

Το μαθηματικό λογισμικό GeoGebra ως αρωγός για τη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών

Χαριτωμένη Καβουρτζικλή (ΑΕΜ: 2738)

Επιβλέπων Καθηγητής
Δρ. Βασίλειος Σάλτας

Σκοπός

Η πτυχιακή εργασία επικεντρώνεται αρχικά στην επίλυση προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής με τη βοήθεια του μαθηματικού λογισμικού GeoGebra. Συγκεκριμένα στη δημιουργία ηλεκτρονικού αρχείου διδασκαλίας λύσης των συγκεκριμένων γεωμετρικών προβλημάτων με τη βοήθεια του προαναφερόμενου λογισμικού, ως επικουρικό εργαλείο κατά τη διδασκαλία του μαθήματος της Γεωμετρίας Α' Τάξης Ενιαίου Λυκείου.

Κεφάλαια εργασίας

1. Η χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών
2. Προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής
3. Σύγχρονη διδασκαλία των μαθηματικών
4. Δομή και βασικές γεωμετρικές λειτουργίες του GeoGebra
5. Σχολικό βιβλίο γεωμετρίας
6. Επίλυση προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής με το GeoGebra

Η χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών

- Λογισμικά γενικής χρήσης
- Λογισμικά εκμάθησης
- Λογισμικά εξάσκησης
- Λογισμικά προσομοίωσης
- Λογισμικά εικονικής πραγματικότητας
- Λογισμικά επίλυσης προβλημάτων
- Αξιοποίηση του διαδικτύου

Προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής (ορισμός)

Στα προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής δίνονται ένα ή περισσότερα σχήματα (σημεία, ευθείες, κύκλοι) και με βάση αυτά ζητείται η κατασκευή, μόνο με γνώμονα (μη αριθμημένος γνώμονας) και διαβήτη, άλλων γεωμετρικών σχημάτων τα οποία επαληθεύουν κάποιες ιδιότητες.

Προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής (κατηγορίες)

1. Κατασκευαστικά προβλήματα στα οποία **δεν έχει σημασία** η θέση του ζητούμενου σχήματος πάνω στο επίπεδο σχεδιασμού.
2. Κατασκευαστικά προβλήματα στα οποία **έχει σημασία** η θέση του ζητούμενου σχήματος πάνω στο επίπεδο σχεδιασμού.

ή

- 1) **Ορισμένα προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής**, αν ο αριθμός των δεδομένων είναι ίσος με τον αριθμό των ιδιοτήτων, οι οποίες ορίζουν το ζητούμενο γεωμετρικό σχήμα.
- 2) **Απροσδιόριστα προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής**, αν ο αριθμός των δεδομένων είναι μικρότερος του αριθμού των ιδιοτήτων, οι οποίες ορίζουν το ζητούμενο γεωμετρικό σχήμα.
- 3) **Αδύνατα προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής**, αν ο αριθμός των δεδομένων είναι μεγαλύτερος του αριθμού των ιδιοτήτων που ορίζουν το ζητούμενο γεωμετρικό σχήμα.

Προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής (κανόνες)

1. Αν δύο σημεία ανήκουν στο G , τότε η ευθεία, η οποία διέρχεται από τα δύο αυτά σημεία, ανήκει στο G .
2. Αν δύο ευθείες ανήκουν στο G , τότε και το σημείο τομής τους, αν αυτό υπάρχει, ανήκει στο G .
3. Αν σημείο O και ευθύγραμμο τμήμα ρ ανήκουν στο G , τότε και ο κύκλος, με κέντρο O και ακτίνα ρ , ανήκει στο G .
4. Αν δύο κύκλοι ανήκουν στο G , τότε και τα κοινά τους σημεία, αν αυτά υπάρχουν, ανήκουν στο G .
5. Αν ευθεία και κύκλος ανήκουν στο G , τότε και τα κοινά τους σημεία, αν αυτά υπάρχουν, ανήκουν στο G .

Προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής (άλυτα)

- 1) «Ο τετραγωνισμός του κύκλου»
- 2) «Ο διπλασιασμός του κύβου»
- 3) «Η τριχοτόμηση γωνίας»
- 4) «Να κατασκευαστεί τρίγωνο γνωστών τριών διχοτόμων»
- 5) «Να κατασκευαστεί τρίγωνο γνωστών δύο διχοτόμων και της διαμέσου προς την τρίτη πλευρά»
- 6) «Να κατασκευαστεί τρίγωνο γνωστών τριών υψών»

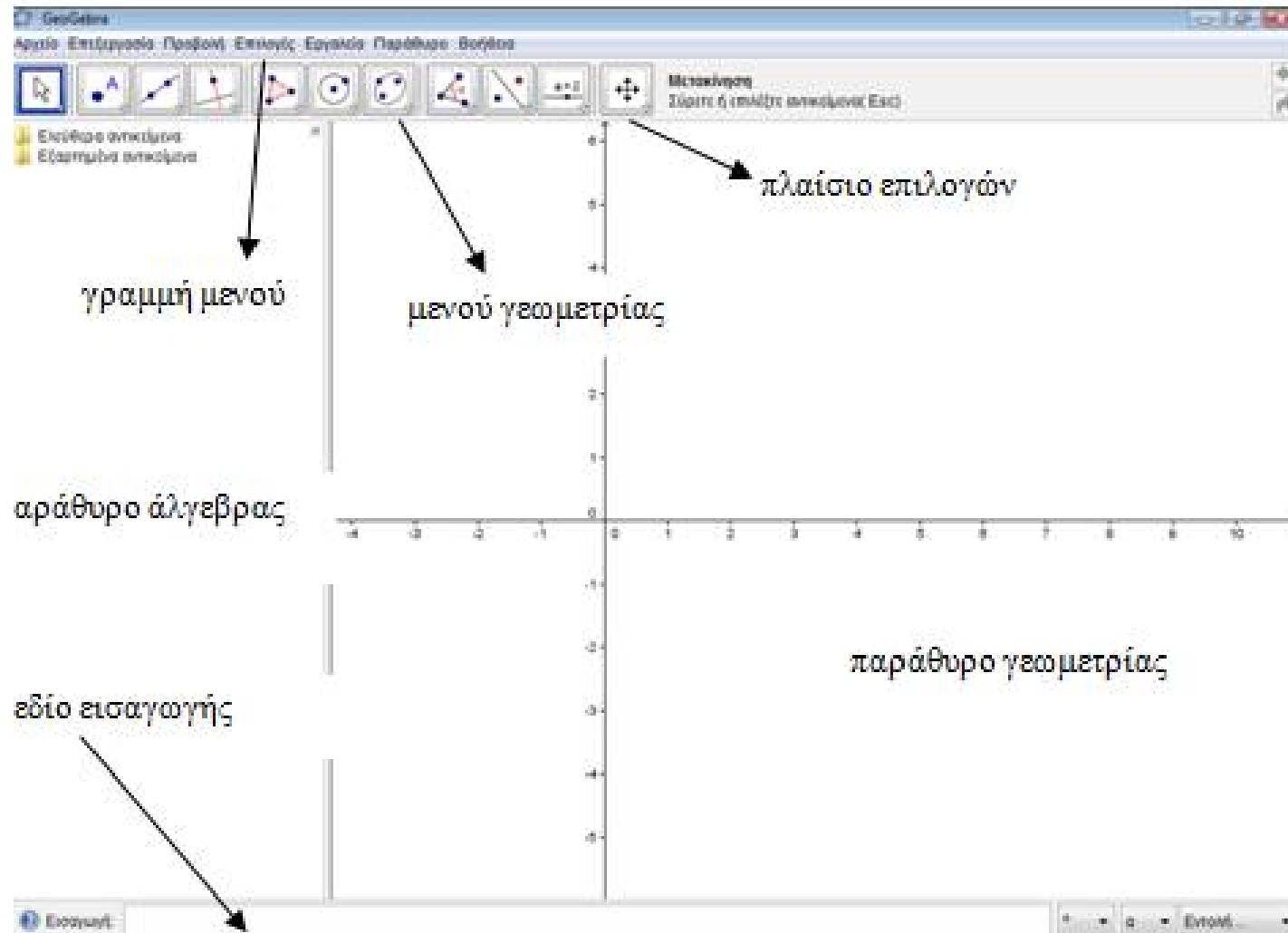
Προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής (επίλυση)

- Ανάλυση
- Σύνθεση
- Απόδειξη
- Διερεύνηση

Πρόταση

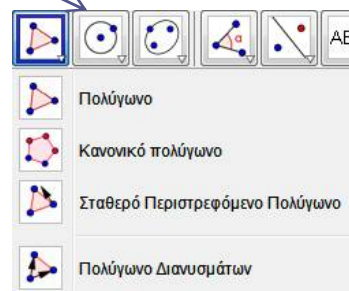
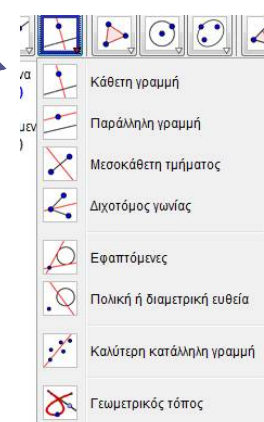
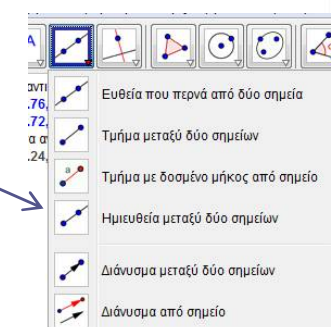
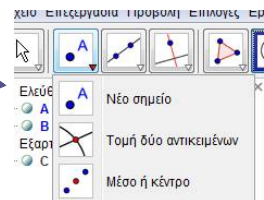
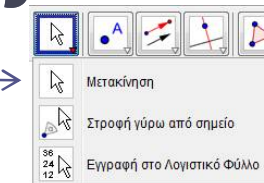
Κάθε περίπτωση της διερεύνησης απαιτεί απόδειξη. Γι' αυτό η διερεύνηση πρέπει να γίνεται πριν την απόδειξη ή μαζί μ' αυτή, έτσι ώστε να καλύπτονται όλες οι περιπτώσεις.

Δομή και βασικές γεωμετρικές λειτουργίες του GeoGebra



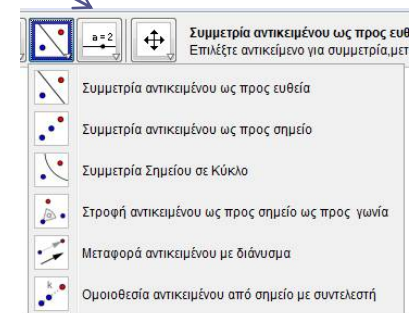
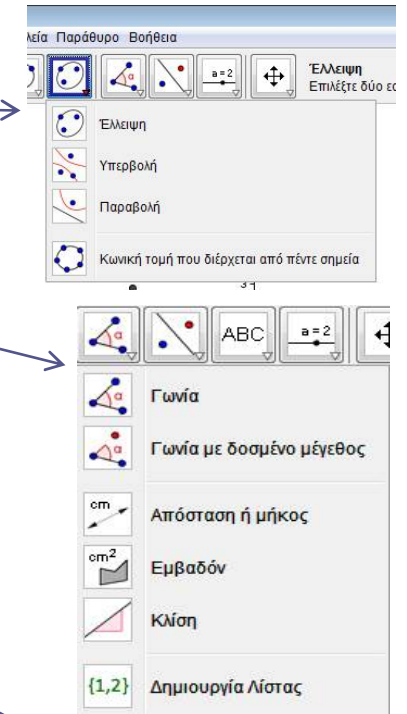
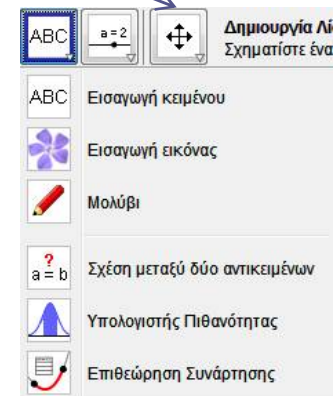
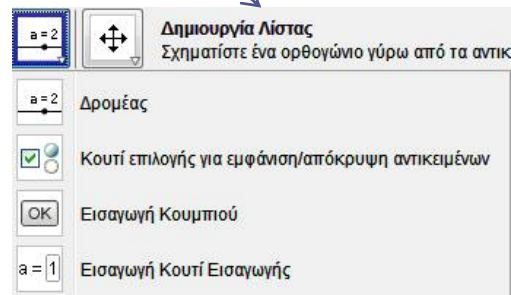
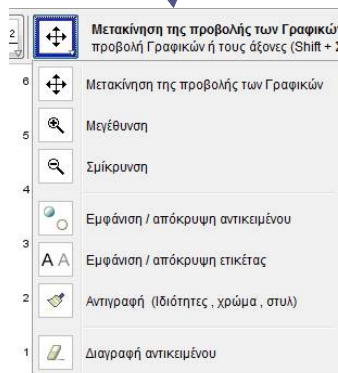
GeoGebra - εργαλεία σχεδίασης

- Μετακίνηση
- Σημείο
- Ευθύγραμμο τμήμα, ευθεία, ημιευθεία και διάνυσμα
- Ευθεία
- Πολύγωνο
- Κυκλικές τομές



GeoGebra - εργαλεία σχεδίασης (συνέχεια)

- Κωνικές τομές
- Αριθμός και γωνία
- Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί
- Κείμενο
- Δρομέας
- Μετακίνηση προβολής γραφικών



Σχολικό βιβλίο γεωμετρίας (ύλη)

Γεωμετρίας Α' Τάξης Γενικού Λυκείου

Κεφάλαιο 1^ο: Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία

Κεφάλαιο 2^ο: Βασικά γεωμετρικά σχήματα

Κεφάλαιο 3^ο: Τρίγωνα

Κεφάλαιο 4^ο: Παράλληλες ευθείες

Κεφάλαιο 5^ο: Παραλληλόγραμμα – τραπέζια

Κεφάλαιο 6^ο: Εγγεγραμμένα σχήματα

Κεφάλαιο 7^ο: Αναλογίες

Κεφάλαιο 8^ο: Ομοιότητα

Σχολικό βιβλίο γεωμετρίας

(παραδείγματα γεωμετρικών κατασκευών)

- **Κεφάλαιο 3^ο:** σελ. 49 (παραδειγμα), σελ. 67 (πρόβλημα 1, πρόβλημα 2), σελ. 68 (πρόβλημα 3, πρόβλημα 4, εφαρμογή) και σελ. 69 (πρόβλημα 1, πρόβλημα 2, πρόβλημα 3)
- **Κεφάλαιο 5^ο:** σελ. 106 (εφαρμογή 2)
- **Κεφάλαιο 6^ο:** σελ. 127 (πρόβλημα), σελ. 135 (πρόβλημα 1), σελ. 137 (πρόβλημα 2, πρόβλημα 3) και σελ. 138 (πρόβλημα 4)
- **Κεφάλαιο 7^ο:** σελ. 154 (πρόβλημα 1, πρόβλημα 2) και 161 (πρόβλημα)

Σύνολο: 18 λυμένα προβλήματα γεωμετρικής κατασκευής

Σχολικό βιβλίο γεωμετρίας (παραδείγματα λυμένο)

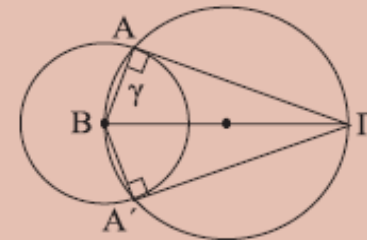
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα $B\Gamma = a$ και μία κάθετη πλευρά του $AB = \gamma$, όπου a και γ γνωστά τμήματα.

Λύση

• **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι $AB\Gamma$ είναι το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{A} = 1L$, $B\Gamma = a$ και $AB = \gamma$ (σχ.28). Ας θεωρήσουμε γνωστή την πλευρά $B\Gamma$. Το σημείο A :

- (i) απέχει απόσταση γ από το B , άρα ανήκει στον κύκλο (B, γ) , και
- (ii) βλέπει το $B\Gamma$ υπό ορθή γωνία, άρα ανήκει στον κύκλο διαμέτρου $B\Gamma$.



Σχήμα 28

• **Σύνθεση.** Κατασκευάζουμε τους δύο κύκλους (σχ.28) οι οποίοι τέμνονται στα A και A' . Σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B\Gamma$ που είναι λύσεις του προβλήματος σε διαφορετικές θέσεις.

• **Απόδειξη.** Το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχει $\hat{A} = 1L$, επειδή βαίνει σε ημικόκλιο, και $AB = \gamma$ ως ακτίνα του κύκλου (B, γ) .

• **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει όταν $a > \gamma$. Όταν $a \leq \gamma$, είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Επίλυση σχολικών προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής με το GeoGebra

Παράδειγμα 13 (σελ. 137, πρόβλημα 2): Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα $B\Gamma = a$ και η κάθετη πλευρά του $AB = \gamma$, όπου a και γ γνωστά τμήματα.

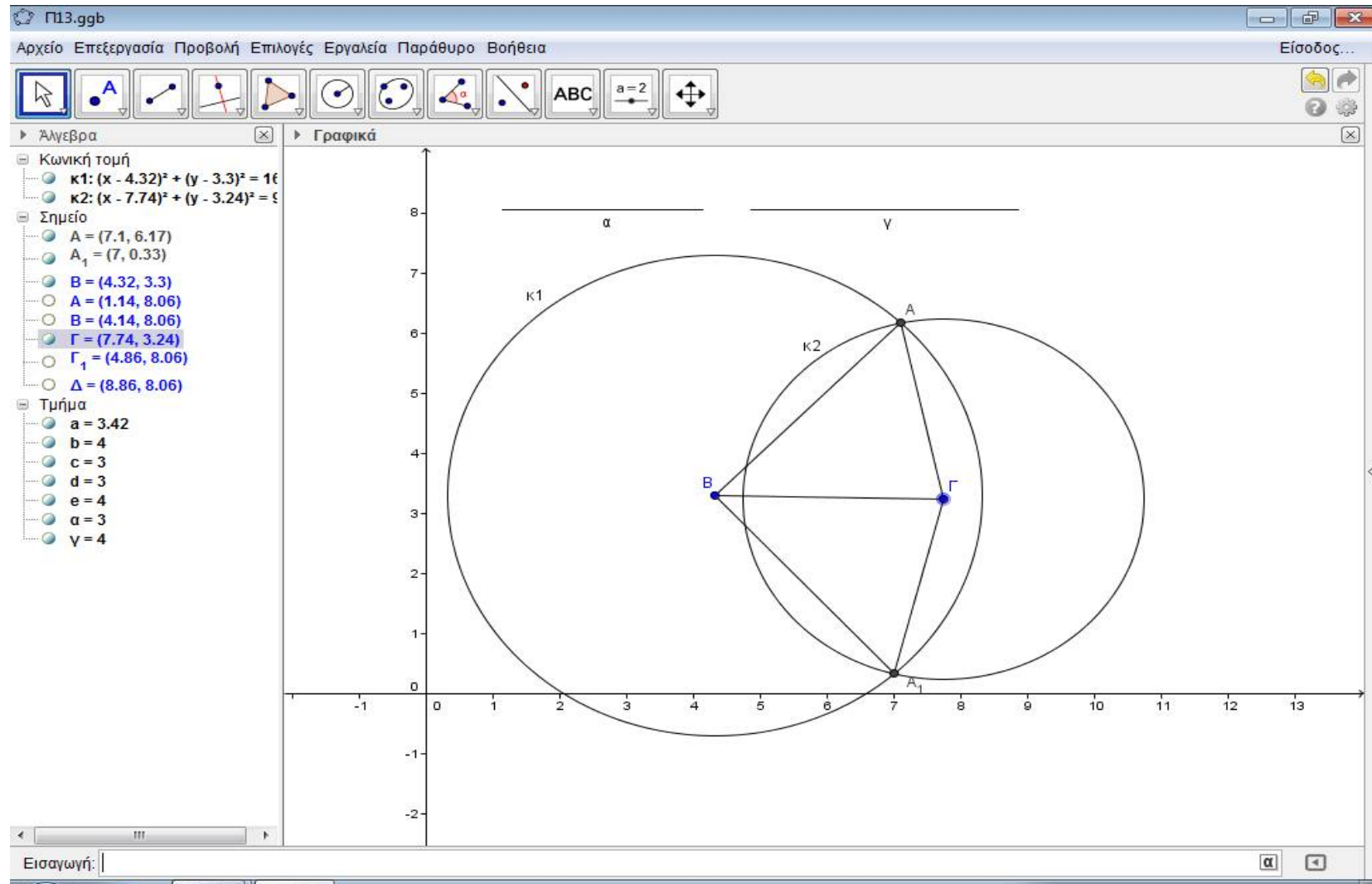
Λύση

Κατασκευάζονται τα τυχαία ευθύγραμμα τμήματα a και γ καθώς επίσης και δύο τυχαία σημεία B και Γ και εν συνεχεία κατασκευάζεται το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$.

Με κέντρο B και ακτίνα a , κατασκευάζεται κύκλος κ_1 , ενώ με κέντρο Γ και ακτίνα γ κατασκευάζεται ο κύκλος κ_2 . Οι δε εντολές κατασκευής τους είναι αντίστοιχα οι $\text{Κύκλος}[B,a]$ και $\text{Κύκλος}[\Gamma,\gamma]$. Οι δύο κύκλοι κ_1 και κ_2 τέμνονται σε δύο σημεία A και A_1 τα οποία και κατασκευάζονται.

Εν συνεχεία κατασκευάζονται τα τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα $BA = \text{Τμήμα}[B,A]$, $\Gamma A = \text{Τμήμα}[\Gamma,A]$, $BA_1 = \text{Τμήμα}[B,A_1]$ και $\Gamma A_1 = \text{Τμήμα}[\Gamma,A_1]$. Έτσι έχουν κατασκευαστεί δύο τρίγωνα τα οποία πληρούν τις προϋποθέσεις του εν λόγω παραδείγματος, τα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A_1B\Gamma$ (Σχήμα 15)

Επίλυση σχολικών προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής με το GeoGebra (συνέχεια)





Επίλυση σχολικών προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής με το GeoGebra (συνέχεια)

Παράδειγμα 15 (σελ. 138, πρόβλημα 4): Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, ρ) , (O_2, R) με $R > \rho$ και $O_1O_2 > R - \rho$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες τους.

Λύση

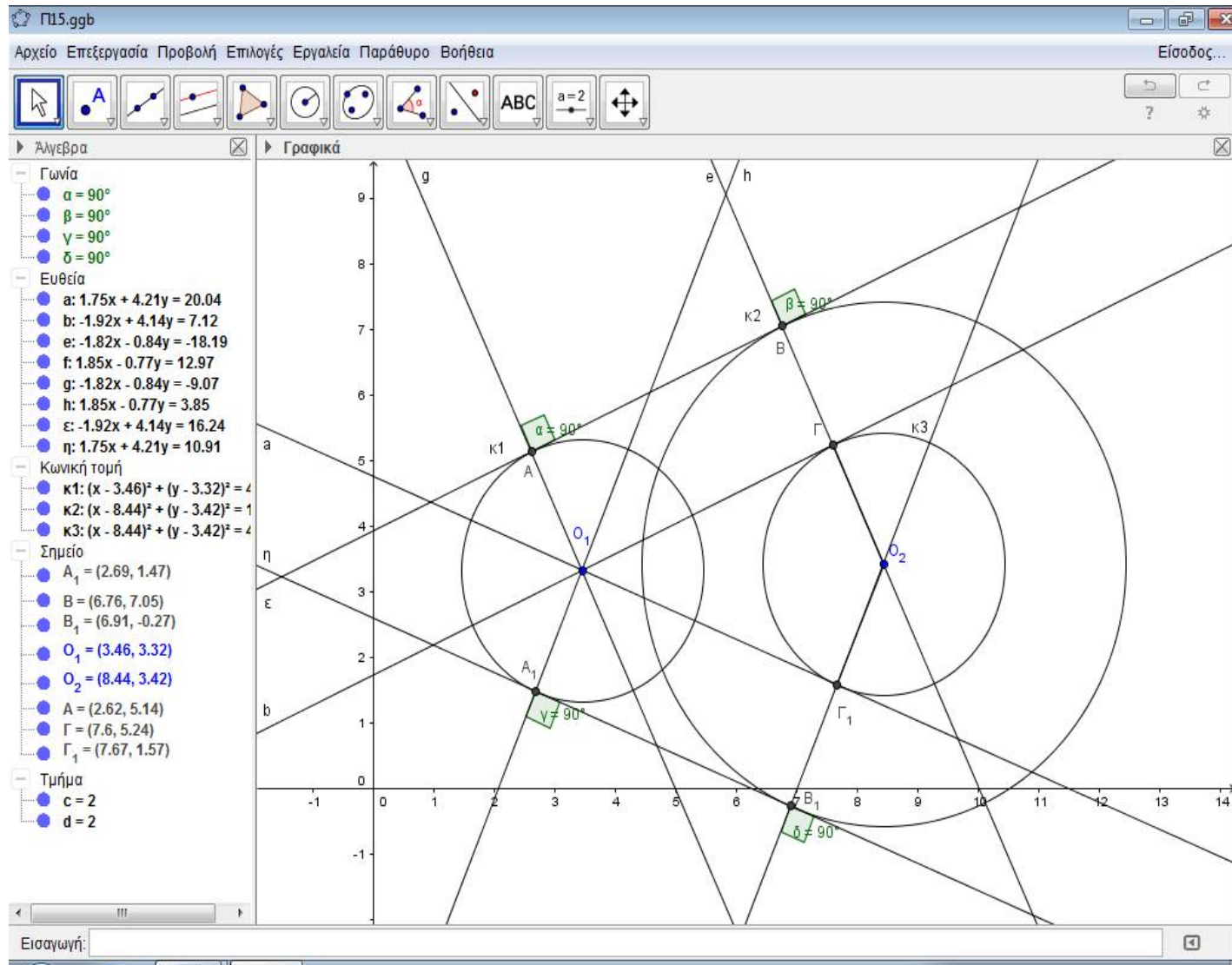
Κατασκευάζονται δύο τυχαία σημεία O_1 και O_2 και εν συνεχεία δύο κύκλοι $k_1(O_1, \rho=2)$ και $k_2(O_2, R=4)$. Εν συνεχεία κατασκευάζεται κύκλος $k_3(O_2, R-\rho=2)$.

Με την εντολή  Εφαπτόμενες κατασκευάζονται οι δύο εφαπτόμενες a, b , προς τον κύκλο k_3 και έστω Γ, Γ_1 τα δύο σημεία επαφής. Διαπιστώνεται δε ότι οι εν λόγω εφαπτόμενες διέρχονται από το σημείο O_1 . Κατασκευάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα $O_1\Gamma = \text{Τμήμα}[O_1, \Gamma]$ και $O_1\Gamma_1 = \text{Τμήμα}[O_1, \Gamma_1]$ και εν συνεχεία οι ευθείες e, f , διερχόμενες από τα ζεύγη σημείων O_2, Γ και $O_2\Gamma_1$, αντίστοιχα. Έστω B και B_1 τα δύο αντίστοιχα σημεία τομής των e, f με τον κύκλο k_2 .

Με την εντολή  Παράλληλη γραμμή κατασκευάζονται οι παράλληλες ευθείες $g//e$ και $h//f$ διερχόμενες από το σημείο O_1 . Οι κατασκευασμένες αυτές παράλληλες ευθείες τέμνουν τον κύκλο k_1 στα σημεία A και A_1 .


Τέλος, κατασκευάζονται οι ευθείες ε και η διερχόμενες από τα ζεύγη σημείων A, B και A_1, B_1 , αντίστοιχα. Υπολογίζονται οι τέσσερις γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ οι οποίες είναι ίσες με 90° . Οπότε οι κατασκευασμένες ευθείες ε και η είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες στους κύκλους k_1 και k_2 (Σχήμα 17).


Επίλυση σχολικών προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής με το GeoGebra (συνέχεια)





Επίλυση επιπλέον προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής με το GeoGebra

Παράδειγμα 19: Να κατασκευαστεί τρίγωνο γνωστών τριών σημείων του A, B και C. Με μετρηθούν οι εσωτερικές γωνίες B και C και η εξωτερική γωνία A. Επίσης να υπολογιστεί το εμβαδόν του.

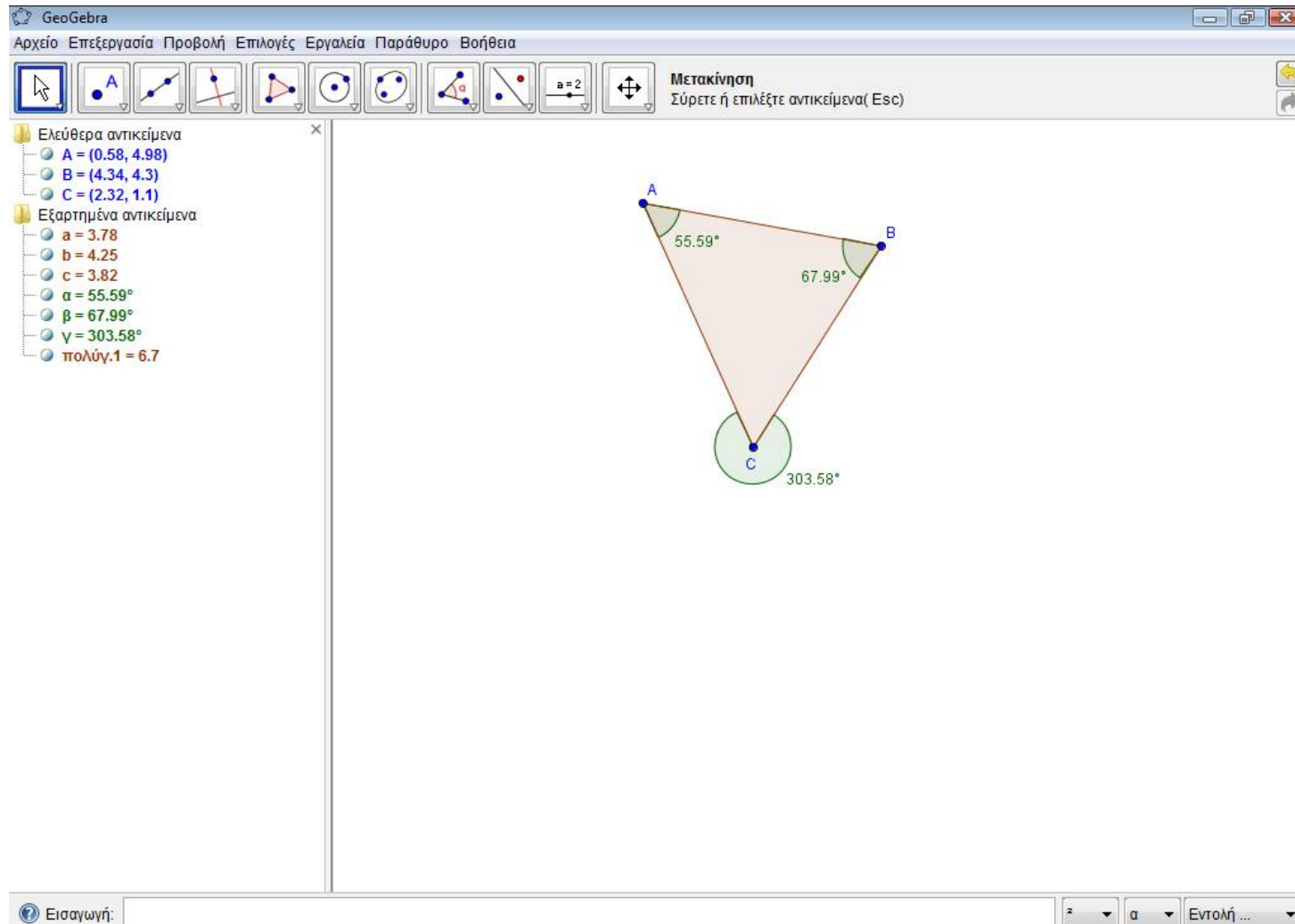
Επιλέξτε την εντολή **Νέο σημείο** στην μπάρα εργαλείων, δηλαδή την εντολή . Κάνουμε κλικ τρεις φορές στον πίνακα σχεδίασης για να δημιουργήσουμε τις τρεις κορυφές A, B και C του τριγώνου.

Εν συνεχεία, επιλέγουμε την εντολή **Πολύγωνο**, δηλαδή την , και ακολούθως κάνουμε αριστερό κλικ στα σημεία A, B και C. Για να ολοκληρωθεί η κατασκευή του τριγώνου με όνομα αυτού πολυγ.1, κάνουμε αριστερό κλικ στο σημείο A. Το εμβαδόν του τριγώνου παρουσιάζεται στο παράθυρο της άλγεβρας. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι **πολυγ.1=6.7**.

Για να εμφανιστούν όλες οι γωνίες ενός τριγώνου, επιλέγουμε την εντολή **Γωνία**, δηλαδή την εντολή , στη μπάρα εργαλείων και ακολούθως επιλέγουμε τις πλευρές του κατασκευασμένου τριγώνου. Για την εξωτερική γωνία A επιλέγουμε πρώτα AC και μετά CB, ενώ για τις ενώ για τις εσωτερικές B και C επιλέγουμε αντίστοιχα και με τη συγκεκριμένη σειρά AC, AB και AB, BC.

Επιλέγοντας **Μετακίνηση**, δηλαδή  και μετακινώντας τις κορυφές του τριγώνου, μπορούμε να αλλάξουμε δυναμικά το τρίγωνο. Μπορούμε επίσης να αποκρύψουμε το παράθυρο της άλγεβρας και τους άξονες συντεταγμένων χρησιμοποιώντας το μενού **Προβολή**, όπως φαίνεται και στην εικόνα που ακολουθεί (Σχήμα 21).

Επίλυση επιπλέον προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής με το GeoGebra (συνέχεια)



Συμπεράσματα

1. Για να μπορέσουν όλα αυτά να γίνουν πραγματικότητα και να προχωρήσουν στο μέλλον χρειάζεται πολύ δουλεία και συστηματική μάλιστα, από όλους τους εμπλεκόμενους.
2. Θα που πρέπει να γίνει είναι μία εμπειριστατωμένη μελέτη της υφισταμένης κατάστασης σε ότι αφορά το διαθέσιμο λογισμικό, τις εκπαιδευτικές ανάγκες που καλύπτονται από αυτό το υλικό και αυτές που μένει ή επιδιώκουμε να καλυφθούν.
3. Απαραίτητη είναι συνάμα η ενεργοποίηση της ευρύτερης εκπαιδευτικής κοινότητας για την ανάπτυξη ολοκληρωμένων εκπαιδευτικών φακέλων μαθήματος.

Συμπεράσματα (συνέχεια)

4. Κινητοποίηση των εκπαιδευτικών ώστε να διασφαλιστεί η ένταξη των μαθηματικών λογισμικών γενικότερα και ειδικότερα του GeoGebra.
5. Χρειάζεται συνεχής παρακολούθηση των εξελίξεων στις νέες τεχνολογίες και της εκπαιδευτικής αξιοποίησής τους σε παγκόσμιο επίπεδο.
6. Υιοθέτηση του σύγχρονου και του καινοτόμου θα πρέπει να γίνεται με περίσκεψη, ώστε να καταλήγουμε σε εργαλεία που είναι αρκετά ώριμα αλλά όχι ξεπερασμένα.
7. Σταδιακής προσαρμογής των προγραμμάτων σπουδών.

Συμπεράσματα (συνέχεια)

8. Στο πλαίσιο αυτής της μελέτης προτείνεται να τεθεί σε νέες βάσεις ο ρόλος των νέων τεχνολογιών.
9. Γεφύρωση του κενού ανάμεσα στην παραγωγή του φακέλου μαθήματος και τη χρήση και αξιοποίηση στην τάξη.
10. Θα πρέπει να οργανωθεί σε ευρεία και διαρκή βάση η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και να παρέχεται τεχνική και διδακτική υποστήριξη στους εκπαιδευτικούς.

Ερευνητική πρόταση

Σχετικά με την παράλληλη διδασκαλία της Γεωμετρίας και του λογισμικού GeoGebra, κατά τη διδασκαλία των προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής, προτείνεται η υλοποίηση εκπαιδευτικής έρευνας ώστε να διαπιστωθεί η διδακτική προσφορά του εν λόγω μαθηματικού εκπαιδευτικού λογισμικού κατά τη διδασκαλία μιας τόσο σημαντικής και δύσκολης έννοιας, αυτής των προβλημάτων γεωμετρικής κατασκευής.

Σας ευχαριστώ για την
προσοχή σας!