



ΤΕΙ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**«ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΣΚΕΔΑΣΗ ΑΠΟ ΖΕΥΓΟΣ
ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΥΛΙΝΔΡΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ
ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΠΗΓΩΝ»**

Πτυχιακή εργασία :

Αγουρζενίδου Ελένη	3052
Πολυγυρινού Μαρία	3672
Πουλιτίδου Βαλεντίνα	3034

Επιβλέπων: Δρ. Αναστασίου Χρήστος, Καθηγητής

Σέρρες, Νοέμβριος 2018

Περίληψη

Η παρούσα πτυχιακή πραγματεύεται το θέμα της ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης, όπου, γίνεται μελέτη επάνω σε γεωμετρία από ζεύγος κυλίνδρων. Τα τελευταία χρόνια η σκέδαση μελετάται από διάφορες επιστήμες και παρά τις εξελίξεις, υπάρχουν ιδιαιτερότητες και περιορισμοί που ακόμη δεν έχουν βρει απαντήσεις ως προς την ακρίβεια της λύσης τέτοιων προβλημάτων. Αρχικά γίνεται μια θεωρητική προσέγγιση του θέματος, αναλύοντας βασικές έννοιες του ηλεκτρομαγνητισμού. Για την επίλυση της έρευνας, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των βοηθητικών πηγών, η οποία περιγράφεται πλήρως θεωρητικά καθώς και η εφαρμογή της, επάνω στη γεωμετρία του προβλήματος μας. Το πρόβλημα με τη μέθοδο αυτή είναι ότι δεν υπάρχουν απαντήσεις ως προς τη θέση που μπορούν να τοποθετηθούν οι πηγές ή ως προς τον αριθμό. Ο σκοπός της εργασίας είναι η δημιουργία λογισμικού για να διευκολύνει τον ερευνητή ως προς την επίλυση θεμάτων ανάλογης γεωμετρίας. Είναι γεγονός πως αντίστοιχα προβλήματα, καθίσταται αδύνατον να υπολογιστούν χωρίς τη χρήση υπολογιστή. Μέσα από το λογισμικό είναι εύκολο να υλοποιηθούν πολλές δοκιμές. Κατ' αυτό τον τρόπο επιτυγχάνεται η ανάλυση του προβλήματος και η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τη θέση των βοηθητικών πηγών. Στο τέλος μέσα από παρουσίαση και ανάλυση παραδειγμάτων εξάγεται το συμπέρασμα που υποστηρίζει η θεωρία, το οποίο είναι πως όσο μεγαλύτερος ο αριθμός των πηγών τόσο πιο αποδοτική η μέθοδος.

Λέξεις κλειδιά

Ηλεκτρομαγνητική Σκέδαση, Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών, Οριακές Συνθήκες, Προσπίπτον πεδίο

Υπεύθυνη Δήλωση :

Βεβαιώνουμε ότι είμαστε συγγραφείς αυτής της πτυχιακής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχαμε για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην πτυχιακή εργασία. Επίσης έχουμε αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες κάναμε χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνουμε ότι αυτή η πτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμάς προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του προγράμματος σπουδών του Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής του Τ.Ε.Ι. Σερρών.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	1
Κεφάλαιο 1ο: Εισαγωγή στις έννοιες της ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης	5
1.1 Εξισώσεις Maxwell	6
1.2 Εισαγωγή στη θεωρία της σκέδασης	7
1.2.1 Ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης	9
1.3 Μαθηματική περιγραφή φαινομένου σκέδασης	10
1.4 Αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης	12
1.4.1 Method of moments ή Μέθοδος ροπών	13
1.4.2 Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών.....	14
Κεφάλαιο 2ο: Η μέθοδος των βοηθητικών πηγών στα προβλήματα σκέδασης	15
2.1 Χαρακτηριστικά της μεθόδου Βοηθητικών πηγών	16
2.2 Περιορισμοί μεθόδου	17
2.3 Περιγραφή της μεθόδου	17
2.4 Εφαρμογή της MAS	18
2.5 Οριακές συνθήκες	21
2.6 Προτάσεις για την επιλογή τοποθεσίας Βοηθητικών πηγών.....	22
2.7 Κατανομή τύπου βοηθητικών πηγών	24
2.7.1 Επιλογή τύπου βοηθητικών πηγών	25
2.7.2 Κατανομή βοηθητικών Πηγών.....	26
Κεφάλαιο 3ο: Η εφαρμογή της μεθόδου στο πρόβλημα κυλίνδρου	28
3.1 Σκέδαση από Τέλεια Αγωγίμο Κυκλικό Κύλινδρο	28
3.2 Παραδείγματα προβλημάτων MAS.....	29
3.3 Πρόβλημα ζεύγους κυλίνδρων.....	33
Κεφάλαιο 4ο: Ο κώδικας του Matlab και η πλήρης ανάλυση του.....	37
Κεφάλαιο 5ο: Συμπεράσματα Χρονικά και απόδοσης της μεθόδου.....	46
5.1 Υπολογισμός στα ενδιάμεσα σημεία παρατήρησης.....	51
5.2 Ανάλυση και σχολιασμός παραδειγμάτων.	56

Επίλογος	68
Παράρτημα.....	69
Βιβλιογραφία	73

Κεφάλαιο 1ο: Εισαγωγή στις έννοιες της ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης

Γενικά ισχύει ότι η ύλη πέρα από την υπόσταση της, δηλώνει και την κατάσταση της, με τη μορφή δυνάμεων. Η ύπαρξη της ύλης συνεπάγεται και την ύπαρξη βαρύτητας. Η ύλη αποτελείται από άτομα, καθένα από τα οποία αποτελείται από ηλεκτρόνια με αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο, πρωτόνια με θετικό φορτίο και νετρόνια χωρίς φορτίο. Τα φορτία είναι πηγές του ηλεκτρικού πεδίου και όταν αυτά κινούνται δημιουργούν και μαγνητικό πεδίο. Αυτό το πεδίο εκπέμπει ενέργεια. Η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια λέγεται και ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Η ενέργεια αυτή έχει ταλανίσει πολλούς επιστήμονες εδώ και αιώνες. Εμφανίζεται με τη μορφή συχνότητας $f (f \in (0, \infty))$. Όσο πιο χαμηλή είναι η συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, τόσο πιο εμφανής είναι ο κυματικός χαρακτήρας και τόσο πιο ευδιάκριτα μεταξύ τους το ηλεκτρικό \vec{E} και μαγνητικό πεδίο \vec{H} . Στις πολύ υψηλές συχνότητες δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε τα δύο πεδία. Μάλλον δημιουργείται ένα «πακέτο ενέργειας». Αυτή η διπλή συμπεριφορά της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας είναι μια διαρκής πρόκληση για τους επιστήμονες. Τα κυματικά προβλήματα διακρίνονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες:

Προβλήματα διάδοσης, ακτινοβολίας, και σκέδασης.

Στα προβλήματα σκέδασης το πεδίο δηλαδή ο χώρος παρουσιάζει ανομοιογένεια και οι ορισμένες μεταβολές των χαρακτηριστικών του επηρεάζουν και διαταράσσουν τη διάδοση των κυματικών πεδίων.

1.1 Εξισώσεις Maxwell

Σύμφωνα με τις σύγχρονες θεωρίες της φυσικής όταν υπάρχει μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει ταυτόχρονα και μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο και αντίστοιχα όταν υπάρχει μαγνητικό υπάρχει και ηλεκτρικό. Αυτό το περιγράφει η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell. Η θεωρητική θεμελίωση διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στηρίζεται στις εξισώσεις του James Clerk Maxwell. Απουσία ρευμάτων και φορτιών οι εξισώσεις Maxwell προβλέπουν:

$$\nabla \times H(r, t) = J(r, t) + \varepsilon(r) \frac{\partial D(r, t)}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times E(r, t) = -\frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot D(r, t) = \rho(r, t) \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot B(r, t) = 0 \quad (1.4)$$

Αυτές οι εξισώσεις αποτελούν το υπόβαθρο για όλα τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Το αποτέλεσμα των εξισώσεων είχαν καταλυτική σημασία για την εξέλιξη της φυσικής. Μια από τις εξισώσεις Maxwell -ο νόμος Ampere- προέβλεψε ότι ένα ηλεκτρικό πεδίο που μεταβάλλεται ως προς το χρόνο παράγει μαγνητικό πεδίο. Αυτά οδήγησαν τον Maxwell στο να διατυπώσει την υπόθεση για την ύπαρξη του ρεύματος μετατόπισης, που αποτελεί καινούργια πηγή μαγνητικού πεδίου. Ο Maxwell έδωσε το συνδετικό κρίκο που ένωσε το ηλεκτρικό με το μαγνητικό πεδίο. Η θεωρία του προέβλεψε την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα φωτός. Η πρόβλεψη επαληθεύτηκε πειραματικά από τον Hertz, ο πρώτος που παρήγαγε και ανίχνευσε ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Η ανακάλυψη αυτή οδήγησε στον σημερινό πληθωρικό τρόπο ζωής με τη ραδιοφωνία, την τηλεόραση, τα ραντάρ και τις δορυφορικές ζεύξεις. Ο Maxwell δεν ένωσε μόνο ηλεκτρισμό με μαγνητισμό αλλά αποκάλυψε ότι το φως είναι μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δημιουργούνται από επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία. Τα εκπεμπόμενα κύματα δεν είναι τίποτε άλλο παρά ταλαντευμένα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους και ταυτοχρόνως, κάθετα προς τη κατεύθυνση διάδοσης της κυματικής διαταραχής. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια.

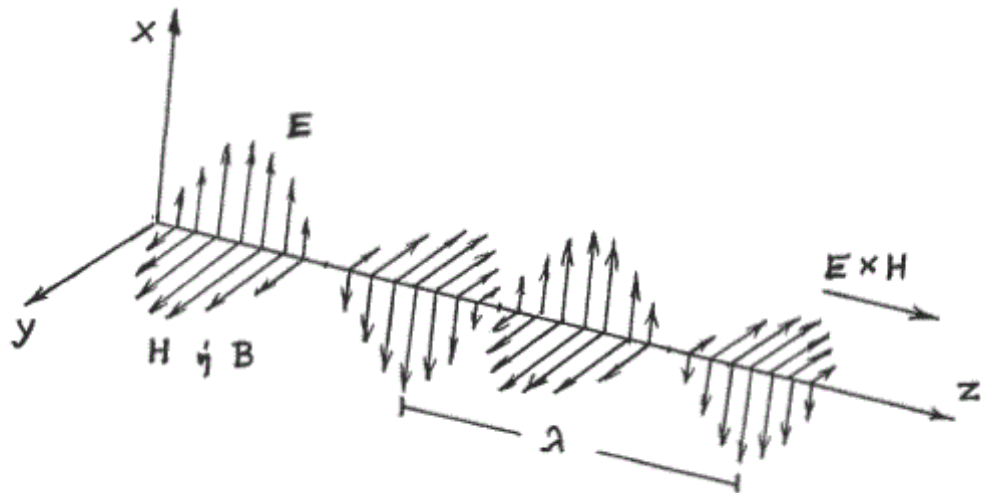


Figure 1.1 Ηλεκτρικά και μαγνητικά κύματα

Οι εξισώσεις Maxwell περιγράφουν πως δημιουργούνται και παράλληλα πως αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Η αλληλεπίδραση των κυμάτων δημιουργεί πολλές φορές τύπους σκέδασης, που έχουν εξάρτηση από το μήκος κύματος και το μέγεθος των σωματιδίων.

1.2 Εισαγωγή στη θεωρία της σκέδασης

Όταν το φως πέφτει πάνω σε υλικό, το υλικό θα το αφήσει να συνεχίσει ευθύγραμμα, αλλά παράλληλα επανεκπέμπεται προς όλες τις διευθύνσεις. Αυτή η συμπεριφορά ονομάζεται σκέδαση. Η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι αρκετά συνηθισμένη στα ραδιοκύματα (π.χ. ραντάρ) και στο ορατό φως. Μαζί με την απορρόφηση αποτελούν τις δύο φυσικές διαδικασίες οι οποίες είναι υπεύθυνες για ότι βλέπουμε, π.χ. λευκά σώματα σκεδάζουν όλα τα μήκη κύματος χωρίς να απορροφούν κανένα.

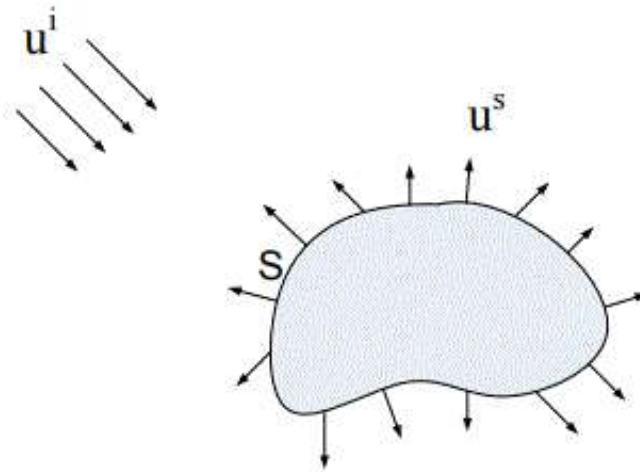


Figure 1.2 Προσομοίωση σκέδασης

Η θεωρία σκέδασης ασχολείται με το αποτέλεσμα που έχει ένα μη ομογενές μέσο σε ένα προσπίπτον σωματίδιο ή κύμα. Αν το συνολικό πεδίο θεωρηθεί το άθροισμα του προσπίπτοντος πεδίου u^i και του σκεδαζόμενου u^s , όπως αυτά ορίζονται στο σχήμα (1.2) τότε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι ο καθορισμός u^s από την γνώση του u^i και των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν την κυματική διάδοση, ενώ το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης είναι η περιγραφή της ανομοιογένειας του μέσου από την ασυμπτωτική συμπεριφορά του.

Σε προβλήματα προσομοίωσης προβλημάτων σκέδασης, υπάρχει μεγάλη ποικιλία αριθμητικών και αναλυτικών μεθόδων. Υπάρχουν διαφορετικές τεχνικές για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων. Για παράδειγμα, οι αναλυτικές βασίζονται σε θεωρίες όπως αυτές των Mie, Rayleigh, της ανώμαλης διάθλασης και οπτικής.

Απεναντίας, οι αριθμητικές προσεγγίσεις, όπως η μέθοδος των ροπών (MOM), η μέθοδος των οριακών στοιχείων (BEM), οι μέθοδοι επιφανειακών και χωρικών ολοκληρωτικών εξισώσεων, η μέθοδος των βοηθητικών πηγών κ.α. Ύστερα από δεκαετίες ερευνών, έχουν προταθεί αρκετές προσεγγίσεις επίλυσης για κάθε πρόβλημα, κάθε μία από αυτές έχει τα δικά της πλεονεκτήματα και περιορισμούς, σε διαφορετικό τύπο θέματος επάνω σε προβλήματα σκέδασης.

1.2.1 Ευθύ και αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης

Από μαθηματική άποψη, ως ευθύ πρόβλημα σκέδασης ορίζεται το πρόβλημα στο οποίο τόσο το σχήμα και οι φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή επομένως και οι συνοριακές συνθήκες είναι γνωστά, όσο και η μορφή του προσπίπτοντος κύματος είναι γνωστά και ζητείται ο προσδιορισμός του σκεδασμένου πεδίου. Μέσω των κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων καταλήγουμε σε μια ολοκληρωτική εξίσωση, η οποία μπορεί να λυθεί με διάφορες αριθμητικές μεθόδους

Στο αντίστροφο πρόβλημα συνήθως γίνεται αναζήτηση πληροφοριών για τις φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες. Συνήθως, πρέπει να καθοριστεί το σχήμα του σκεδαστή ή κάποιες ιδιότητες του υλικού. Το σκεδαζόμενο και προσπίπτον κυματικό πεδίο είναι γνωστά. Εφόσον οι τιμές που παίρνει το σκεδαζόμενο κύμα είναι γνωστές σε κάποια απόσταση, θα επιλυθούν οι κατάλληλες διαφορικές εξισώσεις αριθμητικά. Το αντίστροφο πρόβλημα παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον από μαθηματική σκοπιά καθώς είναι μη γραμμικό, πράγμα που δυσκολεύει πολύ την εύρεση της λύσης.

1.3 Μαθηματική περιγραφή φαινομένου σκέδασης

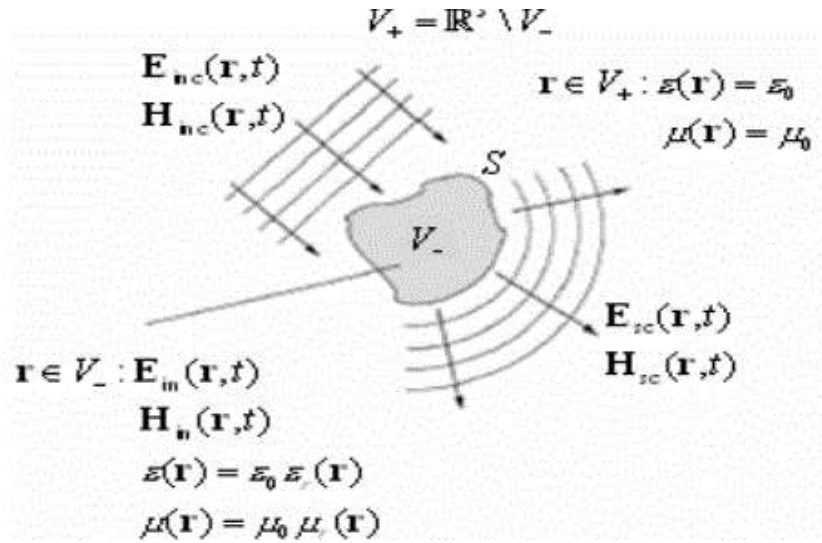


Figure 1.3 Μαθηματική περιγραφή σκέδασης

Στο σχήμα 1.3 αναπαρίσταται το γενικό ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα σκέδασης. Το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έντασης ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου E_{inc} , H_{inc} αντίστοιχα αλληλοεπιδρά με τον σκεδαστή που καταλαμβάνει την περιοχή V_- στον τρισδιάστατο πραγματικό χώρο. Τα συνολικά πεδία, στην εξωτερική περιοχή V_- στον τρισδιάστατο πραγματικό χώρο. Τα συνολικά πεδία στην εξωτερική περιοχή $V_+ = R^3 \setminus V_-$ ισούνται με το άθροισμα των προσπιπτόντων και των σκεδαζόμενων πεδίων E_{sc} , H_{sc} .

$$E_{total} = E_{inc} + E_{sc} \quad (1.5)$$

$$H_{total} = H_{inc} + H_{sc} \quad (1.6)$$

Το πρόβλημα σκέδασης συνίσταται στον προσδιορισμό των άγνωστων σκεδαζόμενων πεδίων και των πεδίων (E_{in}, H_{in}) στην περιοχή V_- , στο εσωτερικό του σκεδαστή. Η αρχή των αξόνων στο σύστημα συντεταγμένων συνήθως επιλέγεται να είναι ένα εσωτερικό σημείο της περιοχής V_- . Για τον προσδιορισμό των άγνωστων πεδίων, θα πρέπει να επιλυθούν οι εξισώσεις του Maxwell, που παρουσιάστηκαν στην εισαγωγή:

$$\nabla \times H(r, t) = J(r, t) + \frac{\partial D(r, t)}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\nabla \times E(r, t) = -\frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot D(r, t) = \rho(r, t) \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot B(r, t) = 0 \quad (1.10)$$

όπου $\nabla \times$ και $\nabla \cdot$ είναι οι τελεστές στροφής και απόκλισης αντίστοιχα, J είναι η πυκνότητα του ρεύματος στο σημείο του χώρου r , την χρονική στιγμή t , ρ είναι η πυκνότητα φορτίου, D είναι το διάνυσμα της διηλεκτρικής μετατόπισης και B είναι το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής. Θεωρώντας στην περίπτωση μας ότι δεν υπάρχουν πηγές στον χώρο για κάθε χρονική στιγμή t , έχουμε $J=0$ και $\rho=0$. Για τον καθορισμό των πεδίων είναι απαραίτητη η γνώση των ηλεκτρικών και μαγνητικών ιδιοτήτων των υλικών μέσων. Για σχετικά χαμηλές εντάσεις ισχύουν οι συντακτικές σχέσεις:

$$D(r, t) = \varepsilon(r)E(r, t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(r)E(r, t) \quad (1.11)$$

$$B(r, t) = \mu(r)H(r, t) = \mu_0 \mu_r(r)H(r, t) \quad (1.12)$$

όπου ε η διηλεκτρική επιτρεπτότητα και μ η μαγνητική διαπερατότητα του υλικού μέσου, ε_0 και μ_0 οι τιμές τους στο κενό, ενώ οι σχετικές τιμές τους ε_r και μ_r είναι βαθμωτά μεγέθη για ισοτροπικά υλικά και τανυστές για ανισοτροπικά υλικά.

Οι εξισώσεις (1.9)- (1.12) αποτελούν ένα υπερπροσδιορισμένο σύστημα 8 εξισώσεων με 6 άγνωστες πεδιακές συνιστώσες. Χρησιμοποιώντας τον τελεστή στροφής $\nabla \times$ στην εξίσωση (1.10) προκύπτει:

$$\nabla \times \nabla \times E(r, t) = -\varepsilon(r)\mu(r) \frac{\partial^2 E(r, t)}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

και χρησιμοποιώντας της διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \times \nabla \times E(r, t) = \nabla(\nabla \cdot E(r, t)) - \nabla^2 \cdot E(r, t) \quad (1.14)$$

Με

$$\nabla \cdot E(r, t) = 0 \quad (1.15)$$

καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο:

$$-\nabla^2 E(r, t) + \frac{\varepsilon_r \mu_r(r)}{c^2} \frac{\partial^2 E(r, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.16)$$

όπου η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. Υποθέτοντας αρμονική χρονική μεταβολή για τα πεδία $E(r, t) \exp(j\omega t)$, $f = \omega/2\pi$, f η συχνότητα ταλάντωσης του πεδίου, καταλήγουμε στην κυματική εξίσωση Helmholtz για το ηλεκτρικό πεδίο όπου:

$$[\nabla^2 + k^2(r)]E(r) = 0 \quad (1.17)$$

όπου

$$k^2(r) = \omega^2 \varepsilon_r(\mu) \mu(r) / c^2 \quad (1.18)$$

Ανάλογα προκύπτει και η κυματική εξίσωση Helmholtz για το μαγνητικό πεδίο:

$$[\nabla^2 + k^2(r)]H(r) = 0 \quad (1.19)$$

Η διανυσματική εξίσωση Helmholtz είναι μια ελλειπτική διαφορική εξίσωση η οποία επιλύεται εφαρμόζοντας τις κατάλληλες οριακές συνθήκες. Συγκεκριμένα οι εφαπτομενικές συνιστώσες των συνολικών πεδίων πρέπει να είναι συνεχείς στην συνοριακή επιφάνεια S μεταξύ V_- και V_+ . Επίσης πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας, δηλαδή οι εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου πρέπει να τείνουν προς το μηδέν όταν η απόσταση r από την αρχή των αξόνων τείνει στο άπειρο, έχοντας συμπεριφορά ανάλογη του $1/r$.

1.4 Αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση προβλημάτων σκέδασης

Η σκέδαση αποτελεί σημαντικό πεδίο έρευνας τα τελευταία χρόνια. Μελετάται ως φαινόμενο κυρίως από τις επιστήμες της φυσικής και τις οπτικής. Η μελέτη τέτοιου τύπου προβλημάτων, με χρήση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων αποτελεί σήμερα ένα βασικό πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Πλήθος επιστημών έχουν επωφεληθεί από τη μελέτη του φαινομένου. Στην οπτική, σε προβλήματα ραδιοεντοπισμού, στην μετεωρολογία, στην βιοατρική είναι μόνο κάποια παραδείγματα. Είναι σημαντικό για πολλές εφαρμογές να γίνουν κατανοητά τα αποτελέσματα αυτά για τη βελτίωση του βιοτικού επιπέδου. Όταν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό, η διάδοση του γίνεται χωρίς απώλειες. Στην πραγματικότητα, η τροπόσφαιρα, η ιονόσφαιρα επηρεάζουν τον τρόπο διάδοσης τους. Παράλληλα, η επιφάνεια στην οποία γίνεται μελέτη παίζει καθοριστικό ρόλο, μπορεί να είναι ομαλή και ανώμαλη ανακλαστική επιφάνεια. Επιπλέον περιορισμοί δημιουργούνται και από άλλου τύπου παράγοντες όπως το σχήμα, ηλεκτρικά χαρακτηριστικά του σώματος ή των σωμάτων στο οποίο θα προσπέσει κτλ. Στόχος της μελέτης της σκέδασης, είναι η εύρεση εναλλακτικών πεδίων σκέδασης σε κάθε εμφανή - διακριτή περιοχή του χώρου με δεδομένο το προσπίπτον πεδίο. Όπως προαναφέρθηκε, κάθε επιφάνεια αντιμετωπίζει κάποιες ιδιαιτερότητες στη μελέτη της. Η σκέδαση του κυλίνδρου, που μελετάται σε αυτή την εργασία, είναι αρκετά πολύπλοκη για να μελετηθεί. Για να γίνει η μελέτη απλούστερη μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες μέθοδοι.

Στο παρελθόν ο σχεδιασμός ηλεκτρομαγνητικών δομών γινόταν κατά κάριο λόγο πειραματικά. Έπειτα, αναπτύχθηκαν οι γλώσσες προγραμματισμού και κατά αυτόν τον

τρόπο ξεκίνησε μία νέα προσπάθεια προσεγγιστικού υπολογισμού αναλυτικών λύσεων των ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων. Αυτό οδήγησε στον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό. Έτσι για πλήθος μεθόδων, όπως η μέθοδος ροπών (mom) , η μέθοδος των βοηθητικών πηγών (MAS) δημιουργήθηκαν προγράμματα που καθιστούν την επίλυση τέτοιων προβλημάτων εύκολη. Με τη ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας αυξάνεται ο αριθμός προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν καθώς και η πολυπλοκότητα των προβλημάτων αυτών.

1.4.1 Method of moments ή Μέθοδος ροπών

Πρόκειται για μια μαθηματική τεχνική, η οποία χρησιμοποιείται για να μετατρέψει τις ολοκληρωμένες εξισώσεις, εξισώσεις δηλαδή που λύνονται με την απαραίτητη χρήση ολοκληρωμάτων, σε γραμμικά συστήματα τα οποία μπορούν να λυθούν αριθμητικά χρησιμοποιώντας μια αριθμομηχανή, ή πιο εξειδικευμένα, έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή. $F(g)=h$

όπου F είναι ένα γνωστός γραμμικός τελεστής, μπορεί να είναι ένας ολοκληρωτικός ή ολοκληρωτικός διαφορικός (για ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα) τελεστής, h είναι μία γνωστή συνάρτηση διέγερσης και g η συνάρτηση απόκρισης.

Είναι ουσιαστικά μία προβολική μέθοδος. Για να λυθεί ένα ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα με τη βοήθεια της, πρέπει πρώτα να εκφραστεί το άγνωστο μέγεθος του προβλήματος σαν ένας γραμμικός συνδυασμός των κατάλληλων συναρτήσεων βάσης. Δηλαδή, το βασικό πρόβλημα είναι να αναλυθεί άγνωστη ποσότητα χρησιμοποιώντας ένα σύνολο γνωστών συναρτήσεων με άγνωστους συντελεστές. Έπειτα, να μετατραπεί η προκύπτουσα εξίσωση σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων, κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών. Κατά τον υπολογισμό σύνθετων προβλημάτων με τη χρήση συναρτήσεων βάρους, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις κατά τις οποίες οι υπολογισμοί απαιτούν αρκετό χρόνο. Υπάρχει όμως ένα μοναδικό σύνολο συναρτήσεων βάρους που μειώνουν τον απαιτούμενο αριθμό ολοκληρώσεων. Αυτές είναι οι συναρτήσεις δέλτα του Dirac που ουσιαστικά αποτελεί πρότυπο εξέλιξης της μεθόδου.

Υπάρχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα όταν γίνεται χρήση αυτής της μεθόδου. Ένα θετικό χαρακτηριστικό προκύπτει όταν γίνεται υπολογισμός των στοιχείων των μητρών, καθώς δεν απαιτείται επιπλέον υπολογισμός ολοκληρώματος για τη συνάρτηση βάρους, διευκολύνοντας έτσι την επίλυση. Σημαντικό μειονέκτημα,

αποτελεί το γεγονός ότι οι συνοριακές συνθήκες αντιστοιχίζονται μόνο σε διακριτές περιοχές της επίλυσης. Παρόλα αυτά, η μέθοδος, χρησιμοποιείται συχνά.

1.4.2 Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών

Μέσω τις μεθόδου βοηθητικών πηγών, τοποθετούνται εικονικά σημεία εντός της γεωμετρίας ενδιαφέροντος. Εν συνέχεια γίνεται ανάλυση των επιμέρους εξισώσεων που αφορούν τις ιδιότητες του υλικού. Η τοποθέτηση παίζει καθοριστικό ρόλο για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Μπορεί να υπολογιστεί μετά από απαιτητικές μαθηματικές πράξεις καθώς και προσεγγιστικά αν πρόκειται για κάποια μελέτη εύκολης γεωμετρίας. Εφαρμόζεται κυρίως σε προβλήματα σκέδασης σε κλειστά σώματα και περιοδικές επιφάνειες καθώς επίσης και σε προβλήματα αντίστροφης σκέδασης. Η MAS ανήκει στην οικογένεια αναλυτικών μεθόδων γιατί οι λύσεις της εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί. Σε πρώτο χρόνο γίνεται επίλυση γραμμικών συνδυασμών των ολοκληρωτικών εξισώσεων του εκάστοτε υλικού χωρίς υπολογισμό των επιμέρους οριακών συνθηκών. Οπότε ικανοποιούν επακριβώς της εξισώσεις Maxwell. Κατ' επέκταση επιβάλλεται μετά η επίλυση οριακών συνθηκών, η ικανοποίηση των σχέσεων όμως γίνεται προσεγγιστικά.

Πολλές εφαρμογές της μεθόδου MAS σε προβλήματα σκέδασης κατέδειξαν τα πλεονεκτήματα και οφέλη της τεχνικής, σε σύγκριση με τη μέθοδο των ροπών. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό αφού η μέθοδος αυτή προσφέρει απλότητα και ευκολία στους υπολογισμούς.

Η μέθοδος των βοηθητικών πηγών είναι αριθμητική μέθοδος όπου συνιστάται για τον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό. Είναι κατάλληλη για την επίλυση συνοριακών προβλημάτων. Αποτελεί καλή εναλλακτική της μεθόδου ολοκληρωτικών εξισώσεων και της μεθόδου των ροπών. Σε σχέση με τις προαναφερθείσες μεθοδολογίες υπερτερεί σε θέματα ευστάθειας, υπολογιστικής ακρίβειας και ταυτόχρονα σε ευκολία εκτέλεσης. Για αυτό κρίθηκε κατάλληλη για τη μελέτη της παρούσας γεωμετρίας.

Κεφάλαιο 2ο: Η μέθοδος των βοηθητικών πηγών στα προβλήματα σκέδασης

Η MAS έχει αναπτυχθεί για τη μελέτη προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων που εμπλέκονται σώματα που αποτελούνται τουλάχιστον κατά περιοχές από γραμμικά ομοιογενή ιστροπικά υλικά μέσα. Παρόλο το γεγονός αυτό οι κατηγορίες προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν με την εφαρμογή της MAS παρουσιάζουν μεγάλο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον καθώς σχετίζονται με πλήθος επιστημονικών κλάδων και εφαρμογών. Είναι γνωστό από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία ότι οι σχετικές οριακές συνθήκες εμπλέκουν πολλά διαφορετικά μεγέθη. Για τον προσδιορισμό των μεγεθών αρκεί η επίλυση του υποσυνόλου των εξισώσεων οριακών συνθηκών. Όταν οι λύσεις που προκύπτουν ικανοποιούν τις εξισώσεις του υποσυνόλου, τότε αυτόματα ικανοποιούν και όλες τις εξισώσεις των αντίστοιχων οριακών συνθηκών. Όταν όμως αναφερόμαστε σε λύσεις προσεγγιστικές των αριθμητικών μεθόδων η ποιότητα των λύσεων εξαρτάται και από την επίλυση πρωτογενών μεγεθών ως προς τα οποία αναλύονται οι εξισώσεις του προβλήματος αλλά και από το συνδυασμό εξισώσεων οριακών συνθηκών.

Αντίθετα οι προσεγγιστικές λύσεις που προκύπτουν από αριθμητικές μεθόδους δεν ικανοποιούν ταυτόχρονα όλες τις εξισώσεις του Maxwell και τις οριακές συνθήκες, οπότε η ποιότητα των λύσεων εξαρτάται όχι μόνο από την επίλυση πρωτογενών μεγεθών ως προς τα οποία καταστρώνονται οι εξισώσεις του προβλήματος αλλά και από το συνδυασμό εξισώσεων και οριακών συνθηκών.

Η κατάστροψη του προβλήματος οριακών συνθηκών στηρίζεται στην εφαρμογή των εξισώσεων Maxwell για κάθε περιοχή του χώρου, καθώς και των οριακών συνθηκών στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ γειτονικών περιοχών. Συνήθως τα εμπλεκόμενα μέσα θεωρούνται ως απλά (ομοιογενή, γραμμικά, ιστροπικά). Η παρουσία, ενίοτε, γενικευμένων μέσων (ανομοιογενών, ανιστροπικών, μη γραμμικών, κ.λπ.) σε μια διάταξη οδηγεί σε μαθηματικές περιπλοκές, οι οποίες αυξάνουν σημαντικά τον βαθμό δυσκολίας του προβλήματος.

Η ακριβής αναλυτική επίλυση τέτοιων προβλημάτων οριακών συνθηκών είναι δυνατή μόνο για μια ολιγομελή κατηγορία κανονικών γεωμετρικών διατάξεων. Για περισσότερο πολύπλοκες διατάξεις, η επιτυχής αντιμετώπιση θα πρέπει αναγκαστικά να στηριχθεί είτε σε καθαρά αριθμητικές είτε σε υβριδικές μεθόδους του

υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού. Υβριδικές μέθοδοι, είναι ο συνδυασμός τύπου μεθόδων, ένα παράδειγμα μπορεί να είναι ο συνδυασμός MAS και MOM .

2.1 Χαρακτηριστικά της μεθόδου Βοηθητικών πηγών

Στη μέθοδο των βοηθητικών πηγών, επιλέγονται σημεία προσεγγιστικά σε σχέση με το σημείο ενδιαφέροντος της επιφάνειας και επιλύονται οι αντίστοιχες εξισώσεις επάνω στα σημεία αυτά. Αντικαθιστώντας τις πραγματικές πηγές με άλλα σημεία, επιφανειακά ρεύματα με πεπερασμένο πλήθος εικονικών βοηθητικών πηγών οι οποίες βρίσκονται σε απόσταση από το πραγματικό σύνορο και ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες. Η MAS θεωρεί ότι το συνολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο προκαλείται από την υπέρθεση συνοριακών θεωρητικών πηγών. Οι πηγές επιλέγονται ώστε το συνολικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Θεωρεί ότι το σκεδαζόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο προκύπτει από τις βοηθητικές πηγές. Δεν έχει γεωμετρικούς περιορισμούς. Η επιλογή είναι καθοριστική. Οποιοδήποτε σύνολο βοηθητικών πηγών εντός δομής δημιουργεί χωρία που είναι αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων Maxwell. Οι τύποι βοηθητικών πηγών μπορούν να χρησιμοποιηθούν ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα. Η απλότητα της προσέγγισης αυτής της μεθόδου, έχει συντελέσει σημαντικά στην ευρύτητα της χρήσης τέτοιου είδους μεθόδων. Τα κύρια χαρακτηριστικά της αναλύονται παρακάτω:

- Δυνατότητα άμεσου ελέγχου σφαλμάτων οριακών συνθηκών στις επιφάνειες.
- Δεν υπάρχουν κανόνες για την κατανομή των θέσεων των βοηθητικών πηγών.
- Δεν υπάρχουν γενικοί κανόνες για την επιλογή του πλήθους πηγών.
- Ευκολία προσαρμογής σε μεγάλο εύρος προβλημάτων.
- Ευκολία υλοποίησης, όπου έγκειται στο γεγονός ότι ο προσδιορισμός των εξισώσεων προς επίλυση και τελικών είναι γνωστός και αφορά την περιγραφή του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου σε κάθε περιοχή.
- Οι επιμέρους συναρτήσεις υπολογίζονται σε βοηθητικές πηγές οι οποίες είναι τοποθετημένες σε θέσεις που απέχουν κάποια μη μηδενική απόσταση από τις συνοριακές επιφάνειες του προβλήματος.

2.2 Περιορισμοί μεθόδου

Η εφαρμογή της μεθόδου των βοηθητικών πηγών (MAS) υπερτερεί σε σχέση με τη μέθοδο των ροπών (MOM). Αν ληφθεί υπόψη, η απλότητα των υπολογισμών, έχει αποδειχθεί ότι η μέθοδος των Βοηθητικών Πηγών μπορεί να είναι περισσότερο αποτελεσματική από τη MOM. Παρόλα αυτά, η MAS είναι γενικά λιγότερο ισχυρή από μία τεχνική της μεθόδου ροπών, λόγω της περίφημης ασάφειας που σχετίζεται με τη θέση των ΒΠ. Έχει παρατηρηθεί, αν και σπάνια αναφέρεται στη βιβλιογραφία, ότι αν είναι ανεπιτυχής η επιλογή των θέσεων των βοηθητικών πηγών μπορεί να οδηγήσει σε κακή ακρίβεια, χαμηλή αποδοτικότητα ή ακόμη και πλήρη αποτυχία της μεθόδου. Μέχρι τώρα, έχουν προταθεί πολύ λίγα κριτήρια σχετικά με τον ορθό προσδιορισμό της θέσης των ΒΠ. Ένας γενικός κανόνας είναι ότι οι πηγές πρέπει να περικλείουν τις ιδιάζουσες θέσεις του πεδίου. Δυστυχώς, αυτός ο κανόνας είναι κυρίως θεωρητικός δεδομένου ότι σε μια γενική γεωμετρία σκέδασης, οι θέσεις του πεδίου δεν είναι γνωστές. Επιπλέον η MAS τείνει να συμπεριφέρεται με απρόβλεπτο τρόπο, αποδίδοντας αναξιόπιστα αποτελέσματα για συγκεκριμένες τοποθεσίες των πηγών, χωρίς να προκύπτουν σαφείς εξηγήσεις. Επίσης, η πλήρης αποτυχία είναι που παρατηρείται συνήθως για έναν πολύ μεγάλο αριθμό άγνωστων, αντίθετα με τη βασική θεωρία. Παρόλο που αυτή η συμπεριφορά έχει εξηγηθεί εν μέρει για την εφαρμογή του MAS σε στατικά προβλήματα (εξίσωση Laplace), οι περισσότεροι σχετιζόμενοι επιστήμονες υποστηρίζουν πως δεν υπάρχει παρόμοια μαθηματική ανάλυση στη βιβλιογραφία για την εξίσωση Helmholtz. Δεδομένης της κακής κατανόησης της συμπεριφοράς του MAS στο προβλήματα, μια αυστηρή αξιολόγηση της ακρίβειάς του και της η σταθερότητα είναι απολύτως απαραίτητη.

2.3 Περιγραφή της μεθόδου

Η κεντρική ιδέα είναι η αντικατάσταση των πραγματικών πηγών του πεδίου πάνω στις συνοριακές επιφάνειες (επιφανειακά ρεύματα) με πεπερασμένο πλήθος βοηθητικών πηγών, οι οποίες βρίσκονται σε απόσταση από το πραγματικό σύνορο και ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες του πραγματικού προβλήματος σε πεπερασμένα σημεία, που ονομάζονται σημεία παρατήρησης. Το πρώτο και βασικότερο βήμα κατάστρωσης της μεθόδου MAS είναι η επιλογή των Βοηθητικών Πηγών (ΒΠ, Auxiliary Sources) για το

εκάστοτε μοντέλο. Στην κλασική μορφή της μεθόδου οι ΒΠ επιλέγονται έτσι, ώστε να ικανοποιούν εγγενώς την κυματική εξίσωση του προσπίπτοντος πεδίου, στην εκάστοτε περιοχή.

2.4 Εφαρμογή της MAS

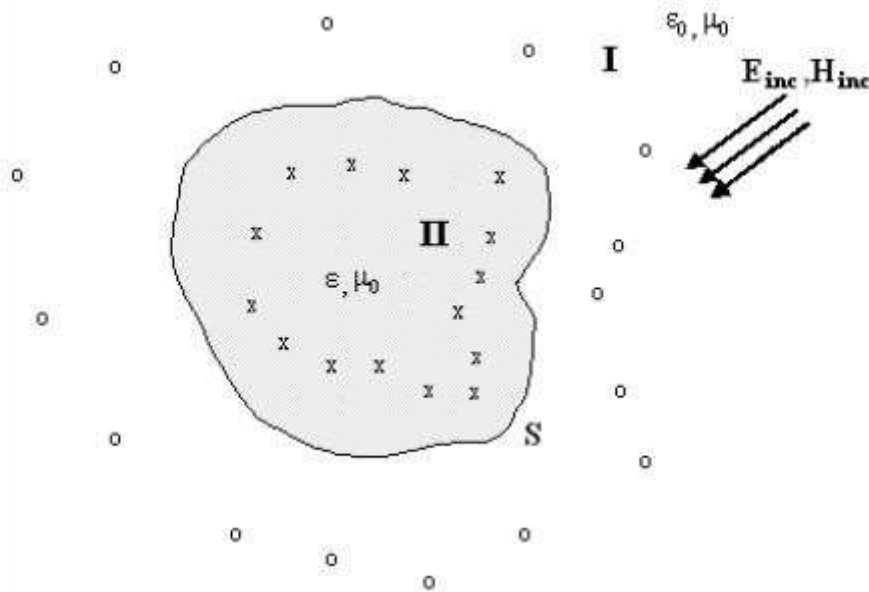


Figure 2.1 Αρχή εφαρμογής της MAS

Στο σχήμα 2.1 βλέπουμε την αρχή εφαρμογής της MAS για τη γενική περίπτωση σκέδασης από ομογενή διηλεκτρικό σκεδαστή. Με 'x' αναπαρίστανται οι βοηθητικές πηγές που βρίσκονται στην περιοχή II και προσομοιώνουν τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία στην περιοχή I, ενώ με 'o' αναπαρίστανται οι βοηθητικές πηγές που βρίσκονται στην περιοχή I και προσομοιώνουν τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία στην περιοχή II. Οι βοηθητικές πηγές θεωρείται ότι ακτινοβολούν απουσία του σκεδαστή και εντός άπειρου ομογενούς χώρου που αποτελείται από το υλικό της περιοχής που προσομοιώνουν.

Η MAS στηρίζεται στην προσέγγιση των άγνωστων πεδιακών κατανομών με τη βοήθεια γραμμικών συνδυασμών αναλυτικά γνωστών πεδιακών συναρτήσεων. Εφαρμόζεται ουσιαστικά στο πεδίο της συχνότητας και για αυτό το λόγο τα δυναμικά μεγέθη θεωρείται ότι διέπονται από αρμονική χρονική μεταβολή της μορφής $e^{i\omega t}$, η οποία απλοποιείται και συνεπώς δεν αναφέρεται ρητά στις εξισώσεις.

Στη γενική περίπτωση της διέγερσης ενός ομογενούς διηλεκτρικού σκεδαστή με διηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ και μαγνητική διαπερατότητα μ_0 από γνωστό προσπίπτον πεδίο (E_{inc} , H_{inc}), κατά την κατάστροση της MAS λύσης διακρίνονται δυο μη επικαλυπτόμενα χωρία. Το χωρίο I (Σχήμα 2.1) αποτελείται από τον κενό χώρο (με χαρακτηριστικά ϵ_0 και μ_0) που περιβάλλει τον σκεδαστή, ενώ το χωρίο II περικλείεται από την επιφάνεια S του σκεδαστή.

Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε κάθε χωρίο εκφράζονται ως υπερθέσεις των πεδίων των βοηθητικών πηγών που βρίσκονται στο έτερο χωρίο (ή στα χωρία που συνορεύουν στην γενικευμένη περίπτωση), με συντελεστές βάρους που προσδιορίζονται από την εφαρμογή των οριακών συνθηκών στην συνοριακή επιφάνεια S (ή στο σύνολο των συνοριακών επιφανειών του χωρίου στην γενικευμένη περίπτωση). Κατά αυτόν τον τρόπο τα σκεδαζόμενα πεδία στην περιοχή I προσεγγίζονται από το σύνολο των βοηθητικών πηγών, που περικλείονται από την S και οι οποίες θεωρείται ότι ακτινοβολούν σε άπειρο κενό χώρο, απουσία του σκεδαστή. Η ένταση του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού E_{sc} ή μαγνητικού H_{sc} πεδίου προκύπτει:

$$\vec{E}_{sc} = \sum_n E_n^{s1} = \sum_n F_{E,n}^{S1} \alpha_{E,n}^{s1} \quad (2.1)$$

$$\vec{H}_{sc} = \sum_n H_n^{s1} = \sum_n F_{H,n}^{S1} \alpha_{E,n}^{s1} \quad (2.2)$$

και στη συνέχεια για τα συνολικά πεδία (E_I , H_I) στην περιοχή I ισχύει :

$$E_1 = E_{inc} + E_{sc} \quad (2.3)$$

$$H_1 = H_{inc} + H_{sc} \quad (2.4)$$

Από την άλλη μεριά τα πεδία εντός του σκεδαστή προσομοιώνονται από το δεύτερο σύνολο των βοηθητικών πηγών (σύνολο S_2) που βρίσκονται εκτός του σώματος του σκεδαστή, οι οποίες θεωρείται ότι ακτινοβολούν σε άπειρο χώρο με τις ιδιότητες του υλικού του διηλεκτρικού σκεδαστή, απουσία του σκεδαστή. Η ένταση του ηλεκτρικού E_{II} και μαγνητικού H_{II} πεδίου στην περιοχή II προκύπτει:

$$\vec{E}_{sc} = \sum_n E_n^{s2} = \sum_n F_{E,n}^{S2} \alpha_{E,n}^{s2} \quad (2.5)$$

$$\vec{H}_{sc} = \sum_n H_n^{s2} = \sum_n F_{H,n}^{S2} \alpha_{E,n}^{s2} \quad (2.6)$$

Στις σχέσεις (2.1) έως (2.6), E_n^s είναι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο και H_n^s μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα της n -οστής πηγής του εκάστοτε συνόλου των βοηθητικών πηγών (i : 1 ή 2), $F_{E,n} F_{H,n}^s$ είναι οι συναρτήσεις βάσης που αντιστοιχούν στο ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα της n -ιοστής πηγής του εκάστοτε συνόλου των βοηθητικών

πηγών και $a_{H,n}^s$ είναι οι συναρτήσεις βάρους που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις βάσης του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα n-ιοστής πηγής του εκάστοτε συνόλου των βοηθητικών πηγών.

Στην γενική περίπτωση, τα αναπτύγματα για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο (σχέσεις (2.1), (2.2) ή (2.5), (2.6)) δύναται να είναι τελείως ανεξάρτητα μεταξύ τους. Κάθε πεδιακή συνιστώσα μπορεί να προσεγγιστεί είτε απευθείας, χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα, είτε να υπολογιστεί δευτερογενώς από άλλες πεδιακές συνιστώσες.

Στην προκειμένη περίπτωση όπως και στις περισσότερες εφαρμογές, για πρακτικούς λόγους, επιλέγεται το ίδιο πλήθος των βοηθητικών πηγών n είναι κοινό με τα σημεία παρατήρησης. Επίσης οι συναρτήσεις βάσης F_n είναι γνωστές αναλυτικές λύσεις της κυματικής εξίσωσης (για παράδειγμα δυαδικές συναρτήσεις Green σε 3D προβλήματα) και οι άγνωστοι συντελεστές βάρους a_n μπορούν να τοποθετηθούν ως συνιστώσες σε διανύσματα. Στην απλούστερη εφαρμογή της MAS σε τέλεια αγωγίμους σκεδαστές (PEC – Perfectly Electric Conductors) χρησιμοποιείται ένα σύνολο βοηθητικών πηγών τοποθετημένο αυστηρά εντός του σώματος του PEC. Οι βοηθητικές πηγές θεωρείται ότι ακτινοβολούν, απουσία του PEC, σε έναν άπειρο, ομογενή, ιστροπικό χώρο με τις υλικές ιδιότητες του χώρου που περιβάλλει ο PEC. Η ανάπτυξη τις MAS λύσης γίνεται χρησιμοποιώντας κατάλληλες εξισώσεις σε πλήρη αναλογία με τις σχέσεις (2.1) έως (2.6). Είναι ευρέως γνωστό ότι η μελέτη και η επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων βασίζεται στην επίλυση εξισώσεων Maxwell και των οριακών συνθηκών. Η MAS είναι αριθμητική μέθοδος που έχει θεμελιωθεί εδώ και αρκετές δεκαετίες. Βασίζεται στην ανάλυση αγνώστων HM πεδίων στις διακριτές περιοχές ενός HM προβλήματος συνοριακών τιμών σε γραμμικούς συνδυασμούς γνωστών συναρτήσεων που αποτελούν αναλυτικές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στην αντίστοιχη περιοχή. Οι όροι των αναπτυγμάτων - συναρτήσεις βάσης, αποδίδονται σε διακριτές βοηθητικές πηγές, οι οποίες είναι τοποθετημένες σε μη μηδενικές αποστάσεις από συνοριακές επιφάνειες. Υπάρχει δυνατότητα αλλαγής των θέσεων των βοηθητικών πηγών αξιοποιώντας αναλυτικές τεχνικές καθώς και ασυμπτωματικές τεχνικές για την επιτάχυνση της σύγκλισης και βελτίωση ακριβείας λύσεων. Οι άγνωστοι συντελεστές των αναπτυγμάτων οι οποίοι αντιστοιχούν στα ρεύματα βοηθητικών πηγών προσδιορίζονται από τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ή και κάθετων συνιστωσών του HM πεδίου σε διακριτά σημεία στις συνοριακές επιφάνειες.

2.5 Οριακές συνθήκες

Για τη μελέτη των στατικών και χρονικά μεταβαλλόμενων πεδίων δηλαδή των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, εξαιρετικά χρήσιμες είναι οι λεγόμενες οριακές συνθήκες ή συνοριακές συνθήκες. Όταν ένα ΗΜΚ περνά από ένα μέσο διάδοσης σε ένα άλλο τότε περνά από τα σύνορα που χωρίζουν αυτά τα μέσα. Συνήθως αναφέρονται ως διαχωριστική επιφάνεια. Σε αυτή τη διαχωριστική επιφάνεια επικρατούν ορισμένες συνθήκες κάτω από τις οποίες βρίσκονται τα πεδία E , H , D και B .

Μετά την επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων βάσης – βοηθητικών πηγών για την προσομοίωση του πεδίου, είναι απαραίτητη η ικανοποίηση των οριακών συνθηκών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου προκειμένου να κατασκευαστεί ένα σύστημα εξισώσεων για την εύρεση των άγνωστων ρευματικών συντελεστών. Επισημαίνεται ότι η συνθήκη ακτινοβολίας στο άπειρο ικανοποιείται αυτόματα από τις βοηθητικές πηγές που προσομοιώνουν το αντίστοιχο χωρίο. Στη συνοριακή επιφάνεια S μεταξύ των χωρίων I και II ισχύουν οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες:

$$\vec{n} \times E^I = \vec{n} \times E^{II} \quad (2.8)$$

$$\vec{n} \cdot \epsilon_r E^I = \vec{n} \cdot \epsilon_r E^{II} + \rho_o \quad (2.9)$$

$$\vec{n} \times H^I = \vec{n} \times H^{II} + j_o \quad (2.10)$$

$$\vec{n} \cdot \mu H^I = \vec{n} \cdot \mu H^{II} \quad (2.11)$$

όπου \vec{n} συμβολίζεται το μοναδιαίο κάθετο ως προς το σύνορο του σκεδαστή διάνυσμα το οποίο έχει φορά προς το εξωτερικό του σκεδαστή (ϵ_1, μ_1) και (ϵ_2, μ_2) είναι τα χαρακτηριστικά του υλικού από το οποίο αποτελείται το χωρίο 1 και το χωρίο 2 αντίστοιχα και ρ_o, j_o οι επιφανειακές κατανομές άγνωστων φορτίων και ρευμάτων στην ∂S αντίστοιχα, οι οποίες θεωρούνται αμφοτέρως μηδενικές. Πρέπει να σημειωθεί ότι η MAS προσέγγιση δεν έχει εφαρμογή εντός τέλει αγωγικών περιοχών στις οποίες το πεδίο μηδενίζεται.

Τέλος το άθροισμα τους είναι το ολικό κύμα και συμβολίζεται με E_{total} , H_{total} . Επομένως, στο χώρο R , για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο μετατόπισης ισχύουν οι σχέσεις:

$$E_{total} = E_{inc} + E_{SC} \quad (2.12)$$

$$H_{total} = H_{inc} + H_{SC} \quad (2.13)$$

Όσον αφορά το σύνορο του σκεδαστή τώρα, οι συνθήκες τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα χωρικά τμήματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου δηλαδή τα πεδία μετατόπισης E_r και H_r πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή ονομάζονται συνοριακές συνθήκες και εξαρτώνται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή.

2.6 Προτάσεις για την επιλογή τοποθεσίας Βοηθητικών πηγών

Στις αριθμητικές μεθόδους συναρτησιακής προσέγγισης, η επίτευξη της ζητούμενης ακρίβειας της λύσης επιχειρείται με την προσομοίωση του πεδίου με όσο το δυνατόν λιγότερες συναρτήσεις βάσης. Επιπλέον, συνήθως προτιμώνται συναρτήσεις βάσης οι οποίες έχουν ευελιξία εφαρμογής και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων. Τα τελευταία χρόνια η MAS και οι συναφείς υπολογιστικές τεχνικές θεωρούνται παρακλάδια των λεγόμενων Τεχνικών Γενικευμένων Πολυπόλων (Generalised Multipole Techniques – GMTs).

Στις μεθόδους GMT οι πιο διαδεδομένες συναρτήσεις βάσης είναι τα αναπτύγματα ηλεκτρομαγνητικών πεδίων σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες (multipoles-πολύπολα). Τα πολύπολα τοποθετούνται κατάλληλα, σε διακριτές θέσεις, ούτως ώστε να έχουν τοπική επιρροή στο άγνωστο πεδίο και να είναι μεταξύ τους αριθμητικά ανεξάρτητα. Η τάξη των πολυπόλων προσομοίωσης έχει άμεση συσχέτιση με το συνολικό πλήθος τους, καθώς όσο μικρότερη είναι η τάξη των πολυπόλων, τόσο μεγαλύτερο είναι ως επί το πλείστον το απαιτούμενο πλήθος τους. Συνήθως τα πολύπολα υψηλής τάξης επιλέγεται να τοποθετηθούν σε περιοχές όπου το πεδίο αναμένεται να έχει περίπλοκη, ιδιόμορφη συμπεριφορά, όπως για παράδειγμα κοντά σε πεπλατυσμένες συνοριακές επιφάνειες ή αιχμές. Επιπροσθέτως, σε πολλές περιπτώσεις υπολογισμού των χαρακτηριστικών σκέδασης σωμάτων με πεπλεγμένη γεωμετρία, έχει αποδειχτεί χρήσιμη η θεώρηση κατανεμημένων πηγών και κατανεμημένων πεδριακών κατανομών στις συνοριακές επιφάνειες. Η σύγκλιση των σχετικών λύσεων είναι ταχεία, ενώ και η συνακόλουθη υπολογιστική πολυπλοκότητα μειώνεται σημαντικά. Τα ανωτέρω πλεονεκτήματα επιτυγχάνονται όμως εις βάρος της απλότητας και της ευκολίας εφαρμογής που χαρακτηρίζουν τις GMT μεθόδους. Εξάλλου, τα λεγόμενα ‘κανονικά αναπτύγματα’ (‘normal expansions’) αποτελούν υπέρθεση εισερχόμενων και εξερχόμενων κυμάτων και χρησιμοποιούνται σε σφαιρικά ή σχεδόν σφαιρικά προβλήματα για την προσέγγιση της ακτινικής συμπεριφοράς του πεδίου.

Από την άλλη μεριά, δεν είναι δυνατή η πολλαπλή χρησιμοποίησή τους καθώς δεν έχουν τοπική συμπεριφορά. Επιπλέον, για τις περιπτώσεις δομών που χαρακτηρίζονται από υψηλό λόγο επιφάνειας προς όγκο, όπως τα λεπτά σύρματα, έχουν αποδειχθεί κατάλληλα τα αναπτύγματα τα οποία περιέχουν συναρτήσεις Green:

$$G(r, r') = \frac{e^{jk|r-r'|}}{|r-r'|} \quad (2.7)$$

k είναι ο κυματάρριθμος στο μέσο διάδοσης, r είναι το διάνυσμα της θέσης του σημείου παρατήρησης, r' είναι το διάνυσμα της θέσης του αναπτύγματος Green.

Ακόμη σε περιπτώσεις σκεδαστών που αποτελούνται από υλικά με υψηλές ηλεκτρικές απώλειες, εντός των οποίων τα πεδία εξασθενούν πολύ γρήγορα, χρησιμοποιούνται προσεγγιστικές οριακές συνθήκες (Impedance Boundary Conditions) προκειμένου να ξεπεραστούν αριθμητικές δυσκολίες που σχετίζονται με έντονες μεταβολές των πεδίων. Στην περίπτωση της MAS, οι συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούνται επιλέγονται με βασικό κριτήριο την ικανοποίηση της κυματικής εξίσωσης στο χωρίο όπου επιζητείται η MAS προσέγγιση. Η MAS, αν και αναπτύχθηκε ανεξάρτητα, μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση των μεθόδων GMT, αφού ενεργοποιούνται μόνο οι σχετικοί όροι μηδενικής τάξης. Το χαρακτηριστικό γνώρισμα τους είναι ότι έχουν εν γένει φυσική ερμηνεία για αυτόν τον λόγο αποκαλούνται και βοηθητικές πηγές.

Όταν το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει πόλωση Transverse Magnetic (TM) χρησιμοποιούνται βοηθητικές πηγές που εκπέμπουν στοιχειώδη ηλεκτρικά πεδία, ενώ για Transverse Electric (TE) πόλωση οι βοηθητικές πηγές εκπέμπουν στοιχειώδη μαγνητικά πεδία. Όταν η πόλωση είναι τυχαία, το προσπίπτον πεδίο μπορεί να αναλυθεί σε TM και TE κύματα και η επίλυση επιτυγχάνεται με υπέρθεση των επιμέρους προβλημάτων. Σε προβλήματα 2D στην MAS, συνήθως χρησιμοποιούνται νηματοειδείς ηλεκτρικές ή μαγνητικές πηγές, ενώ σε 3D περιπτώσεις ως βοηθητικές πηγές προτιμώνται, ως επί το πλείστον, ζεύγη εγκάρσιων ηλεκτρικών μαγνητικών στοιχειωδών δίπολων Hertz.

Αξίζει ακόμη να αναφερθεί ότι σε περιπτώσεις λεπτών ή επίπεδων σκεδαστών δύναται να χρησιμοποιηθεί η λεγόμενη τροποποιημένη MAS (Modified MAS-MMAS) στην οποία θεωρούνται πλέον ως άγνωστοι τα ίδια τα ρεύματα και τα φορτία των βοηθητικών πηγών και όχι τα πεδία που παράγουν, όπως συμβαίνει στην κλασική MAS. Το σημαντικότερο όφελος που προσδίδει η MMAS είναι η αποφυγή μαθηματικών εκφράσεων που περιέχουν αναλυτικές παραγώγους της βαθμωτής συνάρτησης Green και των συνακόλουθων ιδιομορφιών υψηλής τάξης, με συνέπεια

την βελτιωμένη ακρίβεια της MMAS προσέγγισης. Η MMAS έχει εφαρμοστεί με επιτυχία στην ανάλυση μικροταινιακών και ελικοειδών κεραιών .

2.7 Κατανομή τύπου βοηθητικών πηγών

Το σημαντικότερο ζήτημα που αναδεικνύεται κατά την εφαρμογή της MAS είναι αναμφισβήτητα η κατάλληλη κατανομή των βοηθητικών πηγών προσομοίωσης στο εκάστοτε χωρίο, επειδή αυτή επηρεάζει αποφασιστικά την σύγκλιση της αριθμητικής λύσης. Δεδομένου ότι δεν υφίστανται κανόνες γενικής εφαρμογής, ούτε γενικευμένες συναρτήσεις κατανομής για την τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών, υιοθετούνται συνήθως διάφοροι εμπειρικοί κανόνες, οι οποίοι έχουν αποδειχτεί αποδοτικοί στην πράξη σε ένα ευρύ φάσμα ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων. Οι κανόνες αυτοί λαμβάνουν υπόψη κυρίως την γεωμετρία των δομών που εμπλέκονται στο πρόβλημα αλλά έχουν διατυπωθεί και προτάσεις για την κατανομή των πηγών ανάλογα με τη μορφή του προσπίπτοντος πεδίου. Πρωτίστως, επισημαίνεται ότι, εν γένει, η βοηθητική επιφάνεια στην οποία κατανέμονται οι πηγές προσομοίωσης θα πρέπει να βρίσκεται εντός του συνόλου των ιδιαιζόντων σημείων του σκεδαζόμενου πεδίου, για λόγους αναλυτικής συνέχειας και σύγκλισης της αριθμητικής λύσης. Για την ειδικότερη περίπτωση της MAS έχουν προταθεί οι ακόλουθες εμπειρικές κατευθύνσεις για την τοποθέτηση των πηγών:

Αρχικά, προτείνεται η βοηθητική επιφάνεια να κατασκευάζεται έτσι ώστε τα σημεία της να ισαπέχουν από την συνοριακή επιφάνεια S κατά μία απόσταση d . Με αυτόν τον τρόπο οι βοηθητικές πηγές κατανέμονται σύμφωνα με την επιφάνεια S και εξασφαλίζεται η ευστάθεια του συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου d εξαρτάται από τον αριθμό των βοηθητικών πηγών, την πολυπλοκότητα του προσπίπτοντος πεδίου και την ζητούμενη ακρίβεια και επιτυγχάνεται συνήθως με ένα πεπερασμένο πλήθος δοκιμών. Επίσης το σφάλμα της οριακής συνθήκης είναι εξαιρετικά ευαίσθητο όσον αφορά την θέση των πηγών, καθώς διαφοροποιείται σημαντικά ακόμη και με μικρές μετακινήσεις αυτών.

Παράλληλα με τους εμπειρικούς κανόνες της MAS έχουν αναπτυχθεί προτάσεις για την χωρική κατανομή των πηγών. Όπως είναι προφανές, έχουν ιδιαίτερη σημασία και σε πολλές περιπτώσεις άμεση εφαρμογή στην MAS και για αυτούς τους λόγους, περιγράφονται στην συνέχεια:

Αρχικά, αναμένεται η αύξηση της πολυπλοκότητας των πεδίων στις περιοχές όπου η συνοριακή επιφάνεια έχει περίπλοκη γεωμετρία (πχ αιχμές). Αυτό συμβαίνει διότι τα πεδία σε αυτές τις περιοχές ενδέχεται να είναι εστιασμένα ή να προσεγγίζουν μια κατάσταση συντονισμού. Η αναπαράσταση των πεδίων σε αυτές τις περιπτώσεις επιτυγχάνεται με την χρήση πυκνότερης κατανομής βοηθητικών πηγών.

Ακολουθως, είναι επιθυμητή η χρήση του ελάχιστου δυνατού πλήθους βοηθητικών πηγών με σκοπό τον περιορισμό της υπολογιστικής πολυπλοκότητας της λύσης καθώς και του χρόνου που θα χρειαστεί.

Συνεπώς, απαιτείται μειωμένη πυκνότητα βοηθητικών πηγών κοντά σε περιοχές της συνοριακής επιφάνειας με ομαλή γεωμετρία. Ακόμη, οι βοηθητικές πηγές πρέπει να τοποθετούνται με γνώμονα την αποφυγή της αριθμητικής εξάρτησης μεταξύ τους.

Ο πρώτος κανόνας MAS εξασφαλίζει την πυκνότερη κατανομή των βοηθητικών πολυπόλων κοντά σε περιοχές της επιφάνειας S που παρουσιάζουν υψηλή καμπυλότητα.

Ο δεύτερος κανόνας επιτρέπει την ακριβή ικανοποίηση των οριακών συνθηκών σε κάθε τμήμα της, ενώ ο τρίτος χρησιμοποιείται για την εξάλειψη της αριθμητικής εξάρτησης μεταξύ γειτονικών πολυπόλων.

2.7.1 Επιλογή τύπου βοηθητικών πηγών

Η επιλογή τύπου βοηθητικών πηγών είναι ζωτικής σημασίας για την εκτέλεση της MAS. Κατ' αρχήν, οποιοδήποτε σύνολο βοηθητικών πηγών που παράγει πεδία τα οποία είναι αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων Maxwell είναι δεκτό. Στη MAS όσον αφορά προβλήματα δυο διαστάσεων, οι βοηθητικές πηγές που ακτινοβολούν επιλέγονται ώστε να είναι νήματα ρεύματος απείρου μήκους. Αυτές παράγουν πεδία αναλογικά προς τη συνάρτηση Hankel (η δύο διαστάσεων συνάρτηση Green) :

$$E_n = a_n H_0^{(2)} [k(r - r_n')] \hat{z} \quad (2.14)$$

Όπου E_n είναι το βοηθητικό πεδίο της βοηθητικής πηγής στο σημείο παρατήρησης ρ , a_n είναι το άγνωστο βάρος για τη βοηθητική πηγή, H_0 είναι η συνάρτηση Hankel μηδενικής τάξης και δευτέρου είδους, k είναι ο κυματάριθμος του μέσου στο οποίο ακτινοβολούν οι βοηθητικές πηγές, r_n είναι το διάνυσμα θέσης της βοηθητικής πηγής, \hat{z} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του εγκάρσιου άξονα του προβλήματος δύο διαστάσεων. Για προβλήματα τριών διαστάσεων στη MAS, οι βοηθητικές πηγές που

ακτινοβολούν συνήθως επιλέγονται ώστε να είναι ζεύγη από στοιχειώδη δίπολα, παράγοντας πεδία ανάλογα προς την συνάρτηση Green. Τα μέλη του κάθε ζεύγους είναι κάθετα το ένα στο άλλο και ταυτόχρονα, εφαπτόμενα στη βοηθητική επιφάνεια, για να ικανοποιήσουν την ασυνέχεια του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος της βοηθητικής επιφάνειας. Παρόλα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν άλλοι τύποι βοηθητικών πηγών, ανάλογα με το κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα (τον τύπο της διέγερσης, τη γεωμετρία κτλ).

2.7.2 Κατανομή βοηθητικών Πηγών

Τα άγνωστα ΗΜ πεδία, αναμένεται να εμφανίζουν έντονες χωρικές μεταβολές κοντά σε επιφάνειες με πολύπλοκη γεωμετρία, όπως για παράδειγμα αιχμές.

Συνοπτικά προτάσεις για την κατανομή βοηθητικών πηγών:

- Οι πηγές πρέπει να κατανέμονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να αποφεύγεται η ισχυρή αριθμητική αλληλεξάρτηση μεταξύ γειτονικών πηγών, που εμφανίζεται όταν η απόσταση μεταξύ τους, είναι μικρότερη από τις αποστάσεις των κέντρων από τη συνοριακή επιφάνεια
- Στη MAS, οι νοητές επιφάνειες, για τις βοηθητικές πηγές επιλέγονται σύμφωνα προς τη φυσική επιφάνεια, δηλαδή η ελάχιστη απόσταση πηγής επιφάνειας είναι σταθερή.
- Οι πηγές θα πρέπει να εσωκλείουν όλα τα ιδιάζοντα σημεία της αναλυτικής επέκτασης του αντίστοιχου ΗΜ πεδίου. Αλλιώς οι λύσεις αποκλίνουν.
- Για περιοχές με πολύπλοκες επιφάνειες, η απόσταση μεταξύ της νοητής επιφάνειας επί της οποίας κείνται οι βοηθητικές πηγές, και της συνοριακής επιφάνειας επιλέγεται μικρότερη από την ελάχιστη τοπική ακτίνα καμπυλότητας συνοριακής επιφάνειας.
- Οι πηγές να τοποθετούνται έτσι ώστε όλα τα τμήματα των συνοριακών επιφανειών να βρίσκονται εντός της περιοχής ενδιαφέροντος. Δηλαδή το κέντρο της πηγής, να μην απέχει περισσότερο από μια κρίσιμη απόσταση από κάποιο τμήμα συνοριακής επιφάνειας, έτσι ώστε το γωνιακό εύρος που αντιστοιχεί στο εν λόγω τμήμα ως προς το κέντρο να είναι σταθερό.

Είναι άξιο αναφοράς ότι οι παραπάνω κανόνες δεν εγγυώνται τη σύγκλιση της μεθόδου. Ιδιαίτερα σε προβλήματα σκέδασης από σώματα με αιχμές. Σε αυτές τις

περιπτώσεις πλεονεκτεί η γειτνίαση, δηλαδή το να συνορεύουν έναντι της τοποθέτησης με σύμμορφο τρόπο, όπως και η μείωση της μεταξύ τους απόστασης έως ότου καταστεί συγκρίσιμη με την απόσταση του από τη συνοριακή επιφάνεια.

Ανεξάρτητα από τους προηγούμενους εμπειρικούς κανόνες, για τη μελέτη της σκέδασης επιπέδων ΗΜ κυμάτων από σκεδαστές μεγάλων διαστάσεων έχει προταθεί η τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών επί των καυστικών επιφανειών. Αυτή η κατανομή επιτρέπει την ικανοποίηση οριακών συνθηκών με μικρό αριθμό πηγών. Ωστόσο, ο προσδιορισμός της καυστικής επιφάνειας είναι εξαιρετικά δύσκολος. Η βελτιστοποίηση κατανομής θέσεων μπορεί να γίνει με εφαρμογή γενετικών αλγορίθμων (Genetic Algorithm-GA) για μικρό αριθμό πηγών.

Η εξαγωγή των εξισώσεων που περιέχουν τους άγνωστους ρευματικούς συντελεστές των βοηθητικών πηγών επιτυγχάνεται με την επιβολή των οριακών συνθηκών στις συνοριακές επιφάνειες (σχέσεις 2.8 έως 2.12).

Όταν το πλήθος των σημείων επιβολής ισούται με το πλήθος των βοηθητικών πηγών, τα σημεία επιβολής συνήθως κατανέμονται στις θέσεις προβολής των βοηθητικών πηγών στις συνοριακές επιφάνειες. Η επιλογή αυτή συμβάλλει στην αριθμητική ευστάθεια των προκύπτων γραμμικών συστημάτων. Σε κάθε περίπτωση, η ισομερής κατανομή τους στην συνοριακή επιφάνεια, σε συνδυασμό με την κατάλληλη τοποθέτηση των βοηθητικών πηγών, οδηγεί συνήθως σε συγκλίνουσες αριθμητικές λύσεις. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο κυριότερος τρόπος εξαγωγής και εκμετάλλευσης κρίσιμης πληροφορίας για το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα είναι η επιβολή των οριακών συνθηκών.

Για αυτόν τον λόγο, όταν επιδιώκονται αριθμητικές λύσεις υψηλής ακρίβειας, επιλέγεται η γενικευμένη επιβολή των οριακών συνθηκών, κατά την οποία, όπως προαναφέρθηκε, το πλήθος των σημείων επιβολής υπερβαίνει το πλήθος των βοηθητικών πηγών. Ως αποτέλεσμα παράγονται υπερπροσδιορισμένα συστήματα γραμμικών εξισώσεων, τα οποία επιλύονται με ειδικές τεχνικές. Η πυκνότερη δειγματοληψία των συνοριακών επιφανειών από την άλλη μεριά επιβαρύνει το υπολογιστικό κόστος της αριθμητικής λύσης.

Κεφάλαιο 3ο: Η εφαρμογή της μεθόδου στο πρόβλημα κυλίνδρου

Η μέθοδος της MAS, μπορεί να εφαρμοστεί σε γεωμετρικά σχήματα δύο διαστάσεων ή τριών διαστάσεων, με σχετικά καλή απόδοση και μικρά σφάλματα. Αξίζει να επισημανθεί ότι συστήνεται σε δύσκολες γεωμετρίες. Η εφαρμογή της ακολουθεί κάποια συγκεκριμένα βήματα.

Εντός κάθε γεωμετρικής επιφάνειας S μπορούν να τοποθετηθούν συμμετρικά βοηθητικές πηγές (Auxiliary Sources - ASs), οι οποίες δημιουργούν πεδία ανάλογα με μία συνάρτηση Hankel (Συνάρτηση Green δύο διαστάσεων), ή ως ζεύγη από στοιχειώδη δίπολα για προβλήματα τριών διαστάσεων σε μία συνάρτηση Green. Τα μέλη από κάθε ζεύγος είναι κάθετα μεταξύ τους και, ταυτόχρονα, εφαπτόμενα στην νοητή επιφάνεια των βοηθητικών πηγών S' .

Σε μια τυπική κατάσταση MAS δύο διαστάσεων, οι βοηθητικές πηγές τοποθετούνται ομοιογενώς πάνω στην νοητή βοηθητική επιφάνεια S' , σε συμμορφία με τα φυσικά όρια της πραγματικής επιφάνειας S . Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε κάθε πεδίο ορισμού εκφράζονται ως σταθμισμένες υπερθέσεις από τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που παράγονται από όλες τις βοηθητικές πηγές. Αυτές οι υπερθέσεις έχουν άγνωστους συντελεστές διαστολής, οι οποίοι καθορίζονται με αντιστοίχιση των σχετικών οριακών συνθηκών σε ένα διακριτό σύνολο σημείων παρατήρησης (Collocation points - CPs) πάνω στα φυσικά όρια.

Η κατανομή των σημείων παρατήρησης είναι πάλι ομοιογενής και ο αριθμός τους είναι πιθανόν ίσος με τον αριθμό των βοηθητικών πηγών. Ωστόσο κάποιες φορές θεωρείται προτιμότερο να προσδιοριστεί το γραμμικό σύστημα εξισώσεων και να λυθεί με τον πιο αποδοτικό τρόπο (πχ. υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων).

3.1 Σκέδαση από Τέλεια Αγωγήμο Κυκλικό Κύλινδρο

Κατά την εφαρμογή της MAS και των συναφών μεθόδων GMTs, η απαίτηση για τον περιορισμό του υπολογιστικού κόστους είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την αναζήτηση του ελάχιστου συνόλου συναρτήσεων βάσης (δηλαδή του ελάχιστου πλήθους βοηθητικών πηγών) για την επίτευξη της επιθυμητής ακρίβειας της αριθμητικής λύσης. Σε προβλήματα σκέδασης από λείους PEC κυλίνδρους με σχετικά μεγάλο ηλεκτρικό

μέγεθος έχει αποδειχτεί ότι εφόσον το πεδίο διέγερσης, ταυτίζεται με το πεδίο των MAS πηγών, σε ένα πλήθος $N \times N$, ομοιόμορφα κατανεμημένων σημείων στην S , τότε το σφάλμα μεταξύ των δύο πεδίων στο σύνολο της S είναι κατάλληλα φραγμένο. Το σφάλμα ελαττώνεται ταχύτατα, όσο αυξάνεται το πλήθος των ΒΠ.

Στην πράξη, κατά την εφαρμογή της MAS σε λείους κυλίνδρους μεγάλων ηλεκτρικών διαστάσεων, η επιλογή του πλήθους των βοηθητικών πηγών N , δύναται να παράγει λύσεις με ικανοποιητικά μικρό αριθμητικό σφάλμα, εφόσον οι ΒΠ τοποθετηθούν κατάλληλα εντός του κυλίνδρου. Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημανθεί ότι οι κατανομές των βοηθητικών πηγών, για την περίπτωση της σκέδασης από κυκλικούς κυλίνδρους, δεν αποτελούν τις βέλτιστες επιλογές όσον αφορά την ακρίβεια και την σύγκλιση της μεθόδου MAS.

Η γεωμετρία του προβλήματος, η ανάλυση των συμμετριών και η μορφή του προσπίπτοντος πεδίου οδηγούν στην κατανομή των βοηθητικών πηγών πάνω σε επιφάνεια, εντός του σώματος του κυλίνδρου. Βεβαίως, ακόμα και αυτές η κατανομή δεν έχει αποδειχτεί ότι είναι απόλυτα βέλτιστη, για δεδομένο πλήθος πηγών. Σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης, η επίτευξη των βέλτιστων κατανομών των βοηθητικών πηγών έχει αποδειχτεί αναλυτικά μόνο, επί του παρόντος, για κανονικές γεωμετρίες σκεδαστών και ορισμένους τύπους προσπιπτόντων πεδίων.

Παρόλα αυτά, η έκθεση των αποτελεσμάτων με ουσιαστικά τυχαίες χωρικές κατανομές που προέρχονται από γενετική βελτιστοποίηση, κρίνεται απαραίτητη για την αξιολόγηση της ευκολίας εφαρμογής, της εγκυρότητας και της αποτελεσματικότητας της παρουσιαζόμενης τεχνικής GA/MAS ακόμα και όταν δεν λαμβάνονται υπόψη γεωμετρικοί και εμπειρικοί κανόνες.

3.2 Παραδείγματα προβλημάτων MAS

Για την καλύτερη κατανόηση των βασικών αρχών της MAS θα μελετηθούν δύο γενικευμένες περιπτώσεις προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης ενός γνωστού εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου E_{inc} , από ένα τέλειο ηλεκτρικό αγωγό (Perfect Electric Conductor - PEC), και από έναν ομοιογενή ισοτροπικό διηλεκτρικό σκεδαστή. Οι αντίστοιχες γεωμετρίες εμφανίζονται στα σχήματα 3.1 έως 3.5, αντιστοίχως.

επιτρεπτότητα ϵ και μαγνητική διαπερατότητα μ_0 . Οι βοηθητικές πηγές ακτινοβολούν, ελλείψει του PEC, μέσα σε ένα άπειρο ομογενή ιστροπικό και γραμμικό χώρο, με διηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_0 και μαγνητική διαπερατότητα μ_0 . Είναι τοποθετημένες πάνω στην βοηθητική επιφάνεια S' , και περικλείονται από την (πλασματική) φυσική επιφάνεια S . Έτσι το άγνωστο πεδίο σκέδασης, E^S , περιγράφεται από την εξίσωση

$$E^S = \sum_n E_n^S = \sum_n G_n \alpha_n \quad (3.1)$$

όπου E_n^S , υποδηλώνει το ηλεκτρικό πεδίο της νιοστής βοηθητικής πηγής, το G_n είναι οι γνωστές αναλυτικές λύσεις της αντίστοιχης κυματικής εξίσωσης, και το α_n είναι οι άγνωστοι συντελεστές που πρέπει να καθοριστούν. Αντιστοίχως για τα άλλα πεδία

Η εξίσωση 3.1, όπως και οι εξισώσεις 3.2 και 3.3, δίδονται στην πιο γενική μορφή των τρισδιάστατων προβλημάτων, όπου οι άγνωστοι συντελεστές είναι διανύσματα και οι γνωστές αναλυτικές λύσεις της κυματικής εξίσωσης (συνάρτηση Green) είναι δυαδικές ποσότητες.

Επιβάλλοντας την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών (ένα μηδενισμένο συνολικό ηλεκτρικό πεδίο το οποίο εφάπτεται στο S) σε ένα διακριτό σύνολο από σημεία παρατήρησης πάνω στην υποθετική φυσική επιφάνεια S , προκύπτει ένα σύστημα από γραμμικές εξισώσεις σε όρους του α_n . Η λύση αυτού του συστήματος αποδίδει τους άγνωστους συντελεστές και, συνεπώς, το άγνωστο σκεδαζόμενο πεδίο E^S .

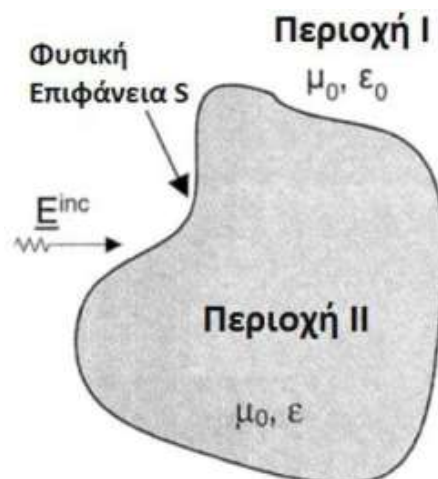


Figure 3.3 Σχηματική αναφορά ενός διηλεκτρικού σκεδαστή. Παρουσιάζονται τα τμήματα της περιοχής I που αφορά το πρώτο σύνολο βοηθητικών πηγών και της περιοχής II που αφορά το δεύτερο σύνολο βοηθητικών πηγών.

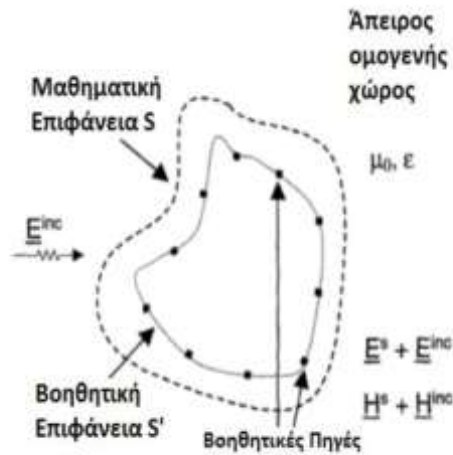


Figure 3.4 Τοποθέτηση του πρώτου σετ βοηθητικών πηγών εντός της μαθηματικής επιφάνειας S στην περιοχή του σκεδαστή

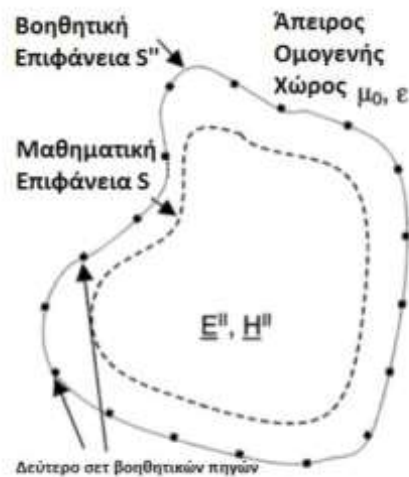


Figure 3.5 Τοποθέτηση του δεύτερου σετ βοηθητικών πηγών εκτός της μαθηματικής επιφάνειας S στην περιοχή του σκεδαστή

Στο δεύτερο πρόβλημα, ένας ομοιογενής ιστροπικός και γραμμικός διηλεκτρικός σκεδαστής, με διηλεκτρική σταθερά ϵ , μαγνητική διαπερατότητα μ_0 , και μια λεία εξωτερική επιφάνεια S , βρίσκεται σε ελεύθερο χώρο. Σε αυτή τη περίπτωση, δύο σειρές βοηθητικών πηγών απαιτούνται για την MAS κατάστροψη. Η μια είναι ένα σύνολο βοηθητικών πηγών που ακτινοβολούν στον ελεύθερο χώρο εν απουσία του διηλεκτρικού σκεδαστή, και βρίσκονται πάνω σε μια βοηθητική επιφάνεια S' , που περικλείεται από την (υποθετική) φυσική επιφάνεια S . (Σχήμα 3.4).

Η δεύτερη είναι ένα σύνολο βοηθητικών πηγών οι οποίες ακτινοβολούν και πάλι εν απουσία του διηλεκτρικού σκεδαστή, αλλά μέσα σε ένα άπειρο χώρο γεμάτο από το

υλικό του διηλεκτρικού σκεδαστή και ευρισκόμενο σε μια βοηθητική επιφάνεια S'' , που περικλείει την (υποθετική) φυσική επιφάνεια S . Στη συνέχεια, το άγνωστο σκεδαζόμενο πεδίο E_s , στην περιοχή I περιγράφεται ως ένα άθροισμα των πεδίων του πρώτου σετ βοηθητικών πηγών ως,

$$E^{S1} = \sum_n E_n^{S1} = \sum_n G_n^1 a_n^1 \quad (3.2)$$

όπου το E_n^s υποδηλώνει το ηλεκτρικό πεδίο της νιοστής βοηθητικής πηγής του πρώτου σετ, το a_n^1 είναι οι άγνωστοι συντελεστές που θα καθοριστούν, και το G_n^1 είναι οι γνωστές αναλυτικές λύσεις της κυματικής εξίσωσης του E^{S1} . Το άγνωστο πεδίο E^{S2} , στην περιοχή II περιγράφεται ως ένα άθροισμα των πεδίων του δεύτερου σετ των βοηθητικών πηγών

$$E^{S2} = \sum_n E_n^{S2} = \sum_n G_n^2 a_n^2 \quad (3.3)$$

Επιβάλλοντας την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών για το συνολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που εφάπτεται στην S σε διακριτά σημεία παρατήρησης στην (υποθετική) φυσική επιφάνεια S , ένα συζευγμένο σύστημα γραμμικών εξισώσεων προέρχεται από τους όρους του a_n^1 και του a_n^2 . Η λύση σε αυτό το σύστημα εξισώσεων αποδίδει τους άγνωστους συντελεστές και, κατά συνέπεια, τα άγνωστα πεδία E^{S1} και E^{S2}

3.3 Πρόβλημα ζεύγους κυλίνδρων

Όπως έχει προαναφερθεί η μέθοδος των βοηθητικών πηγών (MAS) μπορεί να εφαρμοσθεί σε διάφορα γεωμετρικά προβλήματα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση σχεδιάστηκε μία γραφική αποτελούμενη από δύο κύκλους, ώστε να μελετηθεί η γεωμετρία του ζεύγους κυλίνδρων, εικονιζόμενες ως κύκλους. Αξίζει να σημειωθεί πως λόγω της καμπυλότητας της γεωμετρίας, κατ' επέκταση τη μη ύπαρξη γωνιών, η επιφάνεια στην οποία θα τοποθετηθούν οι πηγές, θα είναι σύμμορφη της επιφάνειας και θα απέχει από αυτήν κάποια απόσταση d .

Υπάρχει μια γενική δυστροπία σε προβλήματα της MAS, στις περιπτώσεις όπου υπάρχουν γωνίες. Ωστόσο, δεν επηρεάζει τη γεωμετρία της επιφάνειας που μελετάται. Σε αντίστοιχο πρόβλημα, όπου η επιφάνεια θα ήταν για παράδειγμα τετραγωνική η βοηθητική επιφάνεια θα έπρεπε να εφάπτεται με τη γωνία.

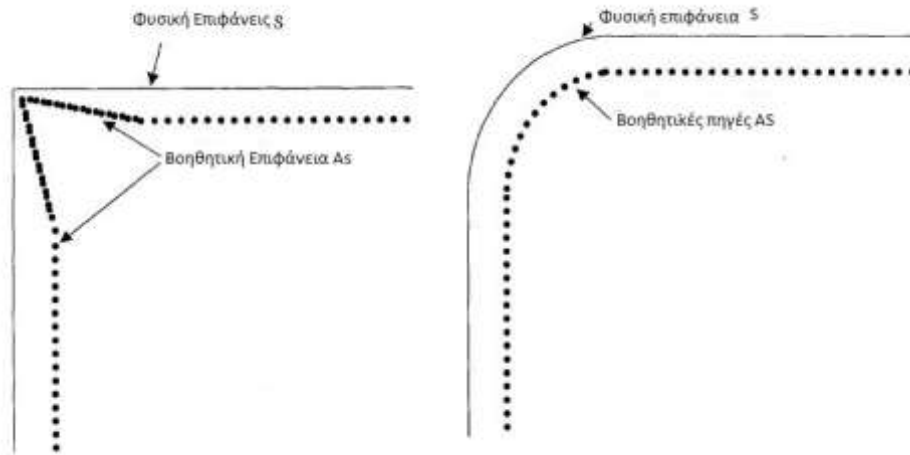


Figure 3.6 Δυστροπία σε γεωμετρίες με αιχμές

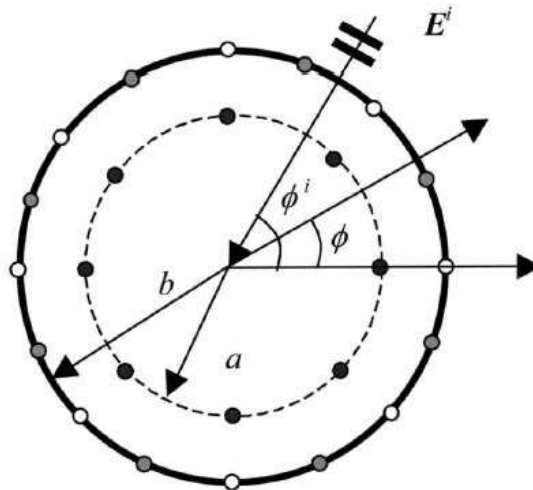


Figure 3.7 Γεωμετρία του προβλήματος. Οι μαύρες, λευκές και γκρίζες κουκίδες, αντιπροσωπεύουν βοηθητικές πηγές (ASs), σημεία παρατήρησης (CPs) και μεσαία σημεία (MPs), αντίστοιχα.

Εστω ένας κύλινδρος PEC, άπειρο, κυκλικό κύλινδρο ακτίνας b , σύμφωνα με τη MAS, ένα σύνολο N των ΒΠ βρίσκεται μέσα στην επιφάνεια και αποδίδει ένα τετράγωνο γραμμικό σύστημα της μορφής

$$[Z]\{C\} = \{E^i\} \quad (3.4)$$

$$E_m^i = E_0 \exp\{jkbc\cos(\varphi_i - \varphi_m)\}, m = 1 \dots M \quad (3.5)$$

Όπου C είναι διάνυσμα στήλης μήκους N , που αποτελείται από το άγνωστα βάρη πηγής, E^i είναι το προσπίπτον πεδίο, E_0 είναι το πλάτος του προσπίπτοντος πεδίου

φ_i είναι το γωνία πρόσπτωσης , φ_m η γωνία αζιμουθίου ,που υπολογίζεται για κάθε σημείο παρατήρησης από τον τύπο $\varphi_m = \frac{m2\pi}{M}$, όπου $m = 0,1\dots N$, (N ο συνολικός αριθμός για τα σημεία παρατήρησης).

Αντιστοιχία των οριακών συνθηκών σε $M=N$ στα σημεία παρατήρησης στο επίπεδο του σκεδαστή η επιφάνεια αποδίδει ένα τετράγωνο γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$Z_{mn} = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k|r_m - r'_n|) = -j/4 \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_i(ka) H_i^{(2)}(kb) \exp\{-j_i(\varphi_m - \varphi'_n)\}$$

Όπου r_m είναι το διάνυσμα θέσης των ΣΠ , $\vec{r}_m = \vec{r}_1 + b_1 (\cos\varphi_m \hat{x} + \sin\varphi_m \hat{y})$

, r'_n είναι το διάνυσμα θέσης του τέταρτου ΒΠ , J_i είναι η Bessel και

H_i Hankel του δεύτερου είδους

Στην εικόνα 3.4, που ακολουθεί ο μπλε κύκλος είναι πάντα η φυσική μαθηματική επιφάνεια και επάνω στον κύκλο με 'x' είναι τα σημεία παρατήρησης. Ο κόκκινος είναι η βοηθητική επιφάνεια, επάνω στην οποία βρίσκονται οι πηγές και συμβολίζονται με 'ο'.

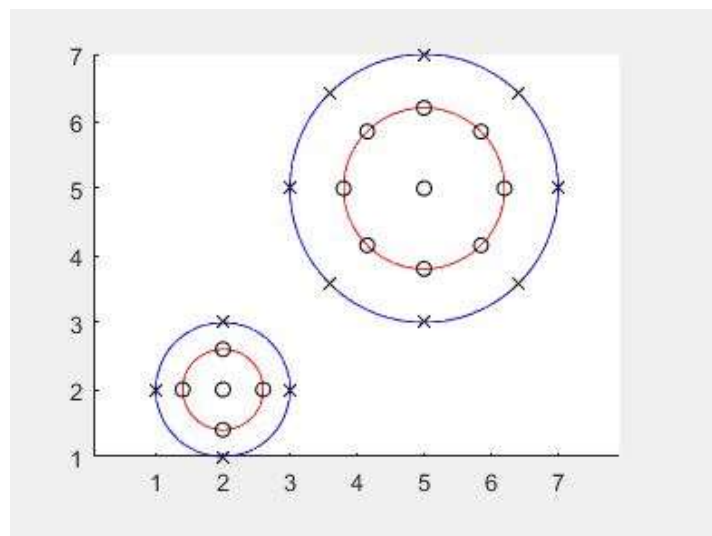


Figure 3.8 Γεωμετρία του προβλήματος ζεύγους κυλίνδρων.

Για τη δημιουργία των κύκλων χρησιμοποιήθηκαν οι παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου.

$$x_{1circle} = r1 * \cos(t) + x1$$

$$y_{1circle} = r1 * \sin(t) + y1$$

Σε αυτό το γεωμετρικό σχήμα προστέθηκαν περιοδικά πεπερασμένα σημεία παρατήρησης (CPs) και ανάλογες ποσοτικά των σημείων παρατήρησης, βοηθητικές πηγές (ASs) στο εσωτερικό της μαθηματικής επιφάνειας S του σκεδαστή και πάνω στην (υποθετική) βοηθητική επιφάνεια S' .

Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να μελετηθεί η απόδοση της μεθόδου βοηθητικών πηγών (Method of Auxiliary Sources - MAS) στο συγκεκριμένο γεωμετρικό πρόβλημα και να παρατηρηθεί η συμπεριφορά της μεθόδου αναλόγως με την περίπτωση η οποία θα εξετασθεί.

Στο γενικό πρόβλημα σκέδασης πέρα από τις τριγωνομετρικές εξισώσεις κύκλου για το σχεδιασμό της γεωμετρίας οι οποίες είναι

$$x_{1circle} = r_1 * \cos(t_1) + x_1;$$

$$y_{1circle} = r_1 * \sin(t_1) + y_1;$$

Αντίστοιχα για κύκλο 2,

$$x_{2circle} = r_2 * \cos(t_2) + x_2;$$

$$y_{2circle} = r_2 * \sin(t_2) + y_2;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, r_i = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

χρησιμοποιήθηκαν και οι κυλινδρικές συναρτήσεις Bessel , πρώτου και δεύτερου τύπου, όπου δίνουν τις κανονικές λύσεις $y(x)$,της διαφορικής εξίσωσης Bessel.

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + i Y_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - i Y_\nu(x)$$

Οι σφαιρικές ή κυλινδρικές συναρτήσεις Bessel, με ημιακέραια λαμβάνονται όταν λύνεται η Helmholtz σε σφαιρικές συντεταγμένες. Αντίστοιχα χρειάστηκε η επίλυση των εξισώσεων ηλεκτρικού πεδίου εντός και εκτός της γεωμετρίας. Επιπλέον υπολογίστηκε το ηλεκτρικό πεδίο εντός και εκτός της επιφάνειας του. Επιπροσθέτως, υπολογίστηκαν τα βάρη (c) των επιμέρους βοηθητικών σημείων, για να υπολογιστεί το προσπίπτον πεδίο.

Κεφάλαιο 4ο: Ο κώδικας του Matlab και η πλήρης ανάλυση του

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε τον κώδικα του Matlab για την υλοποίηση, τη σχεδίαση γεωμετρίας, την επιλογή τοποθέτησης βοηθητικών πηγών (ASs) αλλά και τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου της κάθε βοηθητικής πηγής, τις γνωστές αναλυτικές λύσεις της αντίστοιχης κυματικής εξίσωσης, τον ορισμό των άγνωστων συντελεστών (βάρη), για να καταλήξουμε στο σύστημα των γραμμικών εξισώσεων που προκύπτει και τον υπολογισμό του σκεδαζόμενου πεδίου όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Σε πρώτο χρόνο καλείται μια συνάρτηση με παραμέτρους τα κέντρα (x1, y1, x2, y2) και τις ακτίνες (r1, r2) για πρώτο και δεύτερο κύκλο αντίστοιχα. Πρέπει επίσης να δοθεί το πλήθος των πηγών (s1, s2), για πρώτο και δεύτερο κύκλο αντίστοιχα. Όσες οι πηγές τόσα και τα σημεία παρατήρησης για τους δύο κύκλους.

```
function h = circle(x1,y1,r1,x2,y2,r2,s1,s2)
```

Αρχικά ορίζουμε t1 και t2 που είναι ο χρόνος για τη βοήθεια των σχεδιασμών των κύκλων. Οι οποίοι χρόνοι θα είναι από 0 έως 2π και το βήμα ανάλογο με το πλήθος των σημείων που έδωσε ο χρήστης. Ο αριθμός 50 χρησιμοποιείται απλά για να χωρίσει το κύκλο σε πολλά ισόποσα κομμάτια διότι αργότερα θα τοποθετηθούν τα σημεία.

```
t1 = 0:(pi/(50*s1)):2*pi;  
t2 = 0:(pi/(50*s2)):2*pi;
```

Έχουμε μια μεταβλητή s που περιέχει το πλήθος των πηγών που τοποθετεί ο χρήστης και στους 2 κύκλους

```
s=s1+s2;
```

Για τον σχεδιασμό του κύκλου χρησιμοποιούμε τις παραμετρικές εξισώσεις που γνωρίζουμε από τη γεωμετρία. Δηλαδή τις εξισώσεις :

$$x = r \times \cos(t) + x_0$$

$$y = r \times \sin(t) + y_0$$

Οι κύκλοι για τη μελέτη είναι δύο, επειδή το θέμα αφορά μελέτη δύο κυλίνδρων. Για την απλοποίηση αυτής της γεωμετρίας, δημιουργούνται δύο κύκλοι, με τη χρήση παραμετρικών εξισώσεων. Επομένως για τον πρώτο κύκλο:

```
x1unit = r1 * cos(t1) + x1;
y1unit = r1 * sin(t1) + y1;
```

και για τον δεύτερο:

```
x2unit = r2 * cos(t2) + x2;
y2unit = r2 * sin(t2) + y2;
```

Στη συνέχεια θα χρειαστεί η δημιουργία εσωτερικής επιφάνειας. Για να δημιουργήσουμε κύκλο εντός των κύκλων 1 και 2 χρησιμοποιούμε τις ίδιες παραμετρικές εξισώσεις, με τη διαφορά ότι τοποθετούμε κάποιο ποσοστό απόστασης. Για απόσταση 70% (0.7) από την επιφάνεια της περιοχής του εξωτερικού κύκλου.

Επομένως για τον πρώτο κύκλο:

```
x11unit = (0.7 * r1) * cos(t1) + x1;
y11unit = (0.7 * r1) * sin(t1) + y1;
```

και για τον δεύτερο

```
x22unit = (0.7 * r2) * cos(t2) + x2;
y22unit = (0.7 * r2) * sin(t2) + y2;
```

Για μεθοδική και πλήρη ανάλυση της μεθοδου, θα χρειαστεί να μεταβάλλεται συνεχώς το ποσοστό από 10% έως και 90%, για να εξαχθούν σωστά συμπεράσματα.

Για τη δημιουργία συντεταγμένων ακολουθεί το τμήμα κώδικα

```
a1=x1unit(1:100:(s1*100));
b1=y1unit(1:100:(s1*100));

a2=x2unit(1:100:(s2*100));
b2=y2unit(1:100:(s2*100));

a11=x11unit(1:100:(s1*100));
```

```
b11=y11unit(1:100:(s1*100));
```

```
a22=x22unit(1:100:(s2*100));
```

```
b22=y22unit(1:100:(s2*100));
```

```
endiameso1=x1unit(1:10:(s1*100));
```

```
endiameso1=y1unit(1:10:(s1*100));
```

```
endiameso2=x2unit(1:10:(s2*100));
```

```
endiameso2=y2unit(1:10:(s2*100));
```

Όπου:

a1, b1 συντεταγμένες πηγών 1ου κύκλου

a2, b2 συντεταγμένες πηγών 2 κύκλου

b11, a11 συντεταγμένες σημείων παρατήρησης 1ου κύκλου

a22, b22 συντεταγμένες σημείων παρατήρησης 2ου κύκλου

endiameso1, endiameso1 συντεταγμένες ενδιάμεσων 1ου κύκλου

endiameso2, endiameso2 συντεταγμένες ενδιάμεσων 2ου κύκλου

Το 100 επιλέχθηκε γιατί προηγουμένως για τις εξισώσεις των κύκλων χρησιμοποιήσαμε βήμα $\pi/(50*s1)$. Επομένως για 2π θα φτάσει μέχρι το $s1*100$. Επόμενο βήμα η ένωση των x και y και για τους δυο κύκλους μαζί.

```
a=[a11 a22];
```

```
b=[b11 b22];
```

```
c=[a1 a2];
```

```
e=[b1 b2];
```

```
endiameso1=[endiameso1, endiameso2];
```

```
endiameso2=[endiameso1, endiameso2];
```

Άρα έχουμε:

- (a,b) είναι τα σημεία (x,y) για ΣΠ
- (c,e) είναι τα σημεία (x,y) για πηγές
- endiameso1,endiameso2 (x,y) για ενδιάμεσα

Παρακάτω γίνονται κάποιοι έλεγχοι για να διαπιστωθεί αν εφάπτονται οι δύο κύκλοι.

```
[xout,yout] = circirc(x1,y1,r1,x2,y2,r2
```


Βρίσκει τα σημεία τομής των κύκλων

```
d=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);
```

Υπολογίζει την απόσταση των κέντρων

Αν δεν υπάρχουν σημεία τομής τότε ψάχνει αν είναι ο ένας μέσα στον άλλο. Σε αυτές τις περιπτώσεις εμφανίζει μήνυμα λάθους και δεν μπορεί να προχωρήσει.

```
if(isnan([xout yout]))
```

```
if(x1==x2)&&(y1==y2)&&(r1==r2)|| (d<r1)|| (d<r2)
```

```
disp('ERROR. ΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΕΦΑΠΤΟΝΤΑΙ, ΑΛΛΑΚΣΤΕ ΤΙΣ ΤΙΜΕΣ!');
```

```
else
```

Διαφορετικά συνεχίζει για τον σχεδιασμό των κύκλων και υπολογισμό αποτελεσμάτων.

```
grid on
```

Σχεδιασμό κύκλων με πηγές και ΣΠ.

```
subplot(2,2,1)
```

```
hold on
```

```
axis equal
```

```
plot(x1unit, y1unit, 'b', x1, y1, 'ok', x1unit, y1unit, 'r');
```

```
plot(x2unit, y2unit, 'b', x2, y2, 'ok', x2unit, y2unit, 'r');
```

```
plot(a11, b11, 'ok', a22, b22, 'ok', a1, b1, 'xk', a2, b2,
```

```
'xk');
```

Σχεδιασμό κύκλων με πηγές, ΣΠ και ενδιάμεσων.

```
subplot(2,2,3)
```

```
hold on
```

```
axis equal
```

```
plot(x1unit, y1unit, 'b', x1, y1, 'ok', x1unit, y1unit, 'r');
```

```
plot(x2unit, y2unit, 'b', x2, y2, 'ok', x2unit, y2unit, 'r');
```

```
plot(a11, b11, 'ok', a22, b22, 'ok', a1, b1, 'xk', a2, b2,
```

```
'xk');
```

```
plot(endiamesoa1, endiamesob1, 'g*', endiamesoa2, endiamesob2,
```

```
'g*', a1, b1, 'xk', a2, b2, 'xk');
```

Τα αποτελέσματα πρέπει να βγουν σε έναν πίνακα s*s. Όπου χωρίζεται σε 4 μέρη όπως φαίνεται στον πίνακα.

$\text{Hankel}_{\Sigma\Pi(S1),\Pi\eta\gamma\acute{\eta}(S1)}$	$\text{Hankel}_{\Sigma\Pi(S1),\Pi\eta\gamma\acute{\eta}(S2)}$
$\text{Hankel}_{\Sigma\Pi(S2),\Pi\eta\gamma\acute{\eta}(S1)}$	$\text{Hankel}_{\Sigma\Pi(S2),\Pi\eta\gamma\acute{\eta}(S2)}$

Στη συνέχεια για να υπολογίσουμε το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο, όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι βοηθητικές πηγές επιλέγονται ώστε να είναι νήματα ρεύματος απείρου μήκους και παράγουν πεδία ανάλογα προς τη συνάρτηση Hankel. Έτσι έχουμε να υπολογίσουμε την απόσταση (διαφορά των διανυσμάτων θέσης) των βοηθητικών πηγών και των σημείων παρατήρησης, τη συνάρτηση Hankel μηδενικής τάξης και δευτέρου βαθμού, αλλά και τα άγνωστα βάρη των βοηθητικών πηγών.

Η απόσταση δύο σημείων που ανήκουν στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τον τύπο της απόστασης. Η απόσταση μεταξύ των σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δίνεται από τον τύπο:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Απόσταση πηγών με σημείων παρατήρησης

```
for ai=1:s
    for aj=1:s
        d(ai,aj)=(sqrt((a(aj)-c(ai))^2+(b(aj)-e(ai))^2));
    end
end
```

Απόσταση πηγών με ενδιάμεσων σημείων

```
for ai=1:s*10
    for aj=1:s
        d1(ai,aj)=(sqrt((a(aj)-endiameso1(ai))^2+(b(aj)-
endiameso2(ai))^2));
    end
end
```

Στο σημείο αυτό για να αναλύσουμε την συνάρτηση Hankel πρέπει να αναφερθούμε σε μια άλλη συνάρτηση την Bessel. Η μη ομαλή γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$$

καλείται διαφορική εξίσωση Bessel. Η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων Bessel πρώτου και δευτέρου είδους, που συμβολίζονται ως $J_n(x)$ και $Y_n(x)$ αντίστοιχα. Εναλλακτικά, η ίδια λύση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων Hankel πρώτου και δευτέρου είδους, που ορίζονται αντίστοιχα ως

Hankel 1ου και 2ου είδους

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)} = J_\nu(x) - iY_\nu(x)$$

όπου i είναι η φανταστική μονάδα.

Σε φυσικά προβλήματα διάδοσης κύματος εντός μη φραγμένων περιοχών η περιγραφή της λύσης με τη βοήθεια των συναρτήσεων Hankel είναι πολύ χρήσιμη, γιατί αποδεικνύεται πως οι τελευταίες χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά κυλινδρικών κυμάτων στο άπειρο, ανάλογα με το πρόσημο της σύμβασης αρμονικής χρονικής μεταβολής. Δεδομένης της ευρύτατης χρήσης τους στα Μαθηματικά και τη Φυσική, υπάρχουν έτοιμες υπορουτίνες στη βιβλιοθήκη σχεδόν κάθε επιστημονικής γλώσσας προγραμματισμού (συμπεριλαμβανομένης της Matlab όπου οι Bessel πρώτου και δευτέρου είδους ονομάζονται αντίστοιχα `besselj` και `bessely`), τις οποίες μπορεί να καλέσει ο κάθε ενδιαφερόμενος άμεσα, για οποιοδήποτε πραγματικό όρισμα x και οποιαδήποτε τάξη n , χωρίς να χρειαστεί να εμπλακεί στις λεπτομέρειες υπολογισμού τους. Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση Hankel μηδενικής τάξης και δευτέρου είδους ως εξής:

```
k=2*pi;
Y=bessely(0,d*k);
J=besselj(0,d*k);
H=(J-Y*1i)*(-1i/4);

Y1=bessely(0,d1*k);
J1=besselj(0,d1*k);
H1=(J1-Y1*1i)*(-1i/4);
```

όπου k ο κυματάρθμος τον οποίο έχουμε ορίσει ίσο με 2π ανά μήκος κύματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιούμε γωνία πρόσπτωσης 90 μοίρες.

```
phi=pi/2;
```

```
E=1;
```

Υπολογισμός γωνίας αζιμούθιο για τον 1ο κύκλο:

```
for ai=1:(s1*10)+1
    fm11(ai)=(ai-1)*((2*pi)/(s1*10));
end
```

για τον δεύτερο:

```

for ai=1:(s2*10)+1
    fm22(ai)=(ai-1)*((2*pi)/(s2*10));
end

```

Για να υπολογίσουμε τα άγνωστα βάρη των βοηθητικών πηγών αρκεί να γνωρίζουμε το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο, αφού ισούται με το σκεδαζόμενο έτσι ώστε να τηρείται η οριακή συνθήκη $E_{inc} - E_{sc} = 0$. Το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο μας είναι γνωστό από τον τύπο

$$E^{(i)} = E_0 e^{j\vec{k}\vec{r}_m}$$

Κ το κυματοδιάνυσμα

$$\vec{k} = k(\cos\varphi_i \hat{x} + \sin\varphi_i \hat{y})$$

Διάνυσμα θέσης του σημείου παρατήρησης

$$\vec{r}_m = \vec{r}_1 + b_1(\cos\varphi_m \hat{x} + \sin\varphi_m \hat{y})$$

Όπου r_1 θέση κέντρου και b_1 ακτίνα.

Άρα:

$$\begin{aligned} j\vec{k}\vec{r}_m &= jk(\cos\varphi_i \hat{x} + \sin\varphi_i \hat{y})(\vec{r}_1 + b_1(\cos\varphi_m \hat{x} + \sin\varphi_m \hat{y})) \\ &= jkx_1\cos\varphi_i + jky_1\sin\varphi_i + jkr_1(\cos\varphi_i\cos\varphi_m + \sin\varphi_i\sin\varphi_m) \\ &= jk(x_1\cos\varphi_i + y_1\sin\varphi_i + r_1(\cos(\varphi_i - \varphi_m))) \end{aligned}$$

Οπότε ο κώδικας είναι ως εξής:

```

for ai=1:s1
    E1(ai)=-E*exp(1i*k*(a1(ai)*cos(phi)
    +b1(ai)*sin(phi)+r1*cos((phi)-fm11((ai*10)-9))));
end

for ai=1:s1*10
    E11(ai)=-E*exp(1i*k*(endiamesoa1(ai)*cos(phi)
    +endiamesob1(ai)*sin(phi)+r1*cos(phi)-fm11(ai)));
end

for ai=1:s2

```

```

E2(ai)=-E*exp(1i*k*(a2(ai)*cos(phi)
+b2(ai)*sin(phi)+r2*cos((phi)-fm22((ai*10)-9)))));
end

```

```

for ai=1:s2*10
    E22(ai)=-E*exp(1i*k*(endiamesoa2(ai)*cos(phi)
+endiamesob2(ai)*sin(phi)+r2*cos((phi)-fm22(ai)))));
end

```

Ένωση του ηλεκτρικού πεδίου του πρώτου και του δεύτερου κύκλου για υπολογισμό του σκεδαζόμενου και πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε τα βάρη.

```

Einc=[E1,E2].';
w=H\Einc;
Eout=H*w;

```

Ίδια διαδικασία για ενδιάμεσα σημεία

```

Einc11=[E11,E22].';
Eout11=H1*w;

```

Τα βάρη δεν υπολογίζονται ξανά διότι θέλουμε να δούμε τη συμπεριφορά στις ίδιες πηγές αλλά αυτή τη φορά και για τα ενδιάμεσα σημεία. Τέλος για να δούμε το σφάλμα που προκύπτει ανάμεσα σε προσπίπτον και σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο αρκεί να τα αφαιρέσουμε.

```

errorSP=Eout-Einc;
errorEndiam=Eout11-Einc11;

```

όπου errorSP σφάλμα για σημεία ελέγχου και errorEndiam σφάλμα για ενδιάμεσα σημεία. Από την λύση αυτή της εξίσωσης προκύπτουν μιγαδικοί αριθμοί. Έτσι γίνεται δύσκολη η ανάγνωση του και δεν φαίνεται καθαρά το μέγεθος του σφάλματος. Για να καταφέρει κανείς να κατανοήσει καλύτερα τις τιμές του σφάλματος από την διαφορά αυτή γίνεται η κανονικοποίηση του σφάλματος, δηλαδή λαμβάνονται τα μέτρα για να μπορεί κανείς να ξεχωρίσει καθαρά την τιμή σφάλματος για κάθε τιμή του σκεδαζόμενου πεδίου. Αυτό γίνεται με την χρήση της εντολής abs του MATLAB. Ως εκ τούτου προκύπτει ο παρακάτω πίνακας και το διάγραμμά του με τις τιμές σφάλματος κανονικοποιημένες.

```

error2=abs(errorEndiam)
error1=abs(errorSP)

```

Τέλος εμφανίζουμε και δύο γραφικές με την αναπαράσταση των σφαλμάτων. Πρώτα χωρίς ενδιάμεσα σημεία:

```
subplot(2,2,2)
axis auto
t=linspace(0,2*pi,s);
plot(t,error1,'r-')
```

Και στην συνέχεια με τα ενδιάμεσα:

```
subplot(2,2,4)
axis auto
t=linspace(0,2*pi,s*10);
plot(t,error2,'-*')
```

Κεφάλαιο 5ο: Συμπεράσματα Χρονικά και απόδοσης της μεθόδου.

Σκοπός της πτυχιακής εργασίας είναι η ανάπτυξη ενός μαθηματικού μοντέλου στην πλατφόρμα MATLAB ώστε να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα για τη μέθοδο. Για να γίνει αυτό, πρέπει να αναλυθούν και να σχολιασθούν τα αποτελέσματα της μεθόδου και να μπορέσει έτσι ο αναγνώστης να κατανοήσει την συμπεριφορά της μεθόδου στον σκεδαστή.

Αρχικά, θα πρέπει να τονιστεί ότι σε κάποια από τα αποτελέσματα που εξήχθησαν όπως είναι φυσικό δεν είναι μηδενικά. Για παράδειγμα αριθμός ο οποίος εξάγει αριθμητικό αποτέλεσμα $1.601447660834511e-16$ οπτικά δεν είναι 0 αλλά είναι ένας αριθμός πολύ κοντά στο μηδέν. Οπότε μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ουσιαστικά 0. Συνεπώς όσο πιο κοντά στο μηδέν είναι τα αποτελέσματα τόσο πιο αποτελεσματική και η απόδοση της μεθόδου.

Σχετικά με τα αριθμητικά αποτελέσματα, γνωρίζουμε από τη θεωρία, ότι η μέθοδος των βοηθητικών πηγών αντιμετωπίζει συγκεκριμένα προβλήματα απόδοσης κατά την εφαρμογή της, για παράδειγμα σε αλλαγές του μεγέθους του γεωμετρικού σχήματος, του αριθμού των βοηθητικών πηγών και των σημείων παρατήρησης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος επάνω στον σκεδαστή. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα αναλυθούν κάποιες περιπτώσεις που υπολογίστηκαν έτσι ώστε να μπορέσει να εξαχθεί ένα ασφαλές συμπέρασμα προκειμένου να επιτευχθεί η μέγιστη απόδοση της μεθόδου.

Αναγνωρίζοντας το γεωμετρικό σχήμα που αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, γίνεται αντιληπτό ότι ένα γνωστό πρόβλημα της μεθόδου των βοηθητικών πηγών θα είναι η βέλτιστη τοποθεσία - απόσταση από την φυσική επιφάνεια και η κατανομή των βοηθητικών πηγών που θα τοποθετηθούν, όπως και ο αριθμός τους για την καλύτερη απόδοση της μεθόδου. Θα αναλυθεί η συμπεριφορά της μεθόδου ανάλογα με τις αποστάσεις μεταξύ των κύκλων, τις θέσεις των κέντρων, το μέγεθος της ακτίνας. Θα ερευνηθεί κατά πόσο αυτό θα επηρεάσει τις τελικές τιμές σφάλματος και γενικά την απόδοση της μεθόδου.

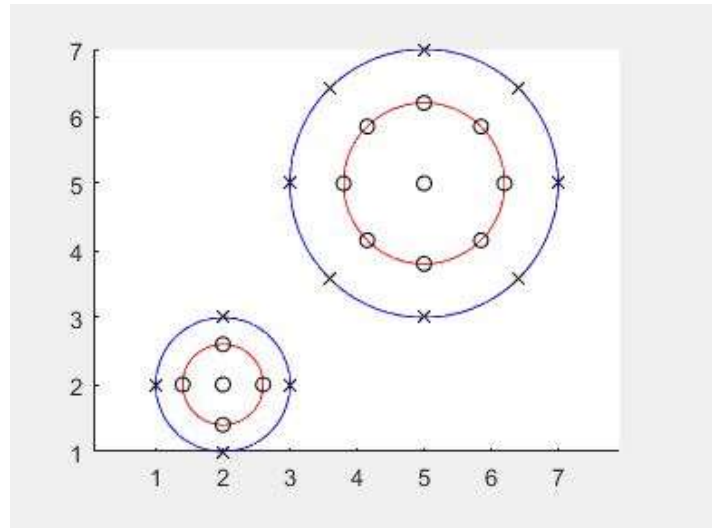


Figure 5.1 Γεωμετρία ζεύγους κυλίνδρων

Στο σχήμα 5.1 παρουσιάζεται μια γενικευμένη εκδοχή του προβλήματος, με ένα σκεδαστή με επιφάνεια S (μπλε κύκλος) του τυπικού σχήματος που επιλέχθηκε στην εργασία αυτή και κατά μήκος του σκεδαστή έχουν τοποθετηθεί σε συγκεκριμένα χωρικά διαστήματα 4 σημεία παρατήρησης για τον πρώτο κύκλο και 8 για τον δεύτερο. Αναλόγως στην εσωτερική επιφάνεια έχουν τοποθετηθεί ισάριθμες βοηθητικές πηγές κατά μήκος της βοηθητικής επιφάνειας S' (κόκκινος κύκλος) ώστε να μπορέσει να αναλυθεί η μέθοδος και να εξαχθούν τα αποτελέσματα. Από τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου. Με την εκτέλεση του προγράμματος, αρχικά γίνονται υπολογισμοί των θέσεων των σημείων παρατήρησης και των βοηθητικών πηγών πάνω στο διδιάστατο χώρο. Με το τέλος της τοποθέτησης των σημείων αυτών, ξεκινά η διαδικασία υπολογισμού της συνάρτησης Hankel, στην οποία πρώτα υπολογίζονται όλες οι αποστάσεις των σημείων των βοηθητικών πηγών από όλα τα σημεία παρατήρησης και στην συνέχεια υπολογίζονται οι συναρτήσεις Bessel και η Hankel. Στην ουσία ο υπολογισμός της Hankel δίνει σαν αποτέλεσμα έναν γραμμικό τετραγωνικό πίνακα, ο οποίος έχει συνεχείς λοξές διαγώνιες τιμές ή με άλλα λόγια διαγώνιους θετικά κεκλιμένες. Στην συνέχεια της ανάλυσης της μεθόδου των βοηθητικών πηγών όμως, η συνάρτηση Hankel θα αποβεί ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό των βαρών των πηγών και του σκεδαζόμενου πεδίου. Παρακάτω υπολογίζονται τα βάρη των βοηθητικών πηγών, με την λύση του συστήματος

$$w = H \setminus E_{inc}$$

όπου w τα βάρη των βοηθητικών πηγών, H η συνάρτηση Hankel και E_{inc} το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο όπως έχει εξηγηθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Με την εύρεση των βαρών των βοηθητικών πηγών λοιπόν, προκύπτει ένας πίνακας 4 και 8 στοιχείων αντίστοιχα για κάθε κύκλο, (δηλαδή ένας πίνακας 12 γραμμών) ο οποίος θα χρησιμεύσει για τον τελικό υπολογισμό του σκεδαζόμενου πεδίου που είναι και το ζητούμενο της μεθόδου. Αυτό γίνεται με τη χρήση της σχέσης του συστήματος $E_{sc} = H * w$

όπου E_{sc} το σκεδαζόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, H η συνάρτηση Hankel και w τα βάρη των πηγών που υπολογίστηκαν προηγουμένως. Από το σύστημα αυτό προκύπτει ένας πίνακας 12 στοιχείων ο οποίος ιδανικά θα έπρεπε να έχει τις ίδιες ακριβώς τιμές με τον πίνακα του προσπίπτοντος πεδίου E_{inc} . Αυτό δυστυχώς δεν συμβαίνει λόγω των στρογγυλοποιήσεων του MATLAB και έτσι προκύπτει ένα σφάλμα το οποίο θα εξεταστεί παρακάτω. Από την σύγκριση των δύο παρακάτω πινάκων που παρουσιάζονται στη συνέχεια φαίνεται ξεκάθαρα ότι υπάρχουν διαφορές στις τιμές του σκεδαζόμενου πεδίου και του προσπίπτοντος πεδίου είτε στο πραγματικό είτε στο φανταστικό μέρος των μιγαδικών τιμών. Με τα αποτελέσματα αυτά που βρέθηκαν για το σκεδαζόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα υπολογιστεί το σφάλμα που υπάρχει μεταξύ του προσπίπτοντος πεδίου και του σκεδαζόμενου. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί με τη διαφορά του ενός από το άλλο δηλαδή από τη σχέση $error = E_{sc} - E_{inc1}$, όπου $error$ είναι η διαφορά του σκεδαζόμενου πεδίου από το προσπίπτον πεδίο, E_{sc} το σκεδαζόμενο πεδίο και E_{inc1} το προσπίπτον πεδίο.

Από τη λύση της εξίσωσης προκύπτουν θετικές και αρνητικές τιμές. Επομένως δε φαίνεται καθαρά το μέγεθος του σφάλματος και χρειάζεται η κανονικοποίηση του σφάλματος. Ως αποτέλεσμα, λαμβάνεται ο παρακάτω πίνακας:

Πίνακας I Προσπίπτον (Einc) και
Σκεδαζόμενο πεδίο (Esc) για 4,8
ΣΠ 1^{ου} και 2^{ου} κύκλου αντίστοιχα

Einc	Eout
-1	-1
0,112539185	0,112539185
-1	-1
0,112539185	0,112539185
-0,482452886	-0,482452886
0,345643516	0,345643516
0,274333654	0,274333654
-0,663210055	-0,663210055
-0,482452886	-0,482452886
-0,97782908	-0,97782908
0,666130924	0,666130924
-0,278090988	-0,278090988

Πίνακας II: (error1) η
διαφορά των τιμών πίνακα I
Eout-Einc

error1 =
1.0e-15 *
0.5557
0.4613
0.4475
0.6480
0.7712
0.7850
0.4003
0.3140
0.1241
0.7216
0.4003
0.2776

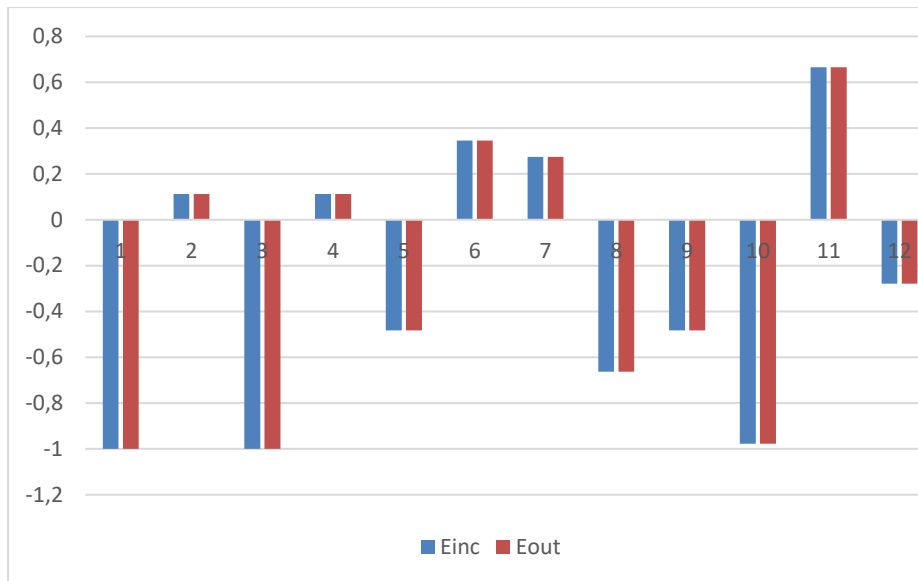


Figure 5.2 Γράφημα για εύρος σφάλματος για 4 σημεία παρατήρησης 1^{ου} κύκλου και 8 σημεία παρατήρησης 2^{ου} κύκλου ($s_1=4$, $s_2=8$)

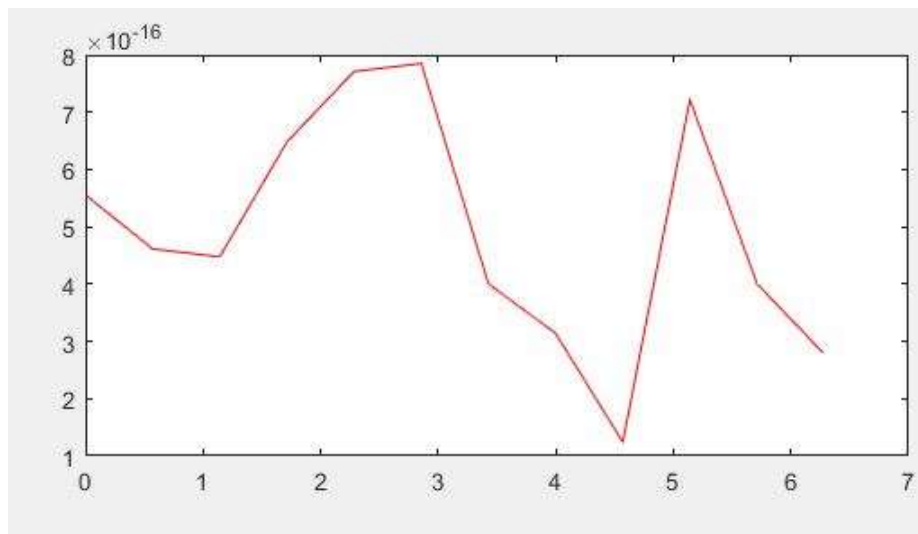


Figure 5.3 Γραφική παράσταση του σφάλματος για $s_1=4$ και $s_2=8$, σφάλμα ΣΠ (y) προς χρόνο από 0 έως 2π (x)

Είναι εμφανές ότι το σφάλμα στην συγκεκριμένη περίπτωση της μεθόδου των βοηθητικών πηγών είναι αμελητέο μιας και όλες οι τιμές που υπολογίστηκαν είναι υψωμένες σε δύναμη του -16 οπότε είναι πάρα πολύ κοντά στο 0 και από την θεωρία της MAS έτσι θα έπρεπε να είναι. Αυτό όμως δεν συμβαίνει όταν τα σημεία που υπολογίζονται βρίσκονται ενδιάμεσα των σημείων παρατήρησης και θα εξεταστεί στη συνέχεια.

5.1 Υπολογισμός στα ενδιάμεσα σημεία παρατήρησης

Αρχικά επιλέχθηκε ένα σημείο παρατήρησης ακριβώς στο κέντρο μεταξύ των σημείων. Τα αποτελέσματα ήταν αποθαρρυντικά. Στη συνέχεια παρατηρήθηκε κάποια μείωση του σφάλματος με τρία ενδιάμεσα , ωστόσο δεν ήταν βέλτιστες οι λύσεις και έτσι αποφασίστηκε η επιλογή των 9 ενδιάμεσων σημείων, μεταξύ των σημείων παρατήρησης. Επομένως χρησιμοποιήθηκαν 9 ενδιάμεσα σημεία παρατήρησης σε κάθε διάστημα από δύο πραγματικά σημεία παρατήρησης που υπάρχουν στην επιφάνεια του σκεδαστή. Τοποθετήθηκαν σε ανάλογες αποστάσεις μεταξύ τους ώστε τα αποτελέσματα που θα υπολογιστούν να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβή και να γίνει πιο σωστή η εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω αυτών των τιμών.

Το σχήμα παρακάτω δείχνει με σαφήνεια την κατανομή των ενδιάμεσων τιμών τα οποία διακρίνονται με πράσινο χρώμα κατά μήκος όλης της επιφάνειας του σκεδαστή και συμβολίζονται με '*'.
 Τα σημεία με μαύρο χρώμα είναι τα σημεία παρατήρησης και συμβολίζονται με 'χ'.
 Τέλος οι βοηθητικές πηγές που συμβολίζονται με 'ο', τονίζονται με μαύρο χρωματισμό.

Το παράδειγμα εδώ αφορά δύο ΣΠ και ΒΠ αντίστοιχα, ώστε να φαίνεται καθαρά, η ίση απόσταση μεταξύ των σημείων.

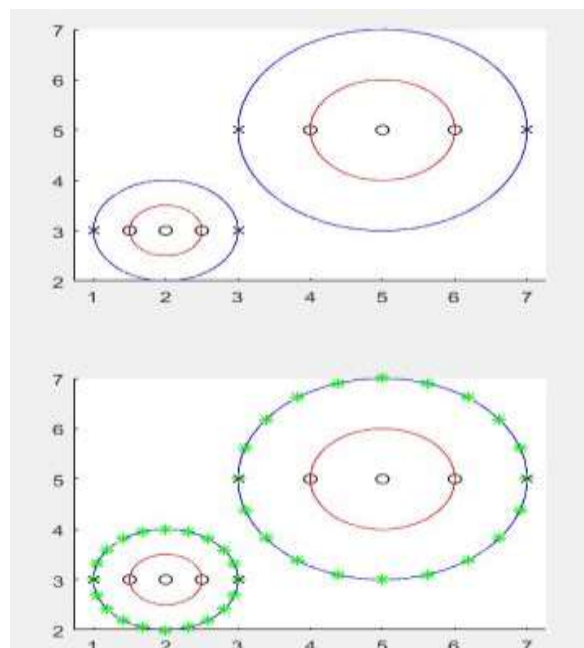


Figure 5.4 Σχεδιασμός κύκλων με 9 ενδιάμεσα ανάμεσα σε δύο σημεία παρατήρησης και στους δύο κύκλους. Οι πηγές είναι ισάριθμες με τον αριθμό των ΣΠ , $S_1=2, S_2=2$.

Εφόσον έχουν τοποθετηθεί τα ενδιάμεσα σημεία παρατήρησης υπολογίζεται η απόσταση που έχουν τα σημεία από τις βοηθητικές πηγές και γίνονται υπολογισμοί των συναρτήσεων Bessel και της συνάρτησης Hankel εκ νέου. Επομένως, προκύπτει ένας πίνακας $N \times N$ όπου $N=40$ $((s1 * \text{αριθμός ενδιάμεσων} + s1) + (s2 * \text{αριθμός ενδιάμεσων} + s2))$ ο οποίος περιέχει όλα τα αποτελέσματα των υπολογισμών. Υπολογίζεται επίσης ξανά το προσπίπτον πεδίο όλων των νέων ενδιάμεσων τιμών για να μπορέσει να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του σκεδαζόμενου πεδίου για τις ενδιάμεσες τιμές.

Για να μπορέσει να υπολογιστεί το σκεδαζόμενο πεδίο για τις ενδιάμεσες τιμές, θα πρέπει να λυθεί η εξίσωση σημείων παρατήρησης, αυτό δεν συμβαίνει με τα βάρη των βοηθητικών πηγών που παρέμειναν τα ίδια. Αυτό είναι απολύτως λογικό και θα ήταν ανούσιο να υπολογιστούν εκ νέου διότι οι βοηθητικές πηγές δεν άλλαξαν ούτε σε αριθμό ούτε σε θέση. Βρίσκονται ακριβώς στο ίδιο σημείο που ήταν και προηγουμένως.

Οπότε από την λύση της εξίσωσης προκύπτει ένας πίνακας 40 γραμμών όσα και τα ενδιάμεσα σημεία παρατήρησης και από αυτά τα σημεία θα υπολογιστεί και το σφάλμα που προκύπτει. Αυτό που έχει μελετηθεί και αποδειχθεί στην θεωρία της MAS είναι ότι τα ενδιάμεσα σημεία θα παρουσιάζουν μεγαλύτερο σφάλμα όσο φθάνουν προς το κέντρο ανάμεσα σε δύο σημεία παρατήρησης ενώ θα μειώνεται όσο φθάνουν πιο κοντά σε αυτά. Από τον πίνακα του σκεδαζόμενου πεδίου τυχαίων ενδιάμεσων σημείων παρατήρησης που φαίνεται παρακάτω μπορεί να καταλάβει κανείς ότι υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ του προσπίπτοντος πεδίου και του σκεδαζόμενου πεδίου.

Πίνακας III: Σκεδαζόμενο και προσπίπτον πεδίο για $s_1=2, s_2=2$ με 9 ενδιάμεσα σημεία (s_1, s_2 ο αριθμός των σημείων παρατήρησης για πρώτο και δεύτερο κύκλο αντίστοιχα)

Einc11		Eout11	
-1	-0,482452886	-1	-0,48245
0,996291842	-0,325143605	-0,68166	-0,60377
-0,46565668	0,995143901	-0,30498	-0,4517
-0,99763147	-0,357671379	-0,17352	-0,57617
-0,962532289	0,045741822	0,107534	0,141223
0,112539185	0,274333654	0,440034	0,96841
0,526570615	0,999127356	0,556983	-0,66199
-0,388326076	0,963846987	0,456585	-0,04425
-0,254424832	-0,011052702	-0,43399	0,581367
0,863364002	-0,99995441	-1,21971	-0,45027
-1	-0,482452886	-1	-0,48245
0,996291842	-0,625476613	-0,71541	-0,50468
-0,46565668	-0,448691021	-0,29511	0,308941
-0,99763147	-0,598103587	0,537207	-0,65853
-0,962532289	-0,868745479	1,180361	-0,40969
0,112539185	0,666130924	1,003466	0,820838
0,526570615	-0,569313191	-0,14235	0,113602
-0,388326076	-0,289951279	-0,93283	-0,63976
-0,254424832	0,851037923	-0,12416	0,024631
0,863364002	0,526383676	-0,21212	-0,88311

Πίνακας IV : Η διαφορά Esc-Eout κανονικοποιημένη από τα αποτελέσματα του

Πίνακα I.

error2	
2,243E-16	1,57E-16
1,801669419	0,432833
1,831278486	1,464333
1,365398363	2,041944
1,657199917	1,795266
1,572539159	2,045072
1,38167492	1,664905
0,881183636	1,185755
1,533837967	0,879113
2,125549781	1,54603
1,13503E-16	1,24E-16
1,712928893	0,691831
1,490513743	1,010682
1,71425071	2,058317
2,201219833	0,479012
1,260609503	1,181646
1,259920959	0,906887
0,546376412	0,350469
1,937834251	1,162569
1,313146576	1,415043

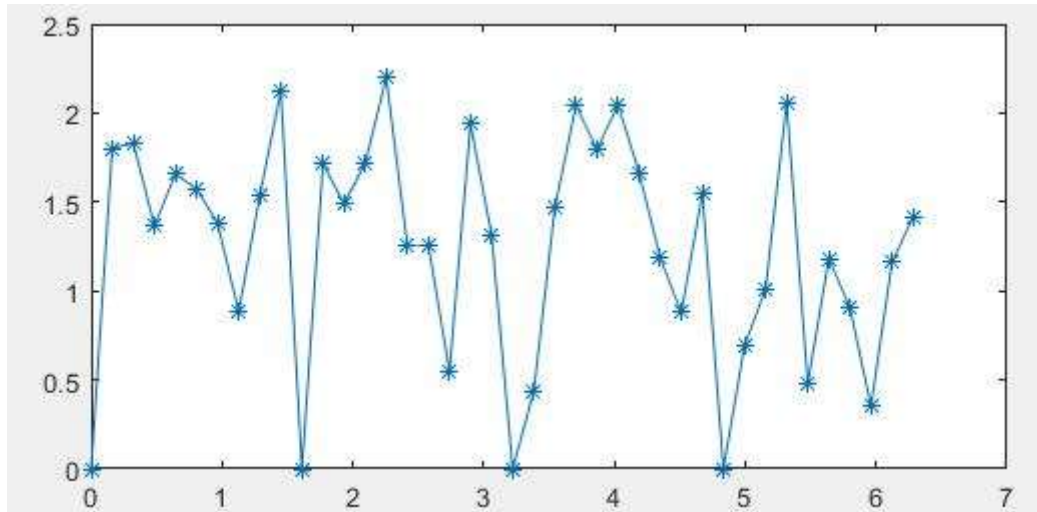


Figure 5.5 Γράφημα για $s_1=2$, $s_2=2$, το σφάλμα ΣΠ, ως προς το χρόνο από 0 έως 2π

Σχηματικά, στο διάγραμμα του κανονικοποιημένου σφάλματος όλων των ενδιάμεσων τιμών και σημείων παρατήρησης, που παρουσιάζεται παραπάνω αντιλαμβάνεται κανείς το πρόβλημα της μεθόδου. Σε κάθε σημείο παρατήρησης το σφάλμα τείνει να είναι μηδενικό. Ίσως να γίνει ακόμη πιο ξεκάθαρο με το παρακάτω γράφημα.

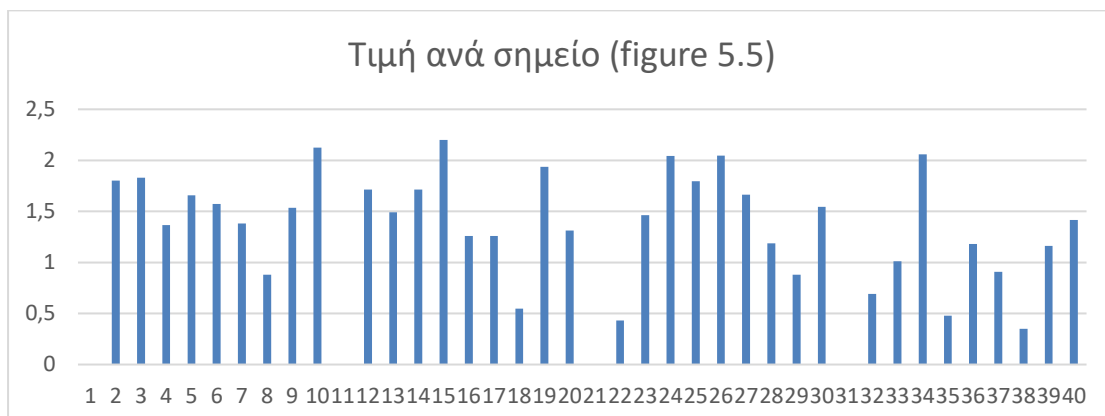


Figure 5.6 Σε κάθε ενδιάμεσο η τιμή του σφάλματος ($s_1=2$; $s_2=2$, με 9 ενδιάμεσα σημεία)

Παρατηρείται επίσης η αύξηση του σφάλματος όσο απομακρύνεται από ένα σημείο παρατήρησης μέχρι να φτάσει στο ενδιάμεσο της απόστασης και να αρχίσει εν τέλει να μειώνεται μέχρι να πλησιάσει το δεύτερο σημείο παρατήρησης όπου θα πλησιάσει το 0 όπως ήταν αναμενόμενο. Ο λόγος που επιλέχτηκαν τόσα λίγα σημεία, είναι για να φαίνεται ευδιάκριτα η συμπεριφορά της μεθόδου. Ωστόσο, η συμπεριφορά δεν φαίνεται ξεκάθαρα. Στην πορεία θα αυξηθούν οι πηγές προκειμένου να είναι ένα αποδεκτό το σφάλμα και να είναι πιο εύκολο για τον αναγνώστη να αντιληφθεί τη συμπεριφορά σε κάθε σημείο.

5.2 Ανάλυση και σχολιασμός παραδειγμάτων.

Η μέθοδος των βοηθητικών πηγών όπως έχει προαναφερθεί, δημιουργεί κάποια γνωστά προβλήματα, όσο πλησιάζει κανείς τα μεσοδιαστήματα μεταξύ των ΣΠ παρουσιάζεται μεγάλη αύξηση του σφάλματος των υπολογισμών της μεθόδου. Για να επιτευχθεί μείωση του σφάλματος, θα πρέπει να γίνουν κάποιες αλλαγές στο πλήθος των βοηθητικών πηγών (s_1, s_2) και των σημείων παρατήρησης (s_1, s_2) και στο μέγεθος του σκεδαστή (r_1, r_2) όπως και στη τοποθέτηση των ΒΠ όπου εξαρτάται από το κέντρο του κάθε κύκλου, $K_1(x_1, y_1)$ $K_2(x_2, y_2)$.

Γενικότερα θα έλεγε κανείς ότι η αύξηση των βοηθητικών πηγών όπως και των σημείων παρατήρησης θα ήταν η επικρατέστερη λύση για την βελτιστοποίηση της μεθόδου.

Εν μέρει αυτό ισχύει, αλλά αυξάνοντας πολύ τον αριθμό των βοηθητικών πηγών ή και των σημείων παρατήρησης, αυξάνεται κατακόρυφα το κόστος υπολογισμού. Για αυτόν ακριβώς τον λόγο, στη συνέχεια θα γίνει προσπάθεια βελτιστοποίησης της μεθόδου χωρίς να αυξηθούν σημαντικά οι βοηθητικές πηγές ή και τα σημεία παρατήρησης.

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό ο χρόνος υπολογισμού αυξάνεται εκθετικά καθώς αυξάνονται οι βοηθητικές πηγές και τα σημεία παρατήρησης. Ας δούμε μία- μία τις περιπτώσεις

1^{ος} Κύκλος 10 ΣΠ. Άρα 90 ενδιάμεσα

2^{ος} κύκλος 20 ΣΠ. Άρα 180 ενδιάμεσα.

Θέσεις ΒΠ: $K_1(0,0)$, $K_2(5,5)$

Μέγεθος γεωμετρίας : $r_1=1,0$ $r_2=2$

Οι 100 πρώτες γραμμές αφορούν τον πρώτο κύκλο και οι επόμενες τον 2^ο.

Μελέτη ανά απόσταση από 0,1 με βήμα 2. Στον παρακάτω πίνακα τα αποτελέσματα.

Πίνακας V: Αποτελέσματα του σφάλματος Eout-Einc για 10,20 σημεία παρατήρησης με 9 ενδιάμεσα σημεία. Σε όλες τις αποστάσεις 0,1 έως 0,9 με βήμα 2.

error2-0,1	error2-0,3	error2-0,5	error2-0,7	error2-0,9
6,36346E-10	1,45057E-14	5,52503E-16	1,5998E-15	0
0,388192141	0,393687128	0,406417154	0,332687124	0,245511426
0,66469561	0,674645491	0,695699513	0,553245926	0,437476905
0,826762396	0,838453695	0,860523896	0,662230389	0,653125701
0,884633216	0,894667845	0,910124993	0,674351593	0,834022149
0,856019398	0,861442506	0,86474652	0,613798555	0,931249293
0,76096194	0,760275998	0,749745317	0,508637806	0,917185468
0,617566983	0,61140445	0,59007391	0,384725458	0,782004817
0,439022253	0,430257211	0,405612678	0,259219669	0,535266547
0,232429076	0,225577951	0,207988165	0,134891901	0,229925915
1,30496E-09	6,06723E-14	8,16316E-16	3,66439E-15	2,22478E-16
0,257345123	0,246547059	0,221244507	0,162220785	0,233144027
0,534907608	0,511397562	0,457896386	0,360435212	0,550642481
0,819279188	0,783562894	0,704178989	0,587750806	0,830678448
1,085114952	1,03994523	0,941431182	0,820811378	1,037968149
1,294698296	1,244584039	1,136898181	1,022169457	1,173107555
1,400977168	1,351521606	1,246460278	1,14454427	1,228170228
1,354423818	1,311513667	1,221145658	1,137384538	1,169506867
1,113517376	1,082354716	1,017150609	0,956354743	0,945731602
0,657660433	0,641702308	0,608464738	0,575467954	0,530072391
2,62254E-10	7,33777E-15	9,22638E-16	1,66493E-15	3,04364E-16
0,80365041	0,790194894	0,762251171	0,723547917	0,561389905
1,654152665	1,632825437	1,588376064	1,50534647	1,255704764
2,420167532	2,398539915	2,352963945	2,22207933	2,076840966
2,961933133	2,947639532	2,916488987	2,739667614	2,867785764
3,164389416	3,162815993	3,157327921	2,945400475	3,417839992
2,971765608	2,984082277	3,007279121	2,781640255	3,537291001
2,412618467	2,434942291	2,47971274	2,270413033	3,125752711
1,604523573	1,628734346	1,678897597	1,518559782	2,224625891

0,732123234	0,748315142	0,782887348	0,697637467	1,047008857
1,28719E-09	4,42811E-14	1,5896E-15	4,50838E-15	2,22045E-16
0,431402145	0,449982321	0,492959956	0,422388197	0,491568553
0,528110393	0,554650877	0,623728192	0,540739814	0,441465895
0,559655316	0,551738314	0,557404083	0,60795287	0,601298242
0,97193877	0,925643454	0,820017845	1,006548089	1,365266725
1,550133851	1,500592793	1,376017867	1,559702038	2,125803433
1,970661239	1,931821049	1,829746458	1,964496323	2,542002718
2,040685612	2,016723783	1,951137749	2,030356488	2,429244965
1,68820649	1,677519326	1,646688021	1,683639055	1,779488885
0,960593856	0,958194866	0,950418049	0,96420586	0,804531891
5,50351E-10	3,2583E-14	1,41852E-15	3,22013E-15	4,44089E-16
1,002761049	1,005070558	1,010266241	1,033093354	0,486127798
1,861243837	1,86824144	1,88568234	1,952588132	1,302566177
2,437474055	2,449128155	2,479271605	2,606040262	2,29496941
2,666449341	2,681033536	2,7194541	2,900697386	3,135144828
2,558195958	2,573319508	2,613504987	2,820048467	3,600245966
2,181630823	2,195135375	2,231064768	2,421291826	3,579206749
1,63858187	1,649047765	1,676738847	1,814750145	3,070810103
1,036851083	1,04368464	1,061542897	1,132926642	2,16782761

Πρόκειται για μέρος μόνο πίνακα αφού 10 και 20 πηγές αντιστοιχούν σε 300 γραμμές πίνακα. Είναι οι πρώτες 50.

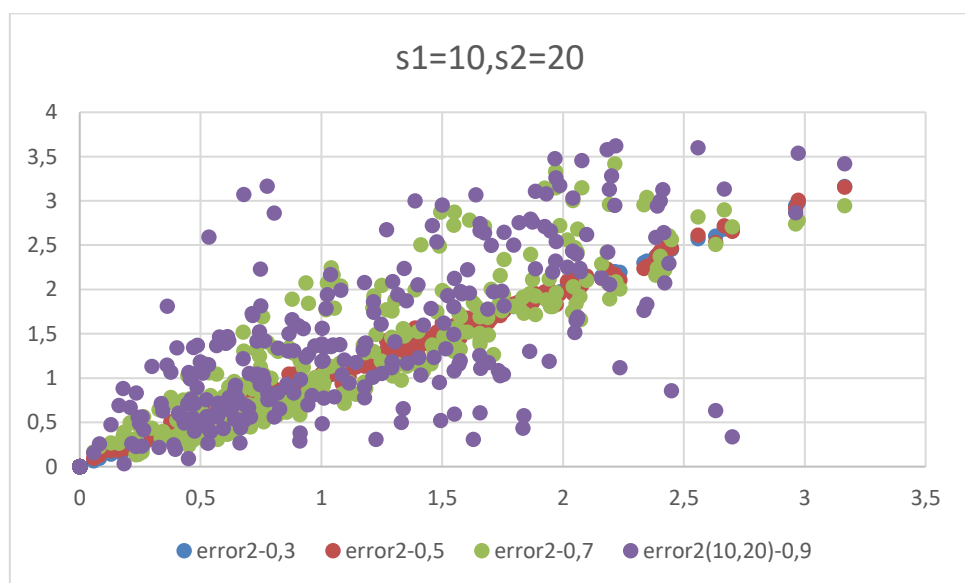
Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι επόμενες 50. Καθώς ξεκινάει το δεύτερο ημικύκλιο του πρώτου κύκλου και οι τιμές μειώνονται σημαντικά, σε όλες σχεδόν τις αποστάσεις

0,468989335	0,472224288	0,480520182	0,498656213	1,047267486
1,04254E-09	5,10074E-14	1,06642E-15	5,40944E-15	7,37615E-16
0,336061849	0,338851477	0,345657537	0,322825942	0,7126244
0,532782762	0,537970382	0,550339949	0,476098203	1,148836381
0,604388311	0,611674524	0,62880768	0,499822997	1,393983178
0,577797641	0,586975627	0,608574149	0,451162086	1,463530367
0,485620254	0,496589166	0,522865787	0,38806595	1,37142054

0,360955159	0,373732261	0,40521992	0,34661873	1,146926067
0,233918804	0,24846174	0,284955538	0,318736427	0,831438877
0,128696966	0,143883162	0,181199204	0,268312155	0,475824759
0,056647019	0,067742358	0,093703154	0,165922831	0,158342774
5,92849E-10	3,7035E-15	1,01308E-15	4,36257E-15	6,78878E-16
0,081129398	0,094537514	0,127004991	0,225604643	0,256440896
0,208110058	0,234244241	0,299128839	0,494712315	0,668719939
0,376802224	0,414448944	0,508475748	0,780486879	1,067762027
0,566269352	0,613320273	0,7300534	1,046608998	1,368168094
0,7431221	0,795949486	0,92525512	1,249385637	1,521096436
0,864901698	0,918230489	1,04658674	1,342053512	1,501097416
0,885315408	0,932745285	1,044837088	1,281749708	1,310864054
0,762202147	0,797379145	0,878951503	1,038442432	0,981887481
0,467846507	0,486096526	0,527588548	0,604075939	0,551316124
4,65229E-10	3,45921E-14	3,35659E-16	5,92543E-15	5,59432E-16
0,609244473	0,624368285	0,65715046	0,718601537	0,648444306
1,290301312	1,31307169	1,360578144	1,462819302	1,116292328
1,941917873	1,962162414	2,001148375	2,118186009	1,190628256
2,447467391	2,455352287	2,464384127	2,56460523	0,858345182
2,700067667	2,689659797	2,656962699	2,706877009	0,336295816
2,631144725	2,603141835	2,532251917	2,507441879	0,633474336
2,234090352	2,196327582	2,10651296	2,007971153	1,117955753
1,57401391	1,538977849	1,458850834	1,325764846	1,195561939
0,777253703	0,75698529	0,712368066	0,615549132	0,756826885
5,53065E-10	1,27255E-14	6,47366E-16	2,00148E-15	1,11576E-15
0,617753402	0,603214573	0,575839678	0,498355471	0,712930648
1,001304521	0,989756682	0,976492221	0,947552495	1,385176216
1,177705892	1,191172639	1,235392724	1,39053673	2,079133859
1,268743056	1,314745662	1,421215894	1,772498449	2,674549933
1,386425394	1,443934805	1,565044105	1,994789636	3,002079195
1,499527454	1,541020953	1,623864212	1,989856515	2,954743262
1,476456499	1,492608831	1,520558781	1,747897376	2,53785266

1,215207331	1,213205244	1,203306314	1,301612705	1,862662099
0,700431089	0,693688703	0,676197562	0,700049962	1,050977654
1,2593E-09	5,45106E-14	8,9509E-16	1,54237E-15	6,86635E-16
0,76475967	0,752778849	0,725375192	0,723482927	1,422199283
1,458006159	1,43560354	1,386759152	1,373169782	2,722762153
1,965307885	1,938591302	1,883947823	1,849903226	3,476505228
2,217757316	2,193919106	2,150012332	2,084637276	3,620706196
2,200446297	2,184693403	2,161810447	2,059492737	3,283119432
1,946599374	1,940529667	1,93968444	1,807931904	2,660380408
1,522221662	1,523892085	1,538102883	1,39864168	1,930102569
1,007347387	1,012601412	1,030932291	0,913365601	1,197081051
0,479132648	0,483425908	0,495633293	0,427747586	0,513180149

Το διάγραμμα για όλες τις αποστάσεις είναι



Αν λάβουμε υπόψιν μόνο τις αποστάσεις 0.5 και 0.7 , που έχουν τις καλύτερες αποδόσεις. Τότε:



Επομένως, η μέγιστη απόδοση είναι σε απόσταση 50% από τη φυσική επιφάνεια. Δεν είναι εμφανές από τον πίνακα καθώς λείπουν αρκετές γραμμές πίνακα, ωστόσο το παραπάνω διάγραμμα, κάνει ευκολότερη τη σύγκριση μεταξύ των τιμών των δύο αποστάσεων (50% και 70%), που παρουσιάζουν χαμηλότερες αποδόσεις.

Για την απόδειξη όμως αυτής της παρατήρησης θα πρέπει πρώτα να γίνουν πολλές δοκιμές, για πολλά ΣΠ.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι με 90 και 180 ΣΠ, αντίστοιχα για πρώτο και δεύτερο κύκλο. Παρατηρείται εξαιρετική μείωση όσο απομακρύνεται από την φυσική επιφάνεια. Και εδώ επιλέχθηκε μέρος μόνο του πίνακα καθώς οι γραμμές θα ήταν $900 + 1800 = 2700$ γραμμές. Ωστόσο είναι ξεκάθαρο ότι σφάλμα έχει μειωθεί σημαντικά με την αύξηση των πηγών. Μάλιστα όσο αυξάνεται η απόσταση μεταξύ βοηθητικής και φυσικής επιφάνειας είναι πιο αποδοτικό.

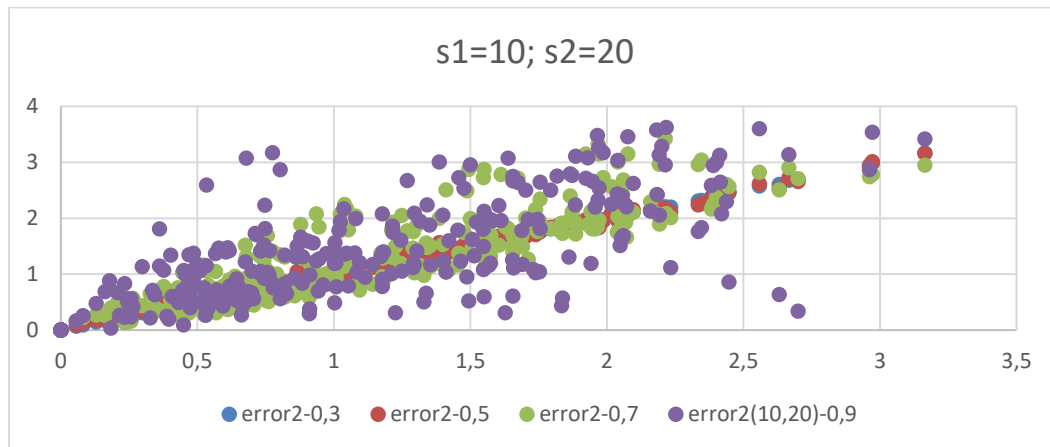
Πίνακας VI: Αποτελέσματα σφάλματος για 90,180 ΣΠ, 1^{ου} και 2^{ου} κύκλου αντίστοιχα.

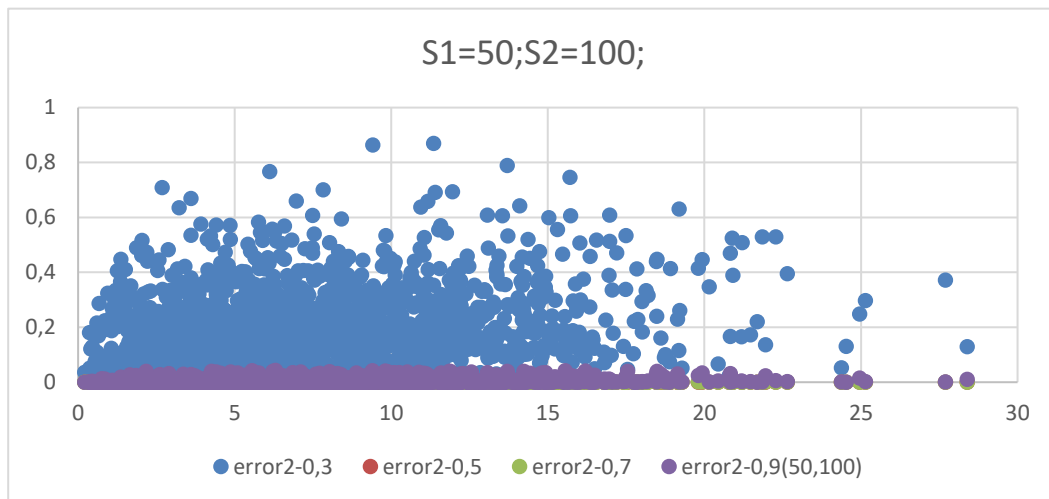
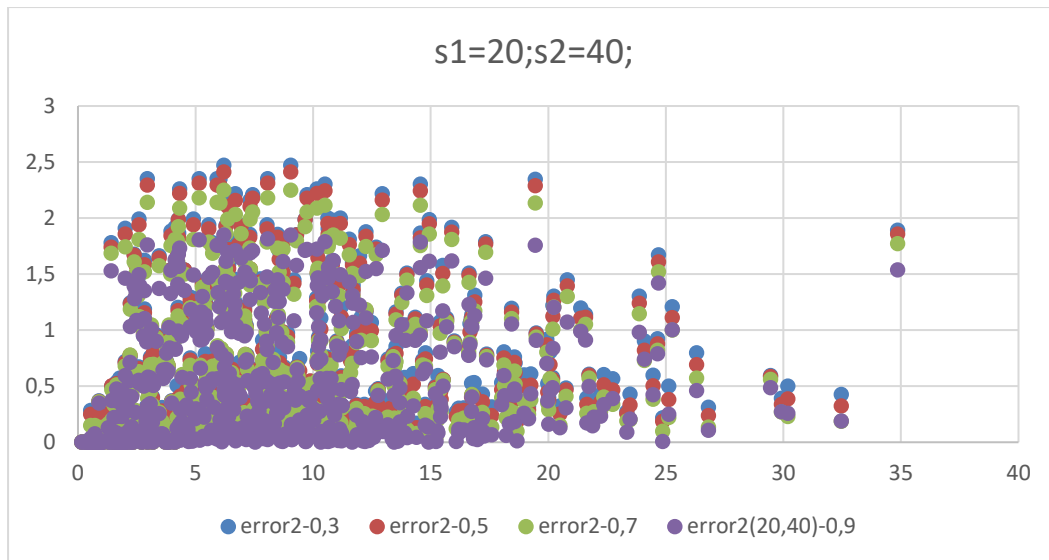
Σε όλες τις αποστάσεις, από 0,1 έως 0,9 με βήμα 2.

error2-0,1	error2-0,3	error2-0,5	error2-0,7	error2-0,9
24,91538458	0,150075954	2,07588E-08	1,41137E-13	2,33411E-15
50,17498073	0,25847487	8,0507E-07	5,69276E-12	1,16155E-05
87,02748969	0,696103038	5,47093E-07	4,58284E-12	2,45E-05
42,74281331	0,218029757	2,87126E-07	5,01931E-12	3,64808E-05
27,19195339	0,640645658	6,87809E-07	3,4538E-12	4,44499E-05
25,39564863	0,041087891	2,00731E-06	6,80985E-12	4,60473E-05
90,81517538	0,202923087	1,09231E-06	3,7729E-12	4,08678E-05
26,02118535	0,225516296	1,17689E-06	5,98208E-12	3,07628E-05
56,68929674	0,143474836	8,64739E-07	6,4684E-12	1,90721E-05
59,64730045	0,381595447	1,63478E-06	2,47077E-12	8,77033E-06
4,556221466	0,032907955	1,06826E-07	1,56806E-13	4,11382E-15
27,16906365	0,164498258	1,07086E-06	5,89849E-12	9,90652E-06
98,40935791	0,156358956	1,10703E-06	2,67724E-12	2,2167E-05
68,89572777	0,074460233	1,17479E-06	2,8877E-12	3,464E-05
32,74039954	0,473443914	9,56808E-07	2,31241E-12	4,36373E-05
9,243631248	0,328122232	1,0189E-06	4,04609E-12	4,61408E-05
23,71365986	0,132959359	9,342E-07	5,84057E-12	4,1282E-05
7,80397849	0,266767975	3,48302E-07	5,63325E-12	3,07962E-05
43,65897589	0,208704802	6,21203E-07	7,82659E-12	1,83468E-05
54,54756714	0,267159713	4,91119E-07	1,51183E-12	7,74614E-06
24,10820609	0,041161688	1,57893E-08	5,21177E-14	1,65047E-15
20,20718646	0,135437074	1,19839E-06	6,99485E-13	8,33471E-06
68,94326361	0,288288315	3,9908E-07	2,76476E-12	1,97744E-05
50,15689887	0,584559811	4,57729E-07	4,10301E-12	3,23138E-05
27,49762125	0,178571052	9,07761E-07	1,92992E-12	4,19055E-05
26,65146949	0,077644142	4,08793E-07	3,60209E-12	4,51135E-05
45,15260758	0,297660453	4,86509E-07	5,19945E-12	4,07345E-05
17,14896387	0,63668521	4,49426E-07	2,26884E-12	3,03385E-05

Είναι χαρακτηριστικό βέβαια ότι για απόσταση 10% φυσικής και βοηθητικής επιφάνειας το σφάλμα μου είναι πολύ μεγάλο. Καλό θα ήταν να μελετηθούν πολλές περιπτώσεις για εξαγωγή ορθών συμπερασμάτων.

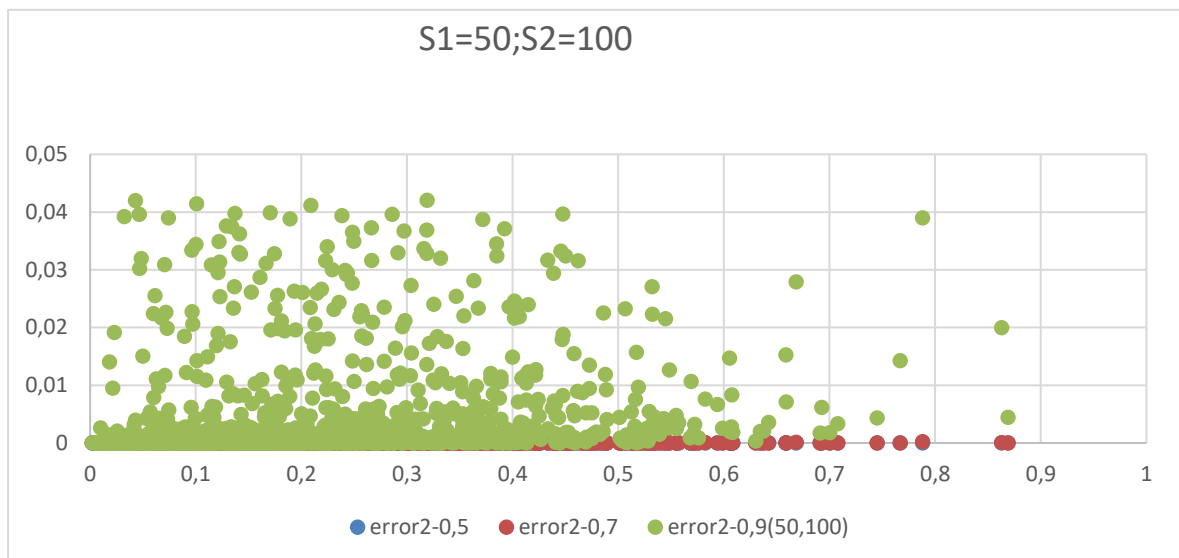
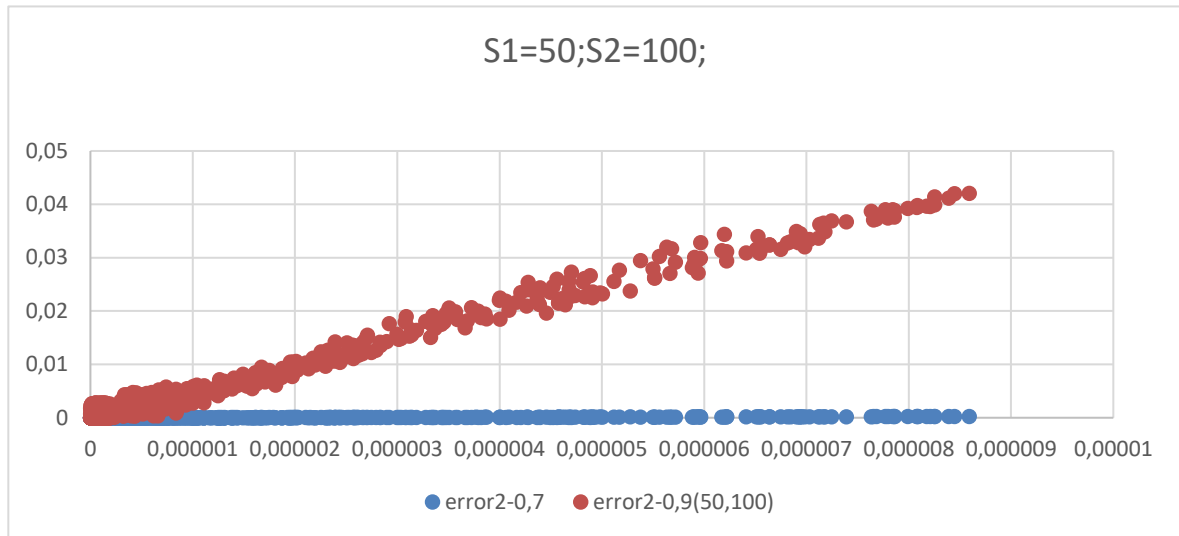
Ξεκινώντας από 10 και 20 πηγές και ΣΠ αντίστοιχα, αποκλειστικά για κάθε σημείο και ταυτόχρονα για κάθε απόσταση από 0,3 έως 0,9 προκύπτουν τα παρακάτω γραφήματα:





Είναι εμφανές, ότι όσο περισσότερα σημεία τόσο καλύτερο σφάλμα. Τι συμβαίνει όμως με την απόσταση μεταξύ φυσικής επιφάνειας;

Όπως φαίνεται η απόσταση 50% δίνει τη βέλτιστη λύση για κάθε αριθμό πηγών. Επομένως, έχοντας ως κύριο παράδειγμα, το τελευταίο γράφημα και αντίστοιχα λαμβάνοντας υπόψιν το συμπέρασμα: όσο περισσότερα σημεία, τόσο καλύτερο σφάλμα, ας γίνει μελέτη της συμπεριφοράς για $s_1=50$ και $s_2=100$, τι συμβαίνει με την απόσταση;



Προς το παρόν μελετήθηκε η συμπεριφορά του σφάλματος, που σχετίζεται κυρίως με την απόσταση μεταξύ βοηθητικής επιφάνειας. Για την πλήρη κατανόηση του προβλήματος, θα χρειαστεί να μελετηθούν τα διαγράμματα του κώδικα που αφορούν το σφάλμα της μεθόδου ως προς το χρόνο.

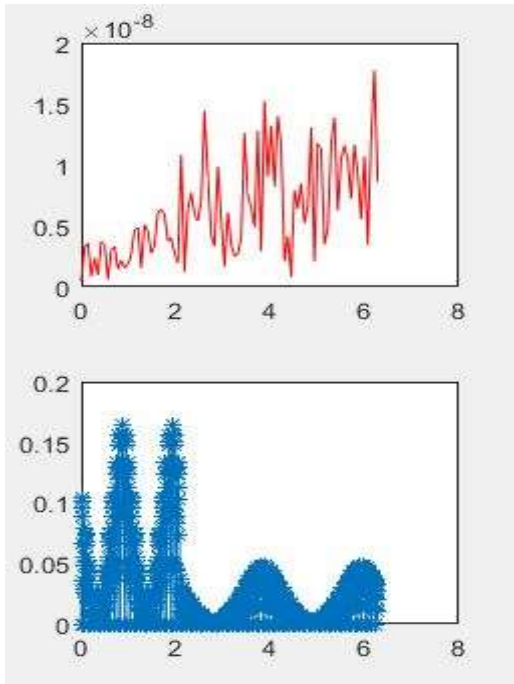


Figure 5.7 Απόσταση 0,5 μεταξύ βοηθητικής και φυσικής επιφάνειας, $s_1=30$ $s_2=60$, .

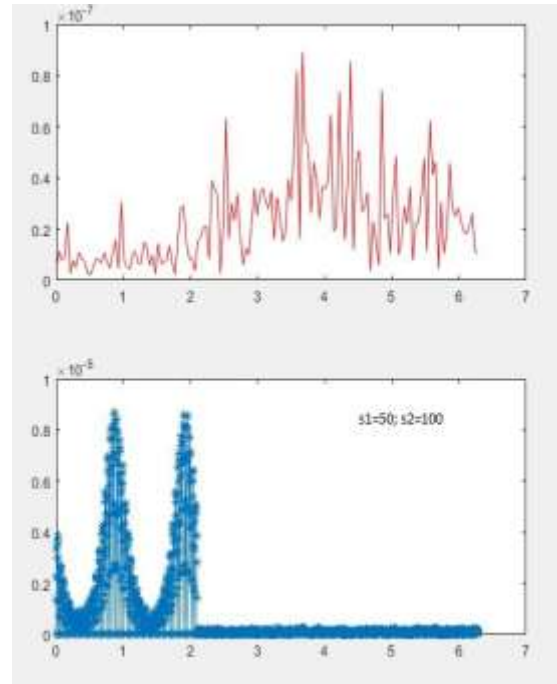


Figure 5.8 Απόσταση 0,5 μεταξύ βοηθητικής και φυσικής επιφάνειας, $s_1=50$ $s_2=100$, .

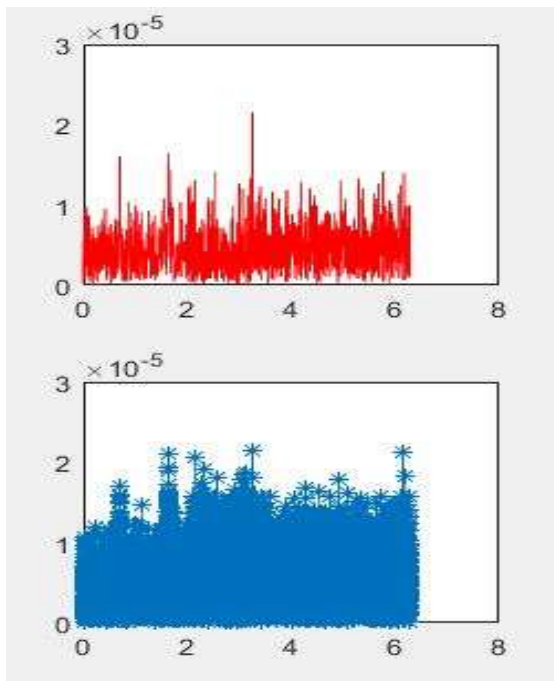


Figure 5.9 Απόσταση 0,5 μεταξύ βοηθητικής και φυσικής επιφάνειας, $s_1=500$ $s_2=1000$.

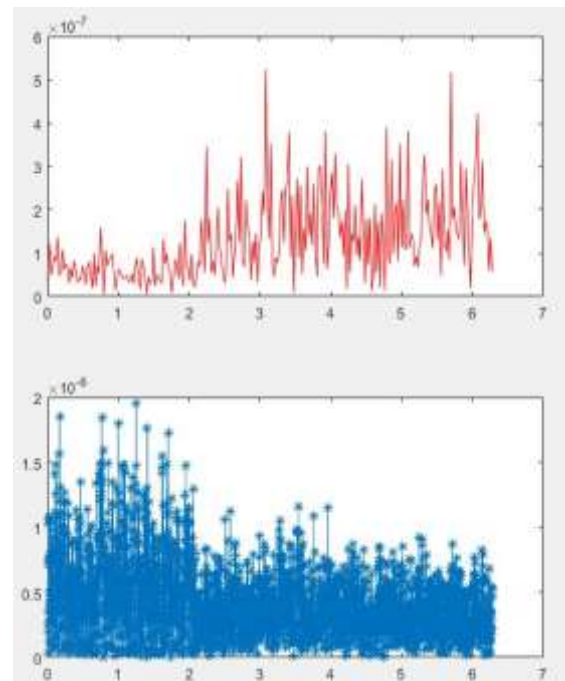


Figure 5.10 Απόσταση 0.9 φυσικής και βοηθητικής επιφάνειας, $s_1=500, s_2=1000$

Με τεκμήριο τις παραπάνω γραφικές βγαίνουν συμπεράσματα σχετικά με των αριθμό πηγών και ενδιάμεσων. Σχετικά με την απόσταση μεταξύ των δύο κύκλων.

Σχετικά με τα ενδιάμεσα, το σφάλμα θα μηδενίσει σε κάθε σημείο παρατήρησης. Επίσης θα έχει μικρές τιμές και στα σημεία, πολύ κοντά σε κάθε ΣΠ.

Επιπλέον, θα μηδενίσει στο πρώτο ημικύκλιο, στην μέση δηλαδή του κύκλου και στο 2^ο ημικύκλιο, στη μέση ακριβώς του δεύτερου κύκλου. Αυτό είναι ευδιάκριτο μόνο σε μικρό αριθμό πηγών καθώς όσο αυξάνονται οι πηγές και τα σημεία παρατήρησης τόσο καλύτερο, δηλαδή μικρότερο, σφάλμα.

Ενδιαφέρον παρουσιάστηκε και με τις αποστάσεις μεταξύ των κύκλων:

Σε απόσταση 10% από τον πρώτο κύκλο, το σφάλμα έχει μη αποδεκτές τιμές σε κάθε περίπτωση. Η μέθοδος αποτυγχάνει.

Σε απόσταση 30% φαίνεται να βελτιώνονται τα αποτελέσματα σφάλματος, άρα αρχικά συμπεραίνεται ότι η απομάκρυνση από τη φυσική επιφάνεια βελτιώνει τα αποτελέσματα. Επίσης, σε δοκιμές για $s_1=10$, $s_2=20$ τα αποτελέσματα είναι αποθαρρυντικά. Με τον τριπλασιασμό όμως αυτών δηλαδή 30 και 60 αντίστοιχα επιτυγχάνεται εξαιρετική βελτίωση.

Για απόσταση 50% έχω σε κάθε περίπτωση καλή απόδοση για πάνω από 10 τιμές. Αποδεικνύεται για εύρος τιμών ότι αποτελεί τη βέλτιστη λύση.

Σε απόσταση 70% τα αποτελέσματα τείνουν να είναι καλά, στις περισσότερες περιπτώσεις. Για αριθμό $s_1, s_2 < 20$ υπάρχει αποτυχία σε κάποια σημεία. Ωστόσο έχει πολύ καλή απόδοση σε μεγαλύτερες τιμές. Μάλιστα όσο αυξάνονται οι πηγές τόσο αποδοτικότερη.

Μία άλλη περίπτωση μελέτης είναι αυτή κατά 90% απόσταση από τη φυσική επιφάνεια. Δηλαδή πολύ κοντά στο κέντρο. Είναι μία περίπτωση που θέλει προσοχή καθώς, το σφάλμα είναι αρκετά υψηλό. Ωστόσο, μπορεί να επιλυθεί και αυτή η περίπτωση με την αύξηση των πηγών.

Τα δεδομένα της μελέτης είναι για τον 1^ο κύκλο $K_1(0,0)$, $r_1=1$ και για τον δεύτερο $K_2(5,5)$, $r_2=2$. Οι τιμές $s_1=10$ $s_2=20$ και κάθε πολλαπλάσιο αυτών των τιμών, για διπλάσιο, τριπλάσιο κ.ο.κ.

Επίλογος

Η μελέτη, που πραγματοποιήθηκε με τη MAS, είχε στόχο την αξιολόγηση της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών στο σύνθετο αυτό πρόβλημα σκέδασης ζεύγους κυκλικών κυλίνδρων. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο κεφάλαιο, τα σφάλματα, που έχουν προκύψει, μπορούν να θεωρηθούν βέλτιστα, όταν η απόσταση της βοηθητικής επιφάνειας βρίσκεται στη μέση μεταξύ της φυσικής επιφάνειας και του κέντρου της. Η διερεύνηση του ζητήματος οδήγησε στα ακόλουθα, χρήσιμα συμπεράσματα:

- Η τοποθέτηση των πηγών, πρέπει να γίνεται με ακρίβεια. Συστήνεται η φυσική επιφάνεια να απέχει 50% από τη βοηθητική επιφάνεια, για βέλτιστη λύση.
- Η βέλτιστη θέση δεν εξαρτάται από το πλήθος των ΒΠ. Αν μεταβληθεί το πλήθος των ΒΠ, πρέπει να γίνει επανάληψη των υπολογισμών.
- Η επίτευξη πολύ χαμηλού σφάλματος αποδείχθηκε «εύκολη» για το παρόν πρόβλημα, ήδη από τιμές $s_1=30$, $s_2=60$ τα αποτελέσματα ήταν βέλτιστα.
- Το γενικό συμπέρασμα της μεθόδου είναι πως όσο περισσότερα είναι τα ενδιάμεσα σημεία και τα σημεία παρατήρησης, οι τιμές τείνουν να είναι μηδενικές. Για λίγα ΣΠ και ενδιάμεσα το σφάλμα είναι πάνω από 1-μη αποδεκτό, αντίθετα για 1000 σημεία παρατήρησης γίνεται μηδενικό.

Είναι γεγονός ότι όσο αυξάνονται ΣΠ και ενδιάμεσα, το σφάλμα μηδενίζει. Επομένως μπορούμε με ευκολία να πούμε, πως η αύξηση των πηγών και ταυτόχρονα των σημείων παρατήρησης, μπορεί να βελτιστοποιήσει τη μέθοδο. Ταυτόχρονα είναι σημαντική και η θέση των βοηθητικών πηγών, που συστήνεται να απέχουν κατά 50% από τη φυσική επιφάνεια.

Παράρτημα

```

function h = circle(x1, y1, r1, x2, y2, r2, s1, s2)
t1 = 0 :( pi/ (50*s1)):2*pi;
t2 = 0 :( pi/ (50*s2)):2*pi;
s=s1+s2;
x1unit = r1 * cos(t1) + x1;          %parametrikes eksiswseis kuklou
epifaneias
y1unit = r1 * sin(t1) + y1;
x2unit = r2 * cos(t2) + x2;
y2unit = r2 * sin(t2) + y2;
x11unit = (0.3 * r1) * cos(t1) + x1;
y11unit = (0.3 * r1) * sin(t1) + y1;
x22unit = (0.3 * r2) * cos(t2) + x2;
y22unit = (0.3 * r2) * sin(t2) + y2;
a1=x1unit(1:100:(s1*100));          %SP kuklou
b1=y1unit(1:100:(s1*100));
a2=x2unit(1:100:(s2*100));
b2=y2unit(1:100:(s2*100));
a11=x11unit(1:100:(s1*100));        %piges kuklou
b11=y11unit(1:100:(s1*100));
a22=x22unit(1:100:(s2*100));
b22=y22unit(1:100:(s2*100));
endiamesoa1=x1unit(1:10:(s1*100));
endiamesob1=y1unit(1:10:(s1*100));
endiamesoa2=x2unit(1:10:(s2*100));
endiamesob2=y2unit(1:10:(s2*100));
a=[a11 a22]; % x prwtoy a,b=x,y gia piges
b=[b11 b22]; % y prwtou
c=[a1 a2]; % x deuteroi c,e=x,y gia simeia par
e=[b1 b2]; % y deuteroi
endiameso1=[endiamesoa1, endiamesoa2]; %x endiameso
endiameso2=[endiamesob1, endiamesob2]; %y endiameso
[xout,yout] = circcirc(x1,y1,r1,x2,y2,r2);          %elegxei an den
efaptontai oi kukloi kai epistrepei NaN
d=sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2);          %apostasi simeiwv
%d11=sqrt((a22-endiamesoa1)^2+(b22-endiamesob1)^2)); % apostasi pigwv

if(isnan([xout yout]))          %elegxei an einai NaN

```

```

if(x1==x2)&&(y1==y2)&&(r1==r2)|| (d<r1)|| (d<r2)           %elegxos an
sumpiptoun oi kuklooi h an einai o enas mesa ston allo
disp('ERROR. OI KYKLOI EFAPTONTAI, ALLAKSTE TIS TIMES!');
else
grid on
subplot(2,2,1)
hold on
axis equal
plot(x1unit, y1unit, 'b', x1, y1, 'ok', x1unit, y1unit,'r');
%sxediasmos prwtou kuklou me voithiki epifaneia
plot(x2unit, y2unit, 'b', x2, y2, 'ok', x2unit, y2unit, 'r');
%sxediasmos deuteroou kuklou me voithitiki epifaneia
plot(a11, b11, 'ok', a22, b22, 'ok', a1, b1, 'xk', a2, b2, 'xk');
%sxediasmos pigwn kai simeiwv paratiris
subplot(2,2,3)
hold on
axis equal
plot(x1unit, y1unit, 'b', x1, y1, 'ok', x1unit, y1unit,'r');
%sxediasmos prwtou kuklou me voithiki epifaneia
plot(x2unit, y2unit, 'b', x2, y2, 'ok', x2unit, y2unit, 'r');
%sxediasmos deuteroou kuklou me voithitiki epifaneia
plot(a11, b11, 'ok', a22, b22, 'ok', a1, b1, 'xk', a2, b2, 'xk');
%sxediasmos pigwn kai simeiwv paratiris
plot(endiamesoa1, endiamesob1, 'g*', endiamesoa2, endiamesob2,
'g*',a1,b1,'xk',a2,b2, 'xk');
k=2*pi;
for ai=1:s
for aj=1:s
d(ai,aj)=(sqrt((a(aj)-c(ai))^2+(b(aj)-e(ai))^2));%a11-a2 b11-b2
end
end
for ai=1:s*10
for aj=1:s
d1(ai,aj)=(sqrt((a(aj)-endiameso1(ai))^2+(b(aj)-endiameso2(ai))^2));
end
end
Y=bessely(0,d*k);
J=besselj(0,d*k);
H=(J-Y*1i)*(-1i/4);
Y1=bessely(0,d1*k);
J1=besselj(0,d1*k);

```

```

H1=(J1-Y1*1i)*(-1i/4);
hi=pi/6;
E=1;
for ai=1:(s1*10)+1
    fm11(ai)=(ai-1)*((2*pi)/(s1*10));
end
for ai=1:(s2*10)+1
    fm22(ai)=(ai-1)*((2*pi)/(s2*10));
end
%upologismos isxus E1 mesa ston kuklo kai upologismos isxus
%endiameson
for ai=1:s1
E1(ai)=-E*exp(1i*k*(a1(ai)*cos(phi)+b1(ai)*sin(phi)+r1*cos((phi)-
fm11((ai*10)-9)))); %prospipton pedio gia lo kuklo
end
for ai=1:s1*10
E11(ai)=-
E*exp(1i*k*(endiamesoa1(ai)*cos(phi)+endiamesobl(ai)*sin(phi)+r1*cos(
(phi)-fm11(ai)))); %prospipton pedio endiameson gia lo kuklo
end
%upologismos isxus E2 ton SP, mesa ston kuklo kai upologismos isxus
%endiameson
for ai=1:s2
E2(ai)=-E*exp(1i*k*(a2(ai)*cos(phi)+b2(ai)*sin(phi)+r2*cos((phi)-
fm22((ai*10)-9)))); %prospipton pedio gia lo kuklo
end
for ai=1:s2*10
E22(ai)=-
E*exp(1i*k*(endiamesoa2(ai)*cos(phi)+endiamesob2(ai)*sin(phi)+r2*cos(
(phi)-fm22(ai)))); %prospipton pedio endiameson gia lo kuklo
end
%upologismos tis isxus tis entasis gia ta simeia paratirisis
Einc=[E1,E2].'; %pinakas me prospipton prwtou kai meta deuteroou kuklou
w=H\Einc; %upologismos varous
Eout=H*w; %upologismos exwterikis epifaneias
%endiamesa simeia kai upologismos tis isxus se auta
Einc11=[E11,E22].'; % sugentrenei times gia epilusi sustimaton ton
edniameson timon 1ou kai 2ou kuklou
%w1=H1\Einc11;

```



```

Eout11=H1*w; %upologismoss exoterikou pediou
pigesPrwtou = [a11;b11].'; %pinakas me piges prwtou kuklou
pigesDeuterou = [a22;b22].'; %pinakas me piges deuterou kuklou
sParPrwtou = [a1;b1].'; %pinakas me simeia paratirisis prwtou
kuklou
sParDeuterou = [a2;b2].'; % me simeia paratirisis deuterou kuklou
endiamPrwtou=[endiamesoa1;endiamesob1].';
endiamDeuterou=[endiamesoa2;endiamesob2].';
errorSP=Eout-Einc; %diafora metaxi esoterikou exwterikou pediou gia ta
simeia paratirisis
errorEndiam=Eout11-Einc11; %diafora metaxi metaxi esoterikou
exwterikou xwrou tou kiklou endiameson timwn
error2=abs(errorEndiam)
error1=abs(errorSP)
table(Einc,Eout)
table(Einc11,Eout11)
subplot(2,2,2)
axis auto
t=linspace(0,2*pi,s);
plot(t,error1,'r-')
subplot(2,2,4)
axis auto
t=linspace(0,2*pi,s*10);
plot(t,error2,'-*')
end
else
disp('ERROR');
end

```

Βιβλιογραφία

Anastassiou Hristos T. , Lympferopoulos Dimitrios G. and Kaklamani, Dimitra I. June 2004 «*Accuracy Analysis and Optimization of Method of Auxiliary Sources (MAS) for Scattering by a Circular Cylinder*», IEEE Transactions On Antennas And Propagation, Vol. 52, No. 6, p. 1541-1547,

Kaklamani D. I. and Anastassiou H. T., June 2002. «*Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics*», IEEE Antennas Propagat. Mag, vol. 44, pp. 48–64,

Λώλης Δ., Μπαρμπαδένης Χ.. Οκτώβριος 2014. «*Εφαρμογή της Μεθόδου των Βοηθητικών Πηγών (Method of Auxiliary Sources-MAS) στην Ανάλυση Ηλεκτρομαγνητικής Σκέδασης από Αγωγίμες, Τοπικά μη Λείες Επιφάνειες.*» Πτυχιακή Εργασία. ΤΕΙ Κεντρικής Μακεδονίας

Νανάκος Χ. «*Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από τυπωμένες μικροταινιακές διατάξεις με κυλινδρικό διηλεκτρικό υπόστρωμα.*». Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών Τομέας Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών, Ηλεκτροοπτικής Και Ηλεκτρονικών Υλικών . W3CLOG. Extended log file format. Διαθέσιμο στη διεύθυνση: <http://artemis.cslab.ece.ntua.gr:8080/jspui/bitstream/123456789/15830/1/DT2010-0246.pdf> [Πρόσβαση 1-9-2018]

Χαιρετάκης Ι. Οκτώβριος 2006. «*Βελτιστοποίηση της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών σε Προβλήματα Σκέδασης στον Υπολογιστικό Ηλεκτρομαγνητισμό με Χρήση Γενετικών Αλγορίθμων.*» Διδακτορική Διατριβή. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών Τομέας Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών, Ηλεκτροοπτικής Και Ηλεκτρονικών Υλικών W3CLOG. Extended log file format. Διαθέσιμο στη διεύθυνση: <http://artemis.cslab.ece.ntua.gr:8080/jspui/bitstream/123456789/8519/1/PD2004-0003.pdf> [Πρόσβαση 12-9-2018]

Παπακάνελλος Π. Ιούνιος 2004. «*Ανάπτυξη της Μεθόδου Βοηθητικών Πηγών για την Ανάλυση Σύνθετων Διατάξεων Ακτινοβολήσης.*» Διδακτορική Διατριβή. Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνείο Σχολή Ηλεκτρολογων Μηχανικων Και Μηχανικων Υπολογιστων Τομεας Ηλεκτρομαγνητικων Εφαρμογων, Ηλεκτροοπτικης Και Ηλεκτρονικων Υλικων . W3CLOG. Extended log file format. Διαθέσιμο στη διεύθυνση:

<http://artemis.cslab.ece.ntua.gr:8080/jspui/bitstream/123456789/8577/1/PD2007-0001.pdf> [Πρόσβαση 1-6-2018]

i

Ρωμανίδης,Α. (2006) . «*Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων*» . Θεσσαλονικη, Εκδοσεις Ζήτη.
