρησιμοποιούμε την αντιθετική μέθοδο θυσιάζοντας υπολογιστικό χρόνο. Φυσικά όμως υπάρχουν τρόποι βελτίωσης όπως ο παράλληλος προγραμματισμός. Για όλα τα άλλα δικαιώματα οι μέθοδοι των δέντρων και των πεπερασμένων διαφορών λόγω του καλύτερου υπολογιστικού χρόνου. Τα δυωνυμικά δένδρα εφαρμόζονται κυρίως για απλά δικαιώματα όπως τα Αμερικάνικα ή τα δικαιώματα τύπου Βερμούδας(είναι ένας συνδυασμός των Αμερικάνικων και των Ευρωπαϊκών, με δικαίωμα εξάσκησης σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές). Για όλα τα άλλα οι μέθοδοι των πεπερασμένων διαφορών είναι οι καλύτερες και όπως είδαμε ανάλογα με την μέθοδο που θα διαλέξουμε μπορούμε να έχουμε διάφορους συνδυασμούς χρόνου και ακρίβειας.

## 10.2 Μελλοντικές Επεκτάσεις

Η εργασία αυτή παρουσιάζει μόνο το μοντέλο Black-Scholes για την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης και κάνει μια εισαγωγή στις τρεις κυριότερες αριθμητικές μεθόδους. Υπάρχουν όμως πολλά κενά στο μοντέλο και έπειτα από την δημοσίευση του παρουσιάστηκε μια πληθώρα μοντέλων τα οποία στοχεύουν να καλύψουν αυτό τα κενά όπως και παρουσιάστηκαν άλλα μοντέλα τα οποία στοχεύουν σε συγκεκριμένους τύπους δικαιωμάτων.

Ακόμα έχουν παρουσιαστεί διάφορες επεκτάσεις και μετατροπές ανά τα χρόνια πάνω στις αριθμητικές μεθόδους που είδαμε που βοηθάνε στην βελτίωση του χρόνου και της ακρίβειας για συγκεκριμένα συμβόλαια ή και για γενικούς σκοπούς. Τα τελευταία χρόνια έχουν βρει εφαρμογή στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων και η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούνταν μέχρι πρότινος κυρίως σε μηχανολογικής φύσεως προβλήματα αλλά και η τιμολόγηση με την χρήση Fourier που χρησιμοποιούνταν κυρίως στον κλάδο των τηλεπικοινωνιών.

Επίσης ένα άλλο μεγάλο κεφάλαιο είναι οι παράγωγοι του μοντέλου που ονομάζονται 'Έλληνες' και έχουν μεγάλη σημασία στην κατανόηση της αγοράς και της συμπεριφοράς και των περιουσιακών στοιχείων και των δικαιωμάτων προαίρεσης. Όπως θα μπορούσε να υποθέσει κανείς κάθε αριθμητική μέθοδος προσφέρει και διαφορετικές τιμές στους 'Έλληνες' με διαφορές σε χρόνους και προσεγγίσεις.

# Βιβλιογραφία


[1] Cox, Ross, Rubinstein. *"Option pricing: A simplified approach"*. Journal of Financial Economics,Volume 7, Issue 3, 1979.

[2] Crank, J. and Nicolson, P. *"A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type"*. Proc. Camb. Phil. Soc., 1947.

[3] Daniel J. Duffy. *"Finite difference methods in financial engineering"*. John Wiley Sons, Ltd, 2006.

[4] Dietmar Leisen and Matthias Reimer. *"Binomial models for option valuation - examining and improving convergence"*. Applied Mathematical Finance, 1996, vol. 3, issue 4, 1996.

[5] Fischer Black and Myron Scholes. *"The Pricing of Options and Corporate Liabilities"*. Journal of Political Economy, vol. 81, no. 3, 1973.

[6] Francis A.Longstaff, Eduardo S.Schwarze. *"Valuing American Options by simulation: A Simple Least-Squares Approach"*. UCLA, 2001.

[7] J.C Hull. *"Options, Futures, and Derivatives". Global edition, 8th edition.* Paerson Education Limited, 2012.

[8] K.Ito. *"On Stochastic Differential Equations"*. Memoirs of the American Mathematical Society 4, 1951.

[9] Merton Robert. *"Theory of Rational Option Pricing"*. Bell Journal of Economics and Management Science.4, 1971.

[10] Paolo Brandimarte. *"Numerical Methods in finance and Economics".Second Edition.* John Wiley Sons, Inc., 2006.

[11] Paul Glasserman. *"Monte Carlo Methods in Financial Engineering"*. Springer, 2003.

[12] P.Wilmott. *"Paul Wilmot Introduces Quantitative Finance". 2nd edition.* John Wiley Sons, Ltd, 2007.

[13] Salih N Neftci. *"An introduction to the Mathematics of Financial Derivatives"*. Spring, 2000.