

ΑΝΩΤΑΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΣΕΡΡΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΙΤΛΟΣ ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΣΩΜΑΤΑ

ΦΟΙΤΗΤΗΣ : ΚΑΜΠΑΝΤΑΗΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ
ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Δρ. ΠΑΣΧΑΛΗΣ Κ. ΓΚΟΤΣΗΣ

ΣΕΡΡΕΣ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2004

Παραβίαση 14/1/2004
Ραυτός (9,0)

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο τομέας της Μηχανολογίας αν και εξελίσσεται με το πέρασμα των χρόνων παρόλα αυτά έχει να αντιμετωπίσει προβλήματα που στη βάση τους παραμένουν ίδια.

Η πτυχιακή αυτή εργασία περιλαμβάνει μία σειρά τέτοιων προβλημάτων που ο μηχανολόγος από τη πλευρά του καλείται να δώσει λύσεις στην πράξη.

Η συλλογή των προβλημάτων αυτών έγινε κυρίως από ξένη βιβλιογραφία.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Δρ. Πασχάλη Γκότση, καθηγητή του τμήματος Μηχανολογίας του Τ.Ε.Ι Σερρών για την πολύτιμη βοήθεια και συμβολή του στην ολοκλήρωση της εργασίας μου αυτής.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΤΡΕΨΗ

Συνοπτική θεωρία

Ασκήσεις (1.1 έως 1.20)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ N, Q, M

Συνοπτική θεωρία

Ασκήσεις (2.1 έως 2.23)

ΛΥΓΙΣΜΟΣ

Συνοπτική θεωρία

Ασκήσεις (3.1 έως 3.12)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Πίνακας I (μετατροπές μονάδων στο διεθνές σύστημα)

Βιβλιογραφία

ΣΤΡΕΨΗ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Η καταπόνηση σε στρέψη είναι ένα από τα είδη των απλών καταπονήσεων στην οποία καταπονούνται συνήθως ράβδοι αλλά και δοκοί. Μία ράβδος λέμε ότι καταπονείται σε στρέψη, όταν πάνω σε αυτήν ενεργούν ζεύγη ίσων και αντίθετων δυνάμεων που τα επίπεδα τους είναι κάθετα στον κεντροβαρικό άξονά της. Τα ζεύγη των δυνάμεων αυτών προκαλούν σε κάθε διατομή της ράβδου ροπή, που ονομάζεται ροπή στρέψης. Η ύπαρξη της ροπής στρέψης M_t δημιουργεί στο υλικό της ελαστικής ράβδου εσωτερικές διατμητικές τάσεις, με αποτέλεσμα να δημιουργείται μία στροφή των διατομών μεταξύ τους που ονομάζεται γωνία στροφής. Τα δύο προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίσουμε στην καταπόνηση της στρέψης είναι τόσο ο προσδιορισμός των διατμητικών τάσεων τ , οι οποίες ονομάζονται ειδικότερα τάσεις στρέψης, όσο και ο υπολογισμός της γωνίας στροφής των διατομών, που αντιπροσωπεύουν την προκαλούμενη παραμόρφωση.

Ο υπολογισμός της στρεπτικής (διατμητικής) τάσης τ για ράβδο με σταθερή κυκλική διατομή θα γίνει με την βοήθεια των παρακάτω σχέσεων:

$$\theta = \frac{\varphi}{L} \quad (1)$$

Όπου θ , είναι η ανηγμένη γωνία στροφής, φ είναι η γωνία στροφής και L το μήκος της ράβδου.

$$\tau = G \theta r \quad (2)$$

Όπου G , είναι το μέτρο ολίσθησης και ισούται με το λόγο της διατμητικής τάσης προς τη διατμητική παραμόρφωση γ , δηλαδή: $G = \tau / \gamma$ και r η απόσταση από το κέντρο της κυκλικής διατομής.

Από τη σχέση (2) προκύπτει το εξής συμπέρασμα: Η διατμητική τάση τ σε μία στρεφόμενη ράβδο μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση r από το κέντρο της κυκλικής διατομής, έχοντας μέγιστες τιμές τ_{\max} στα σημεία της εξωτερικής επιφάνειας, δηλαδή της περιφέρειας. Έτσι η στρεπτική διατμητική τάση στην τυχαία ακτίνα r , γράφεται:

$$\tau(r) = \frac{\tau_{\max}}{R} r \quad (3)$$

Η κατανομή των διατμητικών αυτών τάσεων κατά μήκος μίας διαμέτρου είναι τριγωνική, με μέγιστες τιμές στα άκρα της και μηδενική στο κέντρο της.

Σε μία στοιχειώδη επιφάνεια dF που έχει απόσταση r από το κέντρο της διατομής, ενεργεί στοιχειώδης δύναμη τdF , με ροπή ως προς το κέντρο του κύκλου $r \tau dF$. Θα πρέπει όμως η ροπή όλων των στοιχειωδών δυνάμεων ως προς το κέντρο να ισούται με τη στρεπτική ροπή M_t , δηλαδή:

$$M_t = \int_F r \tau dF$$

Αν λάβουμε υπόψη μας τη σχέση (2) η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$M_t = \int_F r^2 G \theta dF = G \theta \int_F r^2 dF = G \theta I_P \quad \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{M_t}{GI_P} \quad (4)$$

Όπου $I_P = \int_F r^2 dF$, είναι η πολική ροπή αδρανείας της κυκλικής διατομής

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι η ανηγμένη γωνία στροφής θ , είναι ανάλογη προς την στρεπτική ροπή M_t και αντιστρόφως ανάλογη προς το γινόμενο GI_P , που είναι γνωστό ως μέτρο δυστρεψιάς της ράβδου. Από το συνδυασμό των σχέσεων (2) και (4) τελικά βρίσκουμε τη διατμητική τάση:

$$\tau = \frac{M_t}{I_P} r \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας και την πολική ροπή αδρανείας του κύκλου, που είναι:

$$I_P = (\pi / 32) D^4 = (\pi / 2) R^4$$

Στην εξίσωση (5), η στρεπτική τάση για τη ράβδο κυκλικής διατομής, στην τυχαία ακτίνα r , δίδεται από τη σχέση:

$$\tau = \frac{32 M_t}{\pi D^4} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r \quad (6)$$

Η μέγιστη διατμητική στρεπτική τάση εμφανίζεται στα σημεία περιφέρειας, δηλαδή $r = R$, όποτε η εξίσωση (6) παίρνει την μορφή:

$$\tau_{\max} = \frac{16 M_t}{\pi D^3} = \frac{2 M_t}{\pi R^3} \quad (7)$$

Προφανώς, για να λειτουργεί με ασφάλεια η ράβδος έναντι της στρεπτικής ροπής M_t , πρέπει η μέγιστη αναπτυσσόμενη στρεπτική τάση τ_{\max} να ικανοποιεί τη συνθήκη αντοχής για το υλικό της ράβδου, δηλαδή να ικανοποιείται η συνθήκη αντοχής:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\varepsilon\pi}$$

Όπου $\tau_{\varepsilon\pi}$, είναι η επιτρεπόμενη τιμή της διατμητικής τάσης του υλικού της.

Για τον υπολογισμό της γωνίας φ από τη σχέση (1) έπεται ότι $\varphi = \theta L$, οπότε λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (4), έχουμε:

$$\varphi = \theta L = \frac{M_t L}{GI_P} \quad (8)$$

Η γωνία φ μετριέται σε rad, η δε ποσότητα GI_P/L ονομάζεται δυστρεψία της ράβδου. Υπάρχει και για τη γωνιακή παραμόρφωση μία μέγιστη επιτρεπόμενη ανηγμένη γωνία στροφής $\theta_{\varepsilon\pi}$ τέτοια ώστε, για να λειτουργεί με ασφάλεια η ράβδος, θα πρέπει να ικανοποιείται η παραμορφωσιακή συνθήκη:

$$\theta \leq \theta_{\varepsilon\pi} \quad (9)$$

Η τιμή της $\theta_{\varepsilon\pi}$ εξαρτάται κυρίως από τη φύση του υλικού της ράβδου, προβλέπεται από κανονισμούς και δίδεται σε ειδικούς πίνακες.

Για στρέψη ράβδου με ορθογωνική διατομή και διαστάσεις πλευρών b και h με $h > b$, η μέγιστη διατμητική τάση τ_{\max} που εμφανίζεται στο μέσον της πλευράς h , δίδεται από τη σχέση:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha b^2 h} \quad (10)$$

Η αντίστοιχη μέγιστη διατμητική τάση τ_μ στην πλευρά b , είναι:

$$\tau_\mu = n \tau_{\max} \quad (11)$$

Η ανηγμένη γωνία στροφής θ , είναι:

$$\theta = \frac{\varphi}{L} = \frac{M_t}{\beta G b^3 h} \quad (12)$$

Οι συντελεστές α , β , n εξαρτώνται από το λόγο h/b των πλευρών του ορθογωνίου και δίδονται στον πίνακα 1.

Για στρέψη λεπτότοιχου σωλήνα κυκλικής διατομής ο υπολογισμός της διατμητικής τάσης θα γίνει από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi r^2 t} \quad (13)$$

Όπου r , είναι η ακτίνα μέσης περιφέρειας και t είναι το πάχος τοιχώματος και $2\pi r t$ η διατομή του λεπτότοιχου δακτυλίου. Αντίστοιχα η γωνία στροφής φ είναι:

$$\varphi = \frac{M_t L}{GI_P} = \frac{M_t L}{2G\pi r^3 t} \quad (14)$$

Η μέγιστη διατμητική τάση θα εμφανιστεί στις θέσεις της διατομής με το μικρότερο πάχος, δηλαδή:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2F t_{\min}} \quad (15)$$

Όπου F, είναι το εμβαδόν της επιφάνειας της μέσης κεντρικής γραμμής. Από τις δύο εξισώσεις (14) και (15) προκύπτει για τη γωνία στρέψης:

$$\varphi = \frac{\tau s L}{2GF} \quad (16)$$

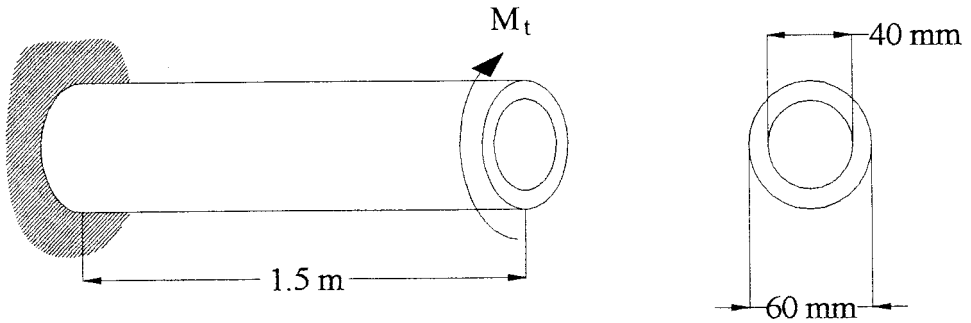
Όπου s, είναι το μήκος της περιφέρειας.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1
Συντελεστές για στρέψη ορθογωνικής διατομής

h/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

ΑΣΚΗΣΗ 1.1

Μια σωληνοειδής άτρακτος έχει μήκος 1.5 m, εσωτερική διάμετρο 40 mm και εξωτερική διάμετρο 60 mm σχ.(1). α) Ποιά είναι η μεγαλύτερη ροπή στρέψης που μπορεί να εφαρμοστεί όταν η διατμητική τάση δεν πρέπει να ξεπερνάει τα 120 MPa ; β) Ποιά είναι η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή της διατμητικής τάσης στην άτρακτο ;



ΛΥΣΗ

α) Η μεγαλύτερη ροπή στρέψης μπορεί να εφαρμοστεί όταν η διατμητική τάση δεν πρέπει να ξεπερνάει τα 120 MPa βρίσκεται από την σχέση :

$$M_t = \frac{I_P \tau_{\max}}{r} \quad (1)$$

Η πολική ροπή αδράνειας βρίσκεται από την σχέση $I_P = \pi/2(r_2^4 - r_1^4)$ όπου $r_1 = 1/2(40 \text{ mm}) = 0.02 \text{ m}$ και $r_2 = 1/2(60 \text{ mm}) = 0.03 \text{ m}$, αντικαθιστώντας έχουμε :

$$I_P = \pi/2(r_2^4 - r_1^4) = \pi/2(0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε την μεγαλύτερη ροπή στρέψης.

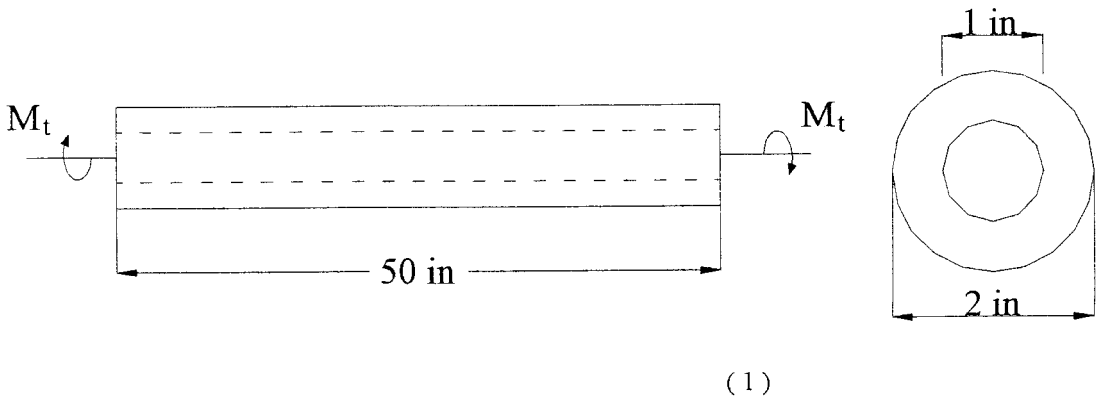
$$M_t = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(120 \times 10^6 \text{ Pa})}{0.03 \text{ m}} = 4.08 \text{ kNm}$$

β) Η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή της διατμητικής τάσης στην άτρακτο ~~εμφανίζεται~~ στην εσωτερική επιφάνεια της άτρακτου.

$$\tau_{\text{ελ}} = (r_1 / r_2) \tau_{\max} = \frac{0.02 \text{ m}}{0.03 \text{ m}} (120 \text{ MPa}) = 80 \text{ MPa}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2

Μία διμεταλλική ράβδος από αλουμίνιο ($G_a = 4 \times 10^3 \text{ ksi}$) που περιβάλλει εξωτερικά τον χαλύβδινο πυρήνα ($G_\chi = 11 \times 10^3 \text{ ksi}$) καταπονείται σε στρέψη από στρεπτική ροπή μεγέθους $M_t = 10 \text{ kip in}$. α) Να υπολογίσετε την μέγιστη διατμητική τάση στον χαλύβδινο πυρήνα και στο κέλυφος από αλουμίνιο που τον περιβάλλει. β) Να υπολογιστεί η ολική γωνία στρέψης της σύνθετης ράβδου.

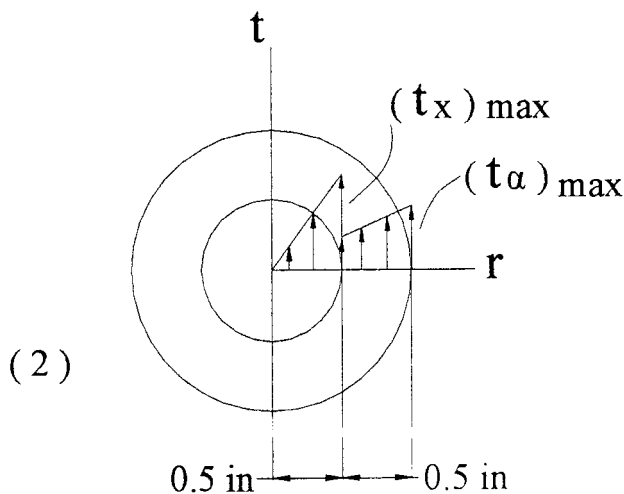


ΛΥΣΗ

α) Να υπολογίσετε την $(\tau_\chi)_{\max}$ και $(\tau_a)_{\max}$: οι δύο μέγιστες διατμητικές τάσεις φαίνονται στο σχ.(2). Αφού και τα δύο υλικά της είναι κολλημένα μαζί, θα έχουν και την ίδια ανοιγμένη γωνία στρώσης θ . Έτσι έχουμε :

$$\tau_\chi = G_\chi \theta r \quad 0 \leq r \leq 0.5 \text{ in} \quad (1\chi)$$

$$\tau_a = G_a \theta r \quad 0.5 \text{ in} \leq r \leq 1.0 \text{ in} \quad (1\alpha)$$



Ξέρουμε ότι η ανοιγμένη γωνία στροφής θ ισούται με την σχέση (2). Αντικαθιστώντας τα δεδομένα μας στη σχέση μπορούμε να βρούμε την τιμή της .

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} = \frac{M_t}{G_\chi I_{p\chi} + G_\alpha I_{p\alpha}} \quad (2)$$

$$\theta = \frac{10 \text{ kip in}}{[(11 \times 10^3 \text{ ksi})(\pi/2)(0.5 \text{ in})^4 + (4 \times 10^3 \text{ ksi})(\pi/2)[(1.0 \text{ in})^4 - (0.5 \text{ in})^4]]}$$

$$\theta = 1.4346 \cdot 10^{-3} \text{ rad / in} \quad (3)$$

Οπότε από την σχέση (1 χ) και για $r = 0.5 \text{ in}$ βρίσκουμε την $(\tau_\chi)_{\max}$.

$$(\tau_\chi)_{\max} = (11 \times 10^3 \text{ ksi})(0.5 \text{ in})(1.4346 \cdot 10^{-3} \text{ rad / in}) = 7.89 \text{ ksi}$$

Και από την σχέση (1 α) και για $r = 1.0 \text{ in}$ βρίσκουμε την $(\tau_\alpha)_{\max}$

$$(\tau_\alpha)_{\max} = (4 \times 10^3 \text{ ksi})(1.0 \text{ in})(1.4346 \cdot 10^{-3} \text{ rad / in}) = 5.74 \text{ ksi}$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα (2) η μέγιστη διατμητική τάση στον χαλύβδινο πυρήνα είναι μεγαλύτερη από ότι στο αλουμινένιο κέλυφος για αυτές τις διαστάσεις της σύνθετης ράβδου.

β) Να υπολογιστεί η ολική γωνία στρέψης της σύνθετης ράβδου.

$$\varphi = \theta L = (1.4346 \cdot 10^{-3} \text{ rad / in})(50 \text{ in})$$

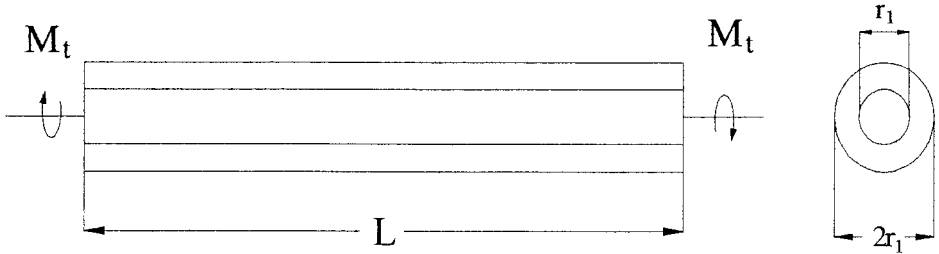
$$\varphi = 7.17 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

Εάν η ράβδος ήταν ομογενής (είτε από αλουμίνιο ή είτε από χάλυβα), η μέγιστη διατμητική τάση θα ήταν στην εξωτερική ακτίνα $r = 1.0 \text{ in}$ και θα την υπολογίζαμε από τον τύπο :

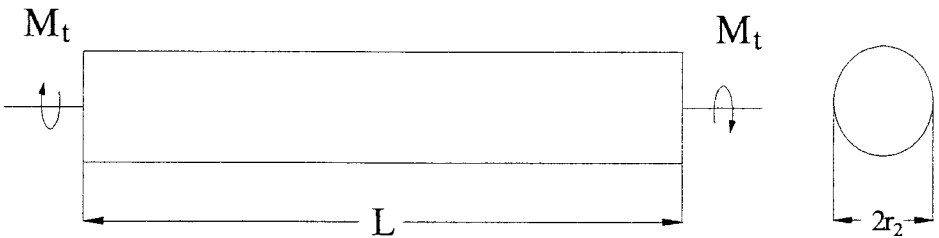
$$\tau_{\max} = \frac{M_t r}{I_p} = \frac{(10 \text{ kip in})(1.0 \text{ in})}{\pi/2 (1.0 \text{ in})^4} = 6.73 \text{ ksi}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.3

Μία σωληνοειδής άτρακτος μήκους L έχει εξωτερική ακτίνα r_1 και εσωτερική ακτίνα $r_1/2$ και είναι κατασκευασμένη από υλικό που έχει μέτρο διάτμησης G . Στα άκρα της ασκείται ροπή στρέψης μεγέθους M_t σχ.(1). α) Να καθορισθεί η μέγιστη διατμητική τάση τ_{max} για την άτρακτο του σχ.(1). β) Καθορίστε την γωνία στρέψης φ για την ίδια άτρακτο. γ) Εάν η ίδια ροπή στρέψης M_t εφαρμοστεί σε μία συμπαγή άτρακτο κυκλικής διατομής σχ.(2) έχοντας την ίδια μέγιστη διατμητική τάση τ_{max} με την πρώτη άτρακτο να βρεθεί η ακτίνα r_2 της ατράκτου.



(1)



(2)

ΛΥΣΗ

α) Να καθορισθεί η τ_{max} της ατράκτου.

$$\tau_{max} = \frac{M_t \tau_{max} r}{I_p}$$

$$I_{p1} = \frac{\pi}{2} \left[r_1^4 - \left(\frac{r_1}{2} \right)^4 \right] = \frac{15}{32} \pi r_1^4$$

$$\tau_{max1} = \frac{M_t r_1}{\frac{15}{32} (\pi r_1^4)} = \frac{32 M_t}{15 \pi r_1^3}$$

β) Καθορίστε την γωνία στρέψης φ , για την ίδια άτρακτο.

$$\varphi_1 = \frac{M_t L}{GI_{p1}} = \frac{32 M_t L}{15 \pi G r_1^4}$$

γ) Να βρεθεί η ακτίνα r_2 της ατράκτου όταν $\tau_{\max 2} = \tau_{\max 1}$ και $M_{t2} = M_{t1} = M_t$

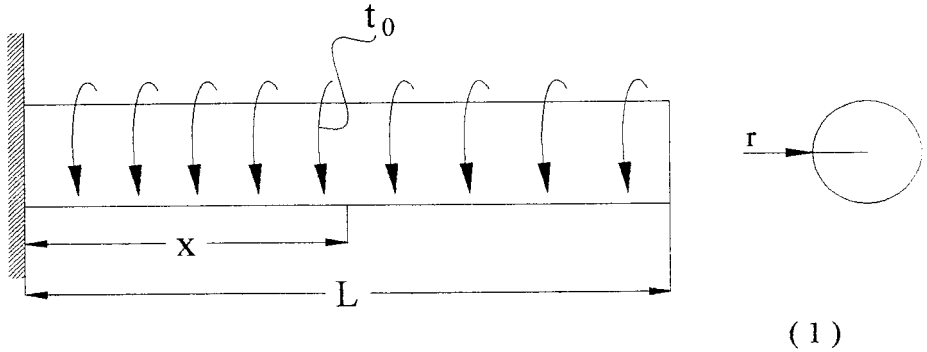
$$\tau_{\max 2} = \frac{M_{t_{\max 2}} r_2}{I_{p_2}} = \frac{M_t r_2}{\frac{\pi}{2} (r_2)^4} = \frac{2 M_t}{\pi r_2^3}$$

$$\tau_{\max 1} = \tau_{\max 2} \quad \text{Άρα} \quad \frac{32 M_t}{15 \pi r_1^3} = \frac{2 M_t}{\pi r_2^3}$$

$$\text{Οπότε} \quad r_2 = \left(\frac{15}{16} \right)^{1/3} \quad r_1 = 0.979 r_1$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.4

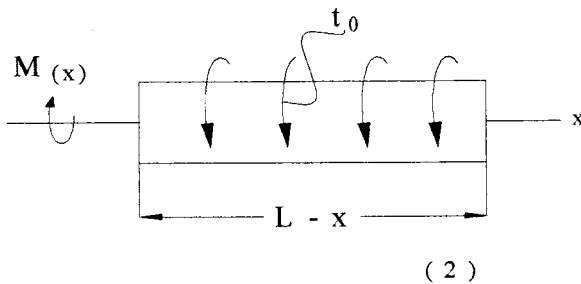
Μία σταθερή άτρακτος ακτίνας r και μήκους L υποβάλλεται σε κατανεμημένη εξωτερική ροπή στρέψης t_0 (ροπή ανά μονάδα μήκους) σχ.(1). α) Να καθοριστεί η μέγιστη διατμητική τάση τ_{\max} . β) Καθορίστε για την ολική γωνία στρόφης $\varphi = \varphi_L$.



ΛΥΣΗ

α) Να καθοριστεί η τ_{\max} : Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2) και την συνθήκη ισοροπίας για την ροπή έχουμε :

$$\Sigma M_x = M_t(x) = t_0(L - x) \quad (1)$$



Η μέγιστη διατμητική τάση εμφανίζεται όταν το $x = 0$, εκεί όπου $M_t(0) = M_{t\max} = t_0L$, έτσι έχουμε :

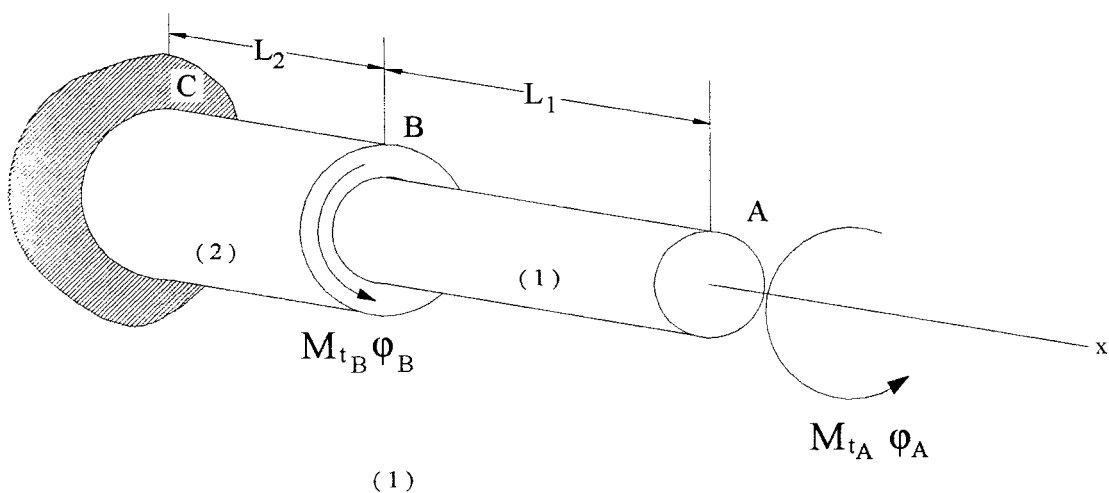
$$\tau_{\max} = \frac{M_t r}{I_p} = \frac{t_0 L r}{I_p} = \frac{t_0 L r}{\pi/2(r^4)} = \frac{2t_0 L}{\pi r^3} \quad (2)$$

β) Καθορίστε την ολική γωνία στρόφης φ_L .

$$\varphi_L = \frac{t_0 L^2}{2GI_p} = \frac{t_0 L^2}{\pi r^4 G}$$

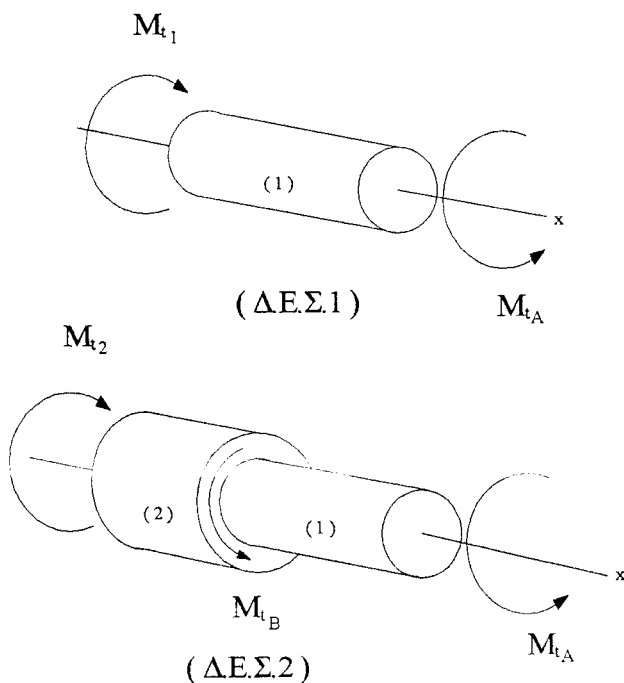
ΑΣΚΗΣΗ 1.5

Μία στατικά καθορισμένη ράβδος στρέψης δύο τμημάτων σχ.(1), δέχεται εξωτερικές στρεπτικές ροπές $(M_t)_A$ και $(M_t)_B$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, που έχουν γωνία στρέψης φ_A και φ_B . Οι στρεπτικές ροπές και οι γωνίες στρέψης είναι θετικές, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού για τον άξονα x. α) Να υπολογίσετε τις εσωτερικές στρεπτικές ροπές αντίστασης στα τμήματα (1) και (2). β) Να υπολογιστούν οι γωνίες στρέψης A και B.



ΛΥΣΗ

α) Να υπολογίσετε τις εσωτερικές στρεπτικές ροπές στα τμήματα (1) και (2): Από τα διαγράμματα ελευθέρων σωμάτων σχ.(2), στα οποία έχουμε αναλύσει τις άγνωστες ροπές M_{t1} και M_{t2} , μπορούμε να υπολογίσουμε από την συνθήκη ισορροπίας τις τιμές τους. Έτσι έχουμε :



$$\text{Από το (Δ.Ε.Σ.1) } \quad \Sigma M_x = 0$$

$$(M_t)_A - M_{t1} = 0$$

$$M_{t1} = (M_t)_A$$

$$\text{Από το (Δ.Ε.Σ.2) } \quad \Sigma M_x = 0$$

$$(M_t)_A - (M_t)_B - M_{t2} = 0$$

$$M_{t2} = (M_t)_A + (M_t)_B$$

β) Να υπολογιστούν οι γωνίες στροφής A και B.

Από την γεωμετρία της παραμορφώσεως έχουμε :

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_B = \varphi_2$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (1) και (2) :

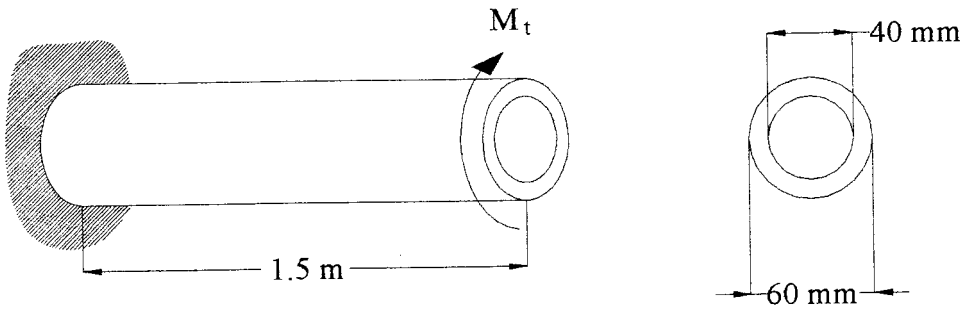
$$\varphi = \frac{M_t L}{G I_p}$$

$$\varphi_A = \frac{(M_t)_A L_1}{G_1 I_{p1}} + \frac{[(M_t)_A + (M_t)_B] L_2}{G_2 I_{p2}}$$

$$\varphi_B = \frac{[(M_t)_A + (M_t)_B] L_2}{G_2 I_{p2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.6

Ποιά είναι η ροπή στρέψης που πρέπει να εφαρμοστεί στο άκρο της ατράκτου για δημιουργηθεί γωνία δύο μοιρών ; Το μέτρο διάτμησης για τον χάλυβα είναι $G = 80 \text{ GPa}$.



ΛΥΣΗ

$$M_t = \frac{GI_p}{L} \varphi$$

Αντικαθιστώντας με τα δεδομένα που έχουμε :

$$G = 80 \times 10^9 \text{ Pa} \quad L = 1.5 \text{ m}$$

$$\varphi = 2^\circ \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \right) = 34.9 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

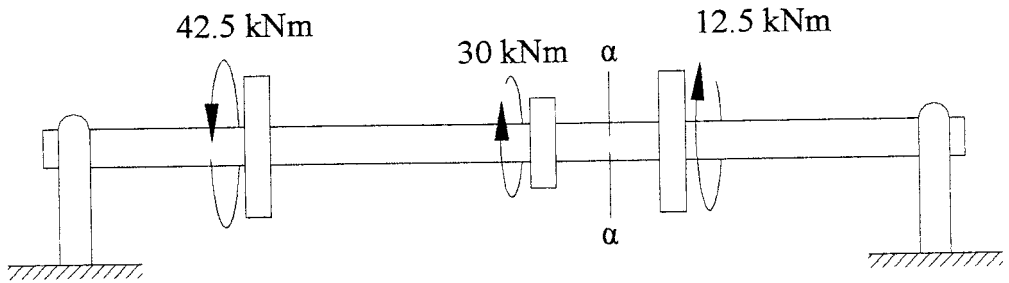
$$I_p = \pi/2 (r_2^4 - r_1^4) = \pi/2 (0.03^4 - 0.02^4) = 1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$M_t = \frac{GI_p}{L} \varphi = \frac{(1.021 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(80 \times 10^9 \text{ Pa})}{1.5 \text{ m}} \quad (34.9 \times 10^{-3} \text{ rad})$$

$$M_t = 1.900 \times 10^3 \text{ Nm} = 1.900 \text{ kNm}$$

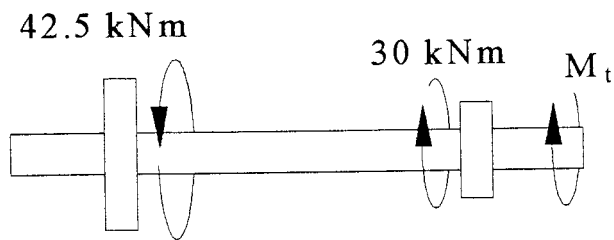
ΑΣΚΗΣΗ 1.7

Η άτρακτος του σχήματος (1) στηρίζεται από δύο βάσεις και εφαρμόζονται πάνω της τρεις ροπές στρέψης. Να υπολογίσετε την διατμητική τάση που ενεργεί στα σημεία A και B που βρίσκονται στην περιοχή α - α της άτρακτου.



ΛΥΣΗ

Η εσωτερική ροπή στην περιοχή α - α θα υπολογιστεί από διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το αριστερό τμήμα σχ.(2).



(2)

Οπότε έχουμε :

$$\Sigma M_x = 42.5 \text{ kNm} - 30 \text{ kNm} - M_t$$

$$M_t = 12.5 \text{ kNm}$$

Η πολική ροπή αδράνειας για την άτρακτο είναι :

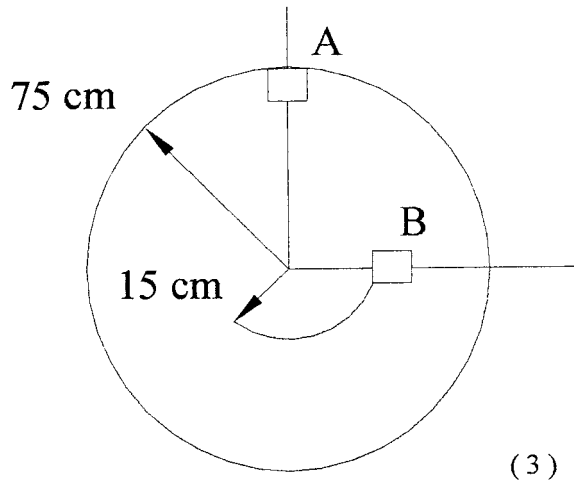
$$I_p = \pi / 2 (0.75 \text{ m})^4 = 0.497 \text{ m}^4$$

Αφού το σημείο A είναι στο $r = 0.75 \text{ m}$

$$\tau_A = \frac{M_t r}{I_P} = \frac{(12.5 \text{ kNm})(0.75 \text{ m})}{(0.497 \text{ m}^4)} = 18.9 \text{ kN/m}^2$$

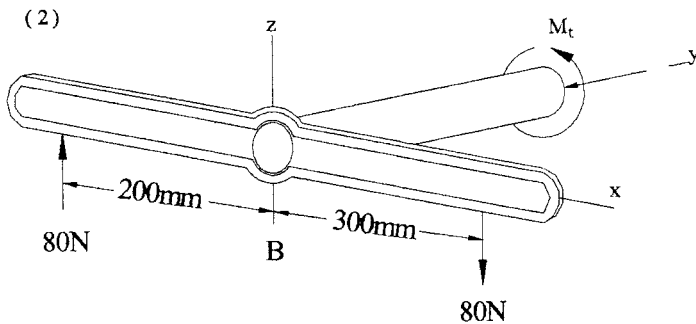
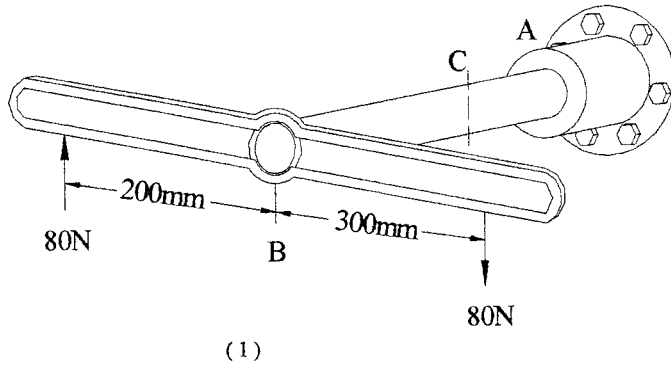
Για το σημείο B στο $r = 0.15 \text{ m}$ έχουμε :

$$\tau_B = \frac{M_t r}{I_P} = \frac{(12.5 \text{ kNm})(0.15 \text{ m})}{(0.497 \text{ m}^4)} = 3.77 \text{ kN/m}^2$$



ΑΣΚΗΣΗ 1.8

Ο σωλήνας της εικόνας (1) έχει εσωτερική διάμετρο 80 mm και εξωτερική διάμετρο 100 mm. Εάν το άκρο του σωλήνα είναι δεμένο σε μία βάση στο σημείο A και εφαρμόσουμε ροπή στρέψης στο κλειδί που βρίσκεται στο σημείο B, να υπολογιστεί η διατμητική τάση που αναπτύσσεται στο υλικό στα εσωτερικά και εξωτερικά τοιχώματα στο σημείο διατομής C του σωλήνα, όταν η δύναμη που ασκείται στο κλειδί είναι 80N.



ΛΥΣΗ

Εσωτερική στρέψη : η διατομή C βρίσκεται στο μέσο το σωλήνα κατά μήκος του άξονα y και ο μόνος άγνωστος παράγοντας είναι η εσωτερική στρέψη M_t . Οι εξισώσεις της δύναμης και της ροπής που βρίσκονται κατά μήκος των αξόνων x και z αντίστοιχα ικανοποιούνται, οπότε έχουμε :

$$\sum M_y = 80 \text{ N} (0.3 \text{ m}) + 80 \text{ N} (0.2 \text{ m}) - M_t = 0$$

$$M_t = 40 \text{ Nm}$$

Περιοχή διατομής : η πολική ροπή της αδράνειας για την περιοχή της διατομής είναι:

$$I_p = \pi / 2 [(0.05 \text{ m})^4 - (0.04 \text{ m})^4] = 5.80 (10^{-6}) \text{ m}^4$$

Διατμητική τάση : για κάθε σημείο που βρίσκεται στην εξωτερική επιφάνεια του σωλήνα $\rho = r_{εξ} = 0.05 \text{ m}$. Έτσι έχουμε :

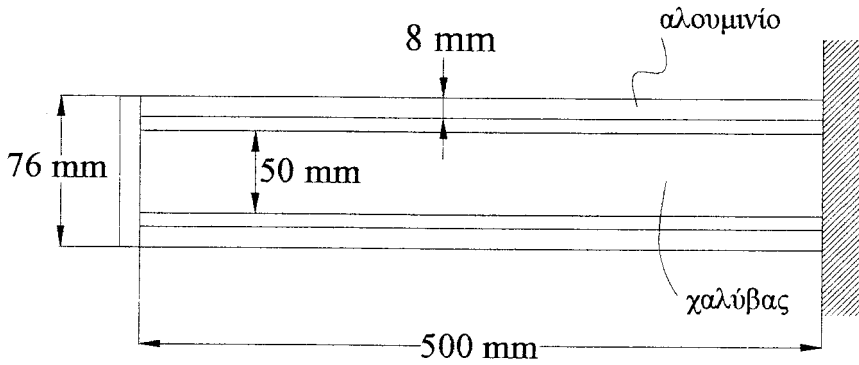
$$\tau_{εξ} = \frac{T r_{εξ}}{I_p} = \frac{40 \text{ Nm} (0.05 \text{ m})}{5.80 (10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.345 \text{ MPa}$$

Και για κάθε σημείο στην εσωτερική επιφάνεια $\rho = r_{εσ} = 0.04 \text{ m}$ έχουμε :

$$\tau_{εσ} = \frac{T r_{εσ}}{I_p} = \frac{40 \text{ Nm} (0.04 \text{ m})}{5.80 (10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.276 \text{ MPa}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.9

Μια χαλύβδινη άτρακτος και ένας αλουμινένιος σωλήνας είναι συνδεδεμένοι με πάκτωση στο ένα τους άκρο και με έναν άκαμπτο δίσκο στο άκρο της διατομής τους σχ.(1). Γνωρίζοντας ότι η αρχική τάση είναι μηδέν, να υπολογιστεί η μέγιστη στρεπτική ροπή που μπορεί να εφαρμοστεί στον δίσκο, εάν η επιτρεπόμενη διατμητική τάση είναι 120 MPa για την χαλύβδινη άτρακτο και 70 MPa για τον αλουμινένιο σωλήνα. ($G_{\chi} = 80 \text{ GPa}$, $G_{\alpha\lambda} = 27 \text{ GPa}$).

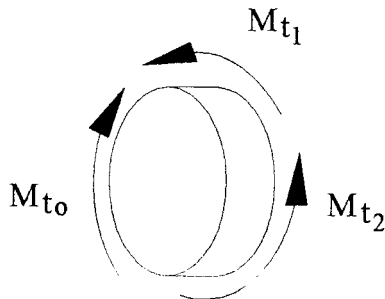


(1)

ΛΥΣΗ

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για τον δίσκο βλέπουμε ότι M_{t1} είναι η ροπή που ασκείται από τον σωλήνα στον δίσκο και M_{t2} η ροπή που ασκείται από την άτρακτο.

$$M_{to} = M_{t1} + M_{t2} \tag{1}$$



(2)

Αφού και ο σωλήνας και η άτρακτος συνδέονται με τον δίσκο έχουμε :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \frac{M_{t1} L_1}{G_{\alpha\lambda} I_{P1}} = \frac{M_{t2} L_2}{G_{\chi} I_{P2}} \quad (2)$$

Η πολική ροπή αδράνειας για τον αλουμινένιο σωλήνα και την χαλύβδινη άτρακτο είναι :

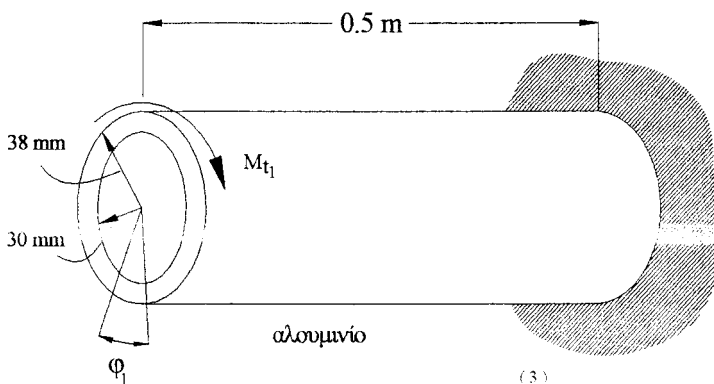
$$I_{P1} = \pi / 2 [(38)^4 - (30)^4] = 2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{P2} = \pi / 2 (r_2)^4 = \pi / 2 (25)^4 = 0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην εξίσωση (2) παίρνουμε :

$$\frac{M_{t1} (0.5 \text{ m})}{(2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(27 \text{ GPa})} = \frac{M_{t2} (0.5 \text{ m})}{(0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(80 \text{ GPa})}$$

$$M_{t2} = 0.908 M_{t1} \quad (3)$$



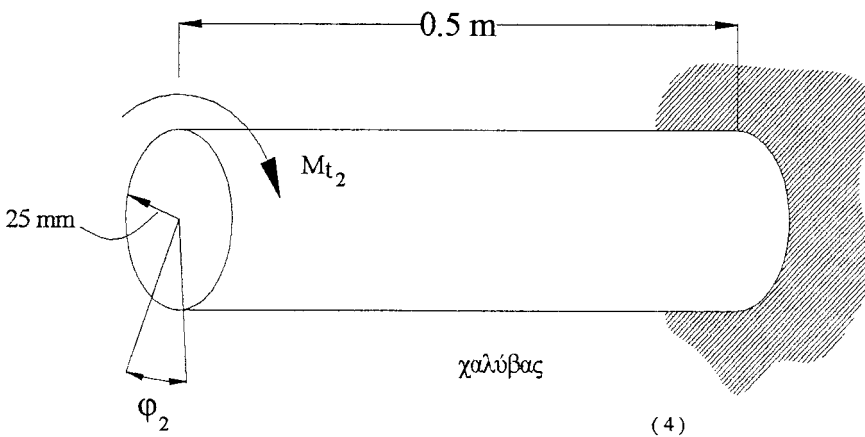
Υποθέτουμε ότι η διατμητική τάση για τον αλουμινένιο σωλήνα $\tau_{\alpha\lambda} \leq 70 \text{ MPa}$ είναι η κρίσιμη για τον υπολογισμό της μέγιστης ροπής. Έτσι θα έχουμε :

$$t_1 = \frac{\tau_{\alpha\lambda} I_{P1}}{r_1} = \frac{(70 \text{ MPa})(2.003 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.038 \text{ m}} = 3690 \text{ Nm}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή της στρεπτικής ροπής M_{t1} στην σχέση (3) βρίσκουμε την τιμή της M_{t2} και στην συνέχεια βρίσκουμε την μέγιστη διατμητική τάση για την άτρακτο από χάλυβα.

$$M_{t2} = 0.908 M_{t1} = 0.908(3690) = 3350 \text{ Nm}$$

$$\tau_x = \frac{M_{t2} r_2}{I_{P2}} = \frac{(3350 \text{ Nm})(0.025 \text{ m})}{0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 136.4 \text{ MPa}$$



Παρατηρούμε ότι έχουμε υπερβεί την επιτρεπόμενη διατμητική τάση των 120 MPa για τον χάλυβα $\tau_x > \tau_{\epsilon\pi} = 136.4 \text{ MPa} > 120 \text{ MPa}$, άρα η υπόθεση που κάναμε παραπάνω είναι λάθος .

Έτσι ο υπολογισμός της μέγιστης ροπής θα γίνει παίρνοντας σαν κρίσιμη διατμητική τάση την επιτρεπόμενη των 120 MPa του χάλυβα.

$$M_{t2} = \frac{\tau_x I_{p2}}{r_2} = \frac{(120 \text{ MPa})(0.614 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{0.025 \text{ m}} = 2950 \text{ Nm}$$

Από την σχέση (3) έχουμε :

$$M_{t2} = 0.908 M_{t1} = 2950 \text{ Nm} = 0.908 M_{t1}$$

$$M_{t1} = 3250 \text{ Nm}$$

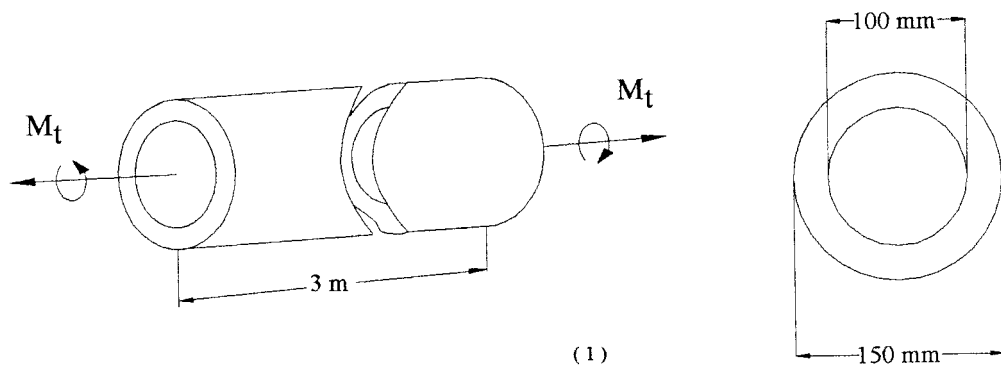
Αντικαθιστώντας στην σχέση (1) βρίσκουμε την μέγιστη στρεπτική ροπή.

$$M_{t0} = M_{t1} + M_{t2} = 3250 \text{ Nm} + 2950 \text{ Nm} = 6200 \text{ Nm}$$

$$M_{t0} = 6.20 \text{ kNm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.10

Ο προπαρασκευαστικός σχεδιασμός μιας μεγάλης ατράκτου που συνδέει έναν κινητήρα με μια γεννήτρια, απαιτεί την χρησιμοποίηση σωληνοειδούς ατράκτου με εσωτερική διάμετρο 100 mm και εξωτερική διάμετρο 150 mm. Γνωρίζοντας ότι η επιτρεπόμενη διατμητική τάση είναι 85 MPa, να υπολογίσετε την μέγιστη ροπή στρέψης που μπορεί να μεταδίδεται α) από την άτρακτο, όπως έχει σχεδιαστεί β) από μια συμπαγή άτρακτο ίδιου βάρους γ) από μια σωληνοειδή άτρακτο του ίδιου βάρους με εξωτερική διάμετρο 200 mm.

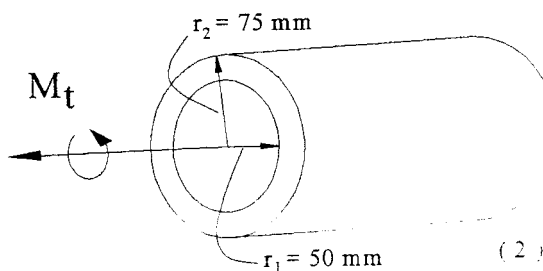


ΛΥΣΗ

α) Για την μέγιστη ροπή της σωληνοειδούς ατράκτου, όπως έχει σχεδιαστεί έχουμε :

$$I_P = \pi / 2 (r_2^4 - r_1^4) = \pi / 2 [(0.075 \text{ m})^4 - (0.050 \text{ m})^4] = 39.9 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t r_2}{I_P} \quad 85 \text{ MPa} = \frac{M_t (0.075 \text{ m})}{39.9 \times 10^{-6} \text{ m}^4} \quad M_t = 45.2 \text{ kNm}$$



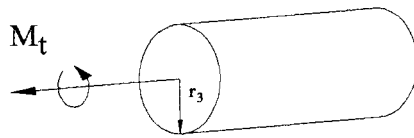
β) Για την συμπαγή άτρακτο και την σωληνοειδή άτρακτο, όπως έχει σχεδιαστεί, για να έχουν το ίδιο βάρος και το ίδιο μήκος οι διατομές τους πρέπει να είναι ίσες. Έτσι έχουμε :

$$F_{(\alpha)} = F_{(\beta)}$$

$$\pi [(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2] = \pi r_3^2 \quad r_3 = 55.9 \text{ mm}$$

Αφού $\tau_{\text{επ}} = 85 \text{ MPa}$, γράφουμε :

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_t r_3}{I_P} \quad 85 \text{ MPa} = \frac{M_t (0.0559 \text{ m})}{\pi / 2 (0.0559)^4} \quad M_t = 23.3 \text{ kNm}$$



(3)

γ) Για την σωληνοειδή άτρακτο με εξωτερική διάμετρο 200 mm για ίδιο βάρος οι διατομές τους πρέπει να είναι ίσες. Υπολογίζουμε την εσωτερική διάμετρο της άτρακτου γράφοντας :

$$F_{(\alpha)} = F_{(\gamma)}$$

$$\pi [(75 \text{ mm})^2 - (50 \text{ mm})^2] = \pi [(100 \text{ mm})^2 - r_5^2] \quad r_5 = 82.92 \text{ mm}$$

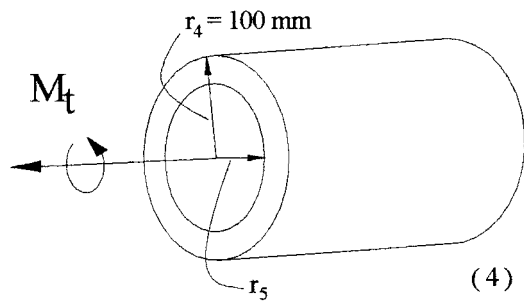
Οπότε για $r_5 = 82.92 \text{ mm}$ και $r_4 = 100 \text{ mm}$ έχουμε :

$$I_P = \pi / 2 [(0.100 \text{ m})^4 - (0.08292 \text{ m})^4] = 82.82 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Αφού $\tau_{\text{επ}} = 85 \text{ MPa}$ και $r_4 = 100 \text{ mm}$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_t r_4}{I_P} \quad 85 \text{ MPa} = \frac{M_t (0.100)}{82.82 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$M_t = 70.4 \text{ kNm}$$



ΑΣΚΗΣΗ 1.11

Μία σωληνοειδής άτρακτος έχει εσωτερική διάμετρο 30 mm και εξωτερική διάμετρο 42 mm. Χρησιμοποιείται για να μεταφέρει 90 kW ενέργειας. Υπολογίστε την συχνότητα περιστροφής της άτρακτου έτσι ώστε η διατμητική ροπή να μην ξεπερνάει τα 50 MPa .

ΛΥΣΗ

Η μέγιστη ροπή στρέψης που μπορεί να εφαρμοστεί πάνω στην άτρακτο υπολογίζεται από την σχέση :

$$t_{\max} = \frac{M_t r}{I_p}$$

$$50 (10^6) \text{ N / m}^2 = \frac{M_t (0.021 \text{ m})}{(\pi / 2) [(0.021 \text{ m})^4 - (0.015 \text{ m})^4]}$$

$$M_t = 538 \text{ Nm}$$

η συχνότητα της περιστροφής είναι :

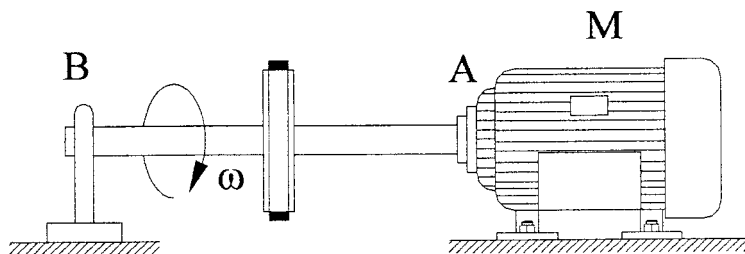
$$P = 2 \pi f M_t$$

$$90 (10^3) \text{ Nm / s} = 2 \pi f (538 \text{ Nm})$$

$$f = 26.6 \text{ Hz}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.12

Μία χαλύβδινη άτρακτος AB σχ.(1) χρησιμοποιείται για να μεταδίδει 5 hp από τον κινητήρα M με τον οποίο είναι συνδεδεμένη. Εάν η άτρακτος περιστρέφεται με $n = 175$ rpm και η επιτρεπόμενη ροπή στρέψης είναι $\tau_{επ} = 14.5 \times 10^3$ Pa. Να υπολογίσετε την απαιτούμενη διάμετρο της ατράκτου.



(1)

ΛΥΣΗ

Η ροπή στρέψης της ατράκτου υπολογίζεται από την σχέση $P = M_t \omega$. Έτσι έχουμε :

$$P = 5 \text{ hp} (745.7 \text{ W}) = 3728.5 \text{ W}$$

$$1 \text{ hp} = 745.7 \text{ W}$$

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi \cdot 175 \text{ rpm}}{60 \text{ sec}} = 18.33 \text{ rps}$$

Οπότε

$$P = M_t \omega = 3728.5 \text{ W} = M_t (18.33 \text{ rps}) \quad M_t = 203.5 \text{ Nm}$$

Η ακτίνα βρίσκεται από την παρακάτω σχέση :

$$\frac{I_p}{r} = \frac{\pi}{2} \frac{r^4}{r} = \frac{M_t}{\tau_{επ}}$$

$$r = \left(\frac{2 M_t}{\pi \tau_{επ}} \right)^{1/3} = \left(\frac{2 (203.5 \text{ Nm})}{\pi (14500 \text{ N / m}^2)} \right)^{1/3} \quad r = 0.21 \text{ m}$$

Άρα η απαιτούμενη διάμετρος είναι $d = 2r = 0.42 \text{ m}$

ΑΣΚΗΣΗ 1.13

Ένας ηλεκτροκινητήρας μεταδίδει 10 hp σε μια αντλία μέσω μίας κυκλικής ατράκτου που περιστρέφεται με $n = 875$ rpm. Αν η επιτρεπόμενη ροπή στρέψης είναι $\tau_{επ} = 20 \times 10^3$ Pa, ποιά είναι η ελάχιστη επιθυμητή διάμετρος της ατράκτου;

ΛΥΣΗ

Η στρέψη της ατράκτου υπολογίζεται από την σχέση $P = M_t \omega$. Έτσι έχουμε :

$$P = 10 \text{ hp} (745.7 \text{ W}) = 7457 \text{ W}$$

$$1 \text{ hp} = 745.7 \text{ W}$$

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi \cdot 875 \text{ rpm}}{60 \text{ sec}} = 91.63 \text{ rad / s}$$

Άρα

$$M_t = \frac{P}{\omega} = \frac{7457 \text{ W}}{91.63 \text{ rad / s}} = 81.38 \text{ Nm}$$

Ο υπολογισμός της διαμέτρου γίνεται από την σχέση :

$$\tau_{επ} \geq \tau_{\max} = \frac{M_t r}{I_P} \quad ; \quad (d_{\min})^3 = \frac{16 M_t}{\pi \tau_{επ}} = \frac{16 (81.38 \text{ Nm})}{\pi (20 \times 10^3 \text{ N / m}^2)}$$

$$d_{\min} = 0.27 \text{ m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.14

Ο άξονας ενός φορτηγού είναι ένας σωλήνας που έχει εξωτερική διάμετρο 46 mm, είναι κατασκευασμένος από χάλυβα με $\tau_{\varepsilon\pi} = 80$ MPa και χρησιμοποιείται για να μεταδίδει 120 kW με γωνιακή ταχύτητα 40 rps. Υπολογίστε με ακρίβεια χιλιοστού την μέγιστη εσωτερική διάμετρο που ο άξονας μπορεί να έχει.

ΛΥΣΗ

Η ροπή στρέψης της ατράκτου υπολογίζεται από την σχέση :

$$P = M_t \omega = M_t (2\pi n) \quad (1)$$

ή

$$M_t = \frac{P}{2\pi n} = \frac{120 \text{ kW}}{2\pi (40 \text{ rps})} = 477.5 \text{ Nm} \quad (2)$$

Από την επιτρεπόμενη ροπή στρέψης έχουμε :

$$\tau_{\varepsilon\pi} \geq \tau_{\max} = \frac{M_t r_{\varepsilon\xi}}{I_p} \quad (3)$$

$$I_p = \frac{\pi}{32} (d_{\varepsilon\xi}^4 - d_{\varepsilon\sigma}^4) \quad (4)$$

Όπου $d_{\varepsilon\sigma}$ η εσωτερική διάμετρος και $d_{\varepsilon\xi}$ η εξωτερική διάμετρος. Από τις εξισώσεις (3) και (4) παίρνουμε :

$$d_{\varepsilon\sigma}^4 \leq d_{\varepsilon\xi}^4 = \frac{16 d_{\varepsilon\xi} M_t}{\pi \tau_{\varepsilon\pi}} \quad (5)$$

Τελικά , από τις εξισώσεις (2) και (5) μπορούμε να υπολογίσουμε την μέγιστη διάμετρο που πρέπει να έχει η άτρακτος.

$$d_{\varepsilon\sigma}^4 \leq (46 \cdot 10^{-3} \text{ m})^4 - \frac{16(46 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{\pi} \left(\frac{477.5 \text{ Nm}}{80 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2} \right) \quad (6)$$

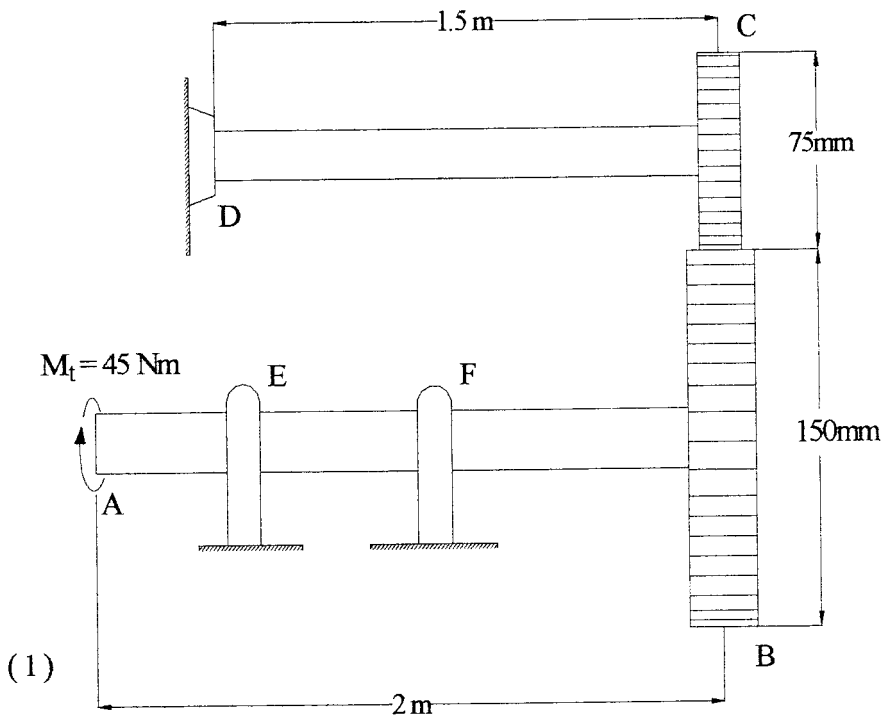
$$(d_{\varepsilon\sigma})_{\max} = 41.89 \text{ mm}$$

Παρόλου που η τιμή της $(d_{\varepsilon\sigma})_{\max}$ είναι πολύ κοντά στα 42 mm θα πρέπει να διαλέξουμε για εσωτερική διάμετρο την τιμή $d_{\varepsilon\sigma} = 40 \text{ mm}$ για να διατηρήσουμε τη σχέση :

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\varepsilon\pi}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.15

Οι δύο ενιαίοι χαλύβδινοι άξονες σχ.(1) είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους με συμπλεκόμενα γρανάζια. Να υπολογίσετε την γωνία στροφής του άκρου A του άξονα AB, όταν η ροπή στρέψης είναι $M = 45 \text{ Nm}$, και το μέτρο διάτμησης του χάλυβα είναι $G = 80 \text{ GPa}$. Ο άξονας AB είναι ελεύθερος να περιστρέφεται ανάμεσα στις βάσεις E και F. Ο άξονας DC είναι πακτωμένος στο άκρο D. Η διάμετρος των δυο αξόνων είναι 20 mm .



ΛΥΣΗ

Η εφαπτομενική αντίδραση ανάμεσα στα γρανάζια είναι :

$$F = 45 \text{ Nm} / 0.15 \text{ m} = 300 \text{ N}$$

Η αντίδραση αυτή δημιουργεί ροπή στρέψης στον άξονα DC που ισούται με :

$$M_t = 300 \text{ N} (0.075 \text{ m}) = 22.5 \text{ Nm}$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την περιστροφή του γραναζιού C που οφείλεται στην ροπή στρέψης $M_t = 22.5 \text{ Nm}$. Η γωνία στροφής του είναι :

$$\Phi_C = \frac{M_t L_{DC}}{GI_p} = \frac{(22.5 \text{ Nm})(1.5 \text{ m})}{(\pi / 2) (0.010 \text{ m})^4 [80 (10^9) \text{ N} / \text{m}^2]} = 0.0269 \text{ rad}$$

Αφού τα γρανάζια είναι εμπλεκόμενα, η γωνία στροφής Φ_C του γραναζιού C προκαλεί στο γρανάζι B την γωνία στροφής Φ_B που ισούται με :

$$\Phi_B (0.15 \text{ m}) = (0.0269 \text{ rad})(0.075 \text{ m}) = 0.0314 \text{ rad}$$

Θα υπολογίσουμε την γωνία στροφής του άκρου A ως προς το άκρο B του άξονα AB που οφείλεται στην ροπή στρέψης $M_t = 45 \text{ Nm}$ οπότε έχουμε :

$$\Phi_{A/B} = \frac{M_{tAB} L_{AB}}{GI_p} = \frac{(45 \text{ Nm})(2 \text{ m})}{(\pi/2)(0.010 \text{ m})^4 [80(10^9) \text{ N/m}^2]}$$

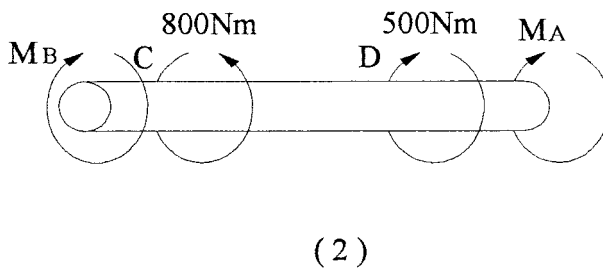
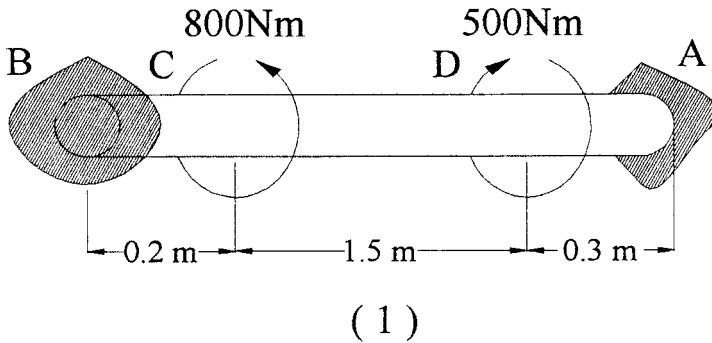
$$\Phi_{A/B} = 0.0716 \text{ rad}$$

Η περιστροφή του άκρου A θα υπολογιστεί από την πρόσθεση του Φ_B και του $\Phi_{A/B}$, αφού και οι δύο γωνίες είναι στην ίδια κατεύθυνση. Έχουμε :

$$\Phi_A = \Phi_B + \Phi_{A/B} = 0.0314 \text{ rad} + 0.0716 \text{ rad} = 0.0850 \text{ rad}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.16

Μία χαλύβδινη ράβδος κυκλικής σταθερής διατομής σχ.(1), είναι πακτωμένη στα άκρα A και B. Αν φορτίζεται από τις ροπές M_A και M_B να βρεθούν οι ροπές αντίδρασης στα πακτωμένα άκρα A και B.



ΛΥΣΗ

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2) και την συνθήκη ισορροπίας έχουμε :

$$\Sigma M_x = 0 \quad - M_B + 800 - 500 - M_A = 0 \quad (1)$$

Αφού και τα δύο άκρα της ράβδου είναι πακτωμένα, η γωνία περιστροφής του ενός άκρου πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι έχουμε :

$$\varphi_{A/B} = 0$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε :

$$\frac{-M_B (0.2 \text{ m})}{GI_P} + \frac{(M_A + 500 \text{ Nm})(1.5 \text{ m})}{GI_P} + \frac{M_A (0.3 \text{ m})}{GI_P} = 0$$

ή

$$1.8 M_A - 0.2 M_B = -750 \quad (2)$$

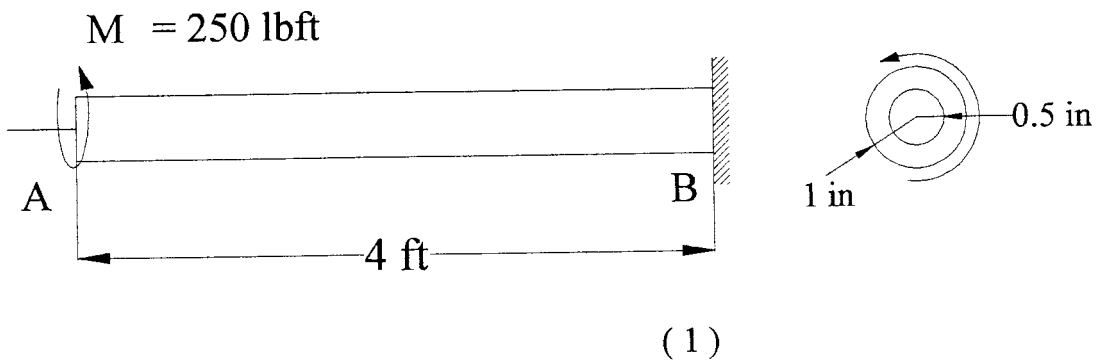
Λύνοντας τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει :

$$M_A = -345 \text{ Nm} \quad M_B = 645 \text{ Nm}$$

Παρατηρούμε ότι η M_A ενεργεί με αντίθετη φορά από ότι στο (Δ.Ε.Σ.) σχ.(2)

ΑΣΚΗΣΗ 1.17

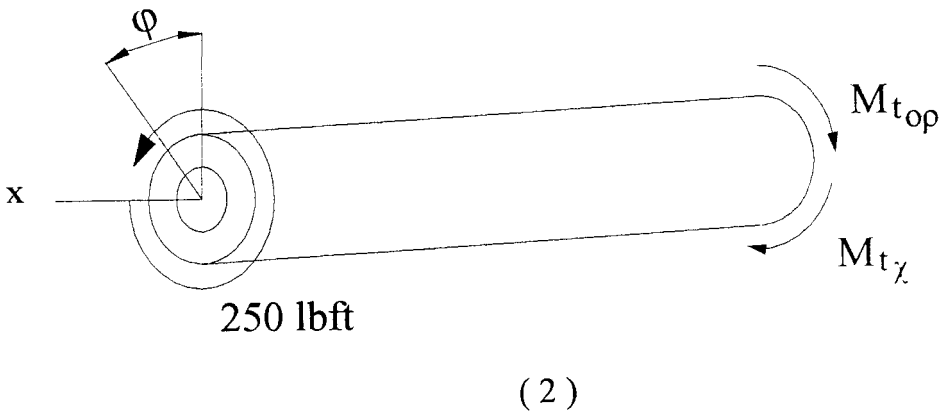
Η άτρακτος στο σχήμα (1) είναι ένας σωλήνας κατασκευασμένος από χάλυβα που είναι συγκολλημένος με έναν ορειχάλκινο πυρήνα. Εάν η ροπή στρέψης M_t εφαρμόζεται στο άκρο του, να σχεδιάσετε την κατανομή διατμητικής δύναμης και έντασης κατά μήκος μιας ακτινικής γραμμής στην διατομή του. Τα μέτρα διάτμησης για τον χάλυβα είναι $G_\chi = 11.4 \cdot 10^3$ ksi και για τον ορειχάλκο $G_{op} = 5.20 \cdot 10^3$ ksi.



ΛΥΣΗ

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2) έχουμε :

$$-M_{t\chi} - M_{top} + 250 \text{ lbft} (12 \text{ in} / \text{ft}) = 0 \quad (1)$$



Η γωνία στρέψης του άκρου A πρέπει να είναι η ίδια και για τον **χάλυβα και για τον ορειχάλκο** $\varphi = \varphi_\chi = \varphi_{op}$. Έτσι από την σχέση

$$\varphi = \frac{M_t L}{G I_p} \quad \text{θα έχουμε :}$$

$$\frac{M_{tx}L}{(\pi/2)[(1\text{ in})^4 - (0.5\text{ in})^4] 11.4(10^3)\text{ kip/in}^2} = \frac{M_{top}L}{(\pi/2)(0.5\text{ in})^4 5.20(10^3)\text{ kip/in}^2}$$

$$M_{tx} = 32.88M_{top} \quad (2)$$

Λύνοντας τις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε :

$$M_{tx} = 2911.0\text{ lb in} = 242.6\text{ lbft}$$

$$M_{top} = 88.5\text{ lb in} = 7.38\text{ lbft}$$

Αυτές οι ροπές ενεργούν σε ολόκληρο το μήκος της ατράκτου, αφού καμία εξωτερική ροπή στρέψης δεν ενεργεί στα ενδιάμεσα σημεία κατά μήκος του άξονα της ατράκτου. Η διατμητική τάση στον πυρήνα του ορείχαλκου ποικίλει από μηδέν στο κέντρο του μέχρι το μέγιστο κοντά στο σημείο όπου γίνεται η επαφή με τον χάλυβα. Έτσι έχουμε :

$$(\tau_{op})_{max} = \frac{(88.5\text{ lb in})(0.5\text{ in})}{(\pi/2)(0.5\text{ in})^4} = 451\text{ psi}$$

Για τον χάλυβα η ελάχιστη διατμητική τάση είναι επίσης στο σημείο επαφής των δυο υλικών. Έτσι θα έχουμε :

$$(\tau_{\chi})_{ελ} = \frac{(2911.0\text{ lb in})(0.5\text{ in})}{(\pi/2)[(1\text{ in})^4 - (0.5\text{ in})^4]} = 988\text{ psi}$$

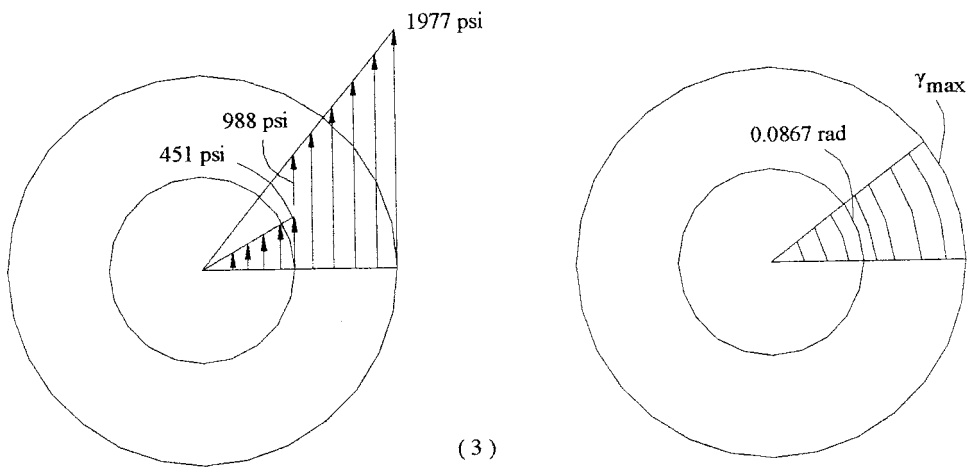
Και η μέγιστη διατμητική τάση στην εξωτερική επιφάνεια είναι :

$$(\tau_{\chi})_{max} = \frac{(2911.0\text{ lb in})(1\text{ in})}{(\pi/2)[(1\text{ in})^4 - (0.5\text{ in})^4]} = 1997\text{ psi}$$

Τα αποτελέσματα έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα (3). Παρατηρούμε την ασυνέχεια της διατμητικής τάσης στην περιοχή που ο χάλυβας και ο ορείχαλκος ενώνονται.

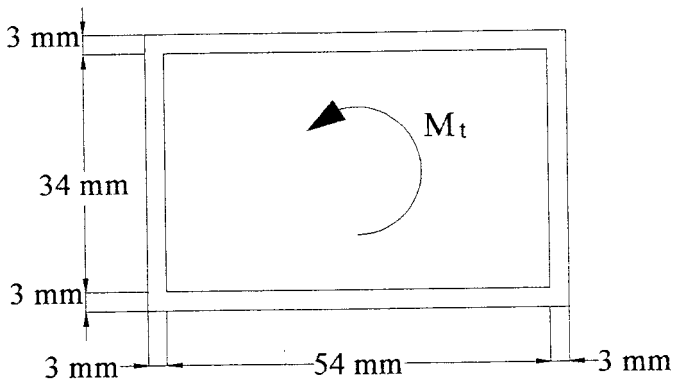
Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού τα υλικά έχουν διαφορετικό συντελεστή ακαμψίας(ο χάλυβας είναι πιο σκληρός από τον ορείχαλκο και έτσι αντέχει περισσότερη διατμητική τάση στο σημείο επαφής). Παρόλα αυτά η διατμητική τάση είναι ασυνεχής, η ένταση όμως δεν είναι και είναι κοινή και για τον χάλυβα και για τον ορείχαλκο. Έτσι εφαρμόζοντας την σχέση $\tau = \gamma G$ έχουμε :

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{451 \text{ psi}}{5200 \text{ psi}} = \frac{988 \text{ psi}}{11400 \text{ psi}} = 0.0867 \text{ rad}$$

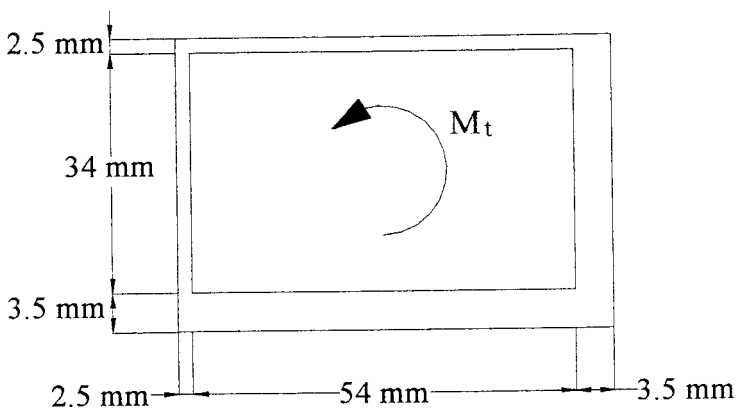


ΑΣΚΗΣΗ 1.18

α) Να υπολογίσετε την μέγιστη ροπή στρέψης που μπορεί να εφαρμοστεί σε έναν αγωγό κατασκευασμένο από κράμα αλουμινίου, εάν η επιτρεπόμενη διατμητική τάση είναι $\tau_{επ} = 100 \text{ MPa}$. Η διατομή του αγωγού φαίνεται στο σχήμα (1). β) Κατά την διαμόρφωση του αγωγού η οπή του δεν ήταν ακριβώς εφαρμοσμένη στο κέντρο και έτσι οι διαστάσεις του δεν είναι ίσες σχ.(2). Εάν η ροπή στρέψης που εφαρμόζεται στο πρώτο ερώτημα εφαρμοστεί στον αγωγό με τις άνισες διαστάσεις σχ.(2), ποιά θα είναι η μέγιστη ροπή στρέψης ; Πού θα εμφανιστεί αυτή η μέγιστη ροπή στρέψης ;



(1)



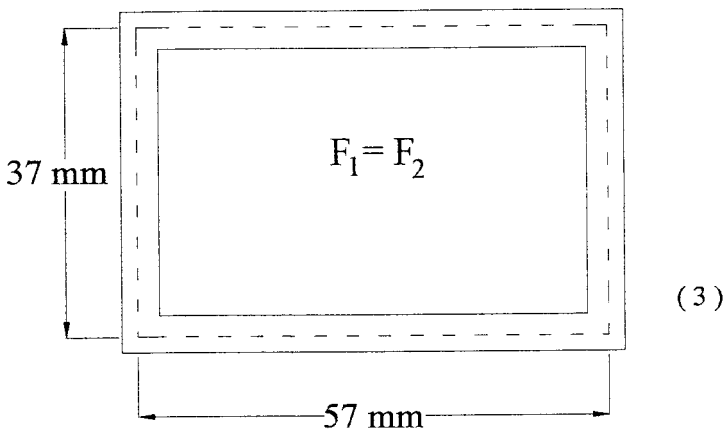
(2)

ΛΥΣΗ

α) Η επιτρεπόμενη ροπή στρέψης για τον τέλειο αγωγό θα βρεθεί από την σχέση :

$$M_{τεπ} = 2F t_{\min} \tau_{επ} \quad (1)$$

Από το σχήμα (3) θα υπολογίσουμε το εμβαδόν της επιφάνειας της μέσης κεντρικής γραμμής .



$$F_1 = F_2 = (37 \text{ mm})(57 \text{ mm}) = 2.109 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (2)$$

Το ελάχιστο πάχος των τοιχωμάτων είναι 3 mm. Γι' αυτό από τις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε :

$$\begin{aligned} (M_{t1})_{\varepsilon\pi} &= 2F_1 (t_1)_{\min} \tau_{\varepsilon\pi} \\ &= 2(2.109 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2)(0.003 \text{ m})(100 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2) \end{aligned}$$

$$(M_{t1})_{\varepsilon\pi} = 1265 \text{ Nm} \quad (3)$$

β) Να υπολογιστεί η μέγιστη διατμητική τάση στον ατελή αγωγό. Σε αυτήν την περίπτωση η σχέση (1) γράφεται :

$$M_{t2} = 2F_2 (t_2)_{\min} (\tau_2)_{\max} \quad (4)$$

Αφού $F_1 = F_2$ και οι δύο αγωγοί έχουν την ίδια ροπή στρέψης από συνδυασμό των εξισώσεων (3) και (4) ,παίρνουμε :

$$(\tau_2)_{\max} = \tau_{\varepsilon\pi} [(t_1)_{\min} / (t_2)_{\min}] = 100 \text{ MPa} [0.003 \text{ m} / 0.0025 \text{ m}]$$

Όποτε η μέγιστη διατμητική τάση στον ατελή αγωγό είναι στα τοιχώματα που έχουν το ελάχιστο πάχος και η τιμή της είναι :

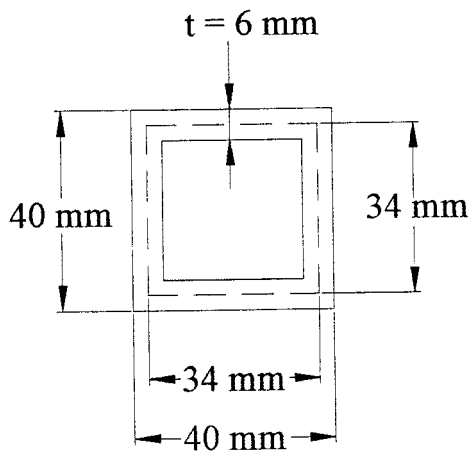
$$(\tau_2)_{\max} = 120 \text{ MPa}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η διατμητική τάση και στους δύο αγωγούς είναι αντιστρόφος ανάλογη στο ελάχιστο πάχος των τοιχωμάτων.

Αντικαθιστώντας $\tau = \tau_{ολ} = 40 \text{ GPa}$ και $t = 6 \text{ mm}$, βρίσκουμε την στρεπτική ροπή.

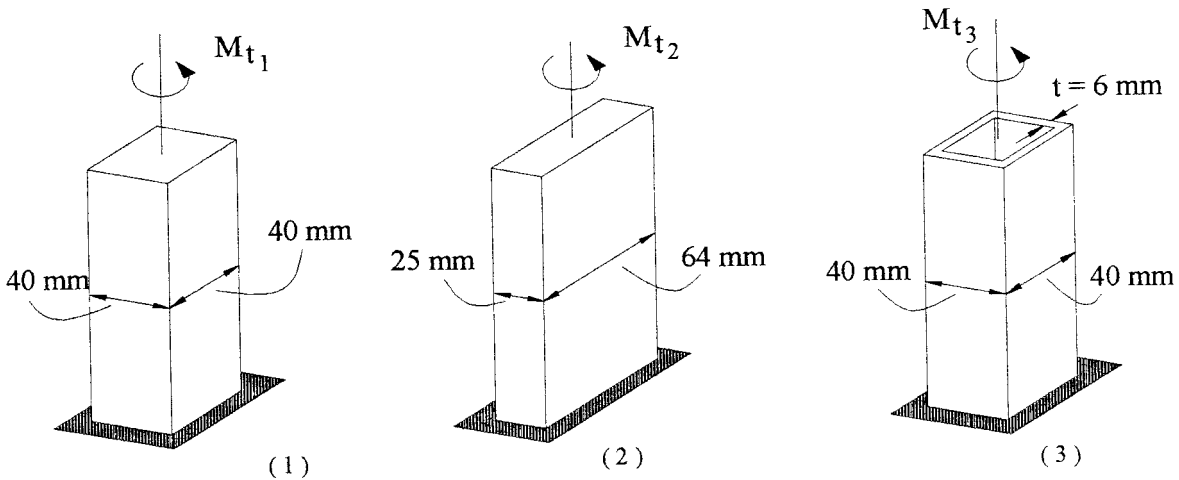
$$\tau = \frac{M_t}{2 F t} \qquad 40 \text{ GPa} = \frac{M_t}{2 (0.006 \text{ m}) (1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2)}$$

$$M_t = 555 \text{ Nm}$$



ΑΣΚΗΣΗ 1.19

Να υπολογίσετε την μεγαλύτερη στρεπτική ροπή που μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε μία από τις χάλκινες ράβδους και τον χάλκινο σωλήνα σχ.(1). Οι δύο συμπαγείς ράβδοι έχουν την ίδια επιφάνεια διατομής και η τετράγωνη ράβδος με τον τετράγωνο σωλήνα έχουν τις ίδιες εξωτερικές διαστάσεις. Η διατμητική τάση είναι $\tau_{\text{ολ}} = 40 \text{ GPa}$ και για τις ράβδους και για τον σωλήνα.



ΛΥΣΗ

Για την συμπαγή ράβδο με την τετράγωνη επιφάνεια διατομής η μέγιστη διατμητική τάση δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_t}{\alpha b^2 h}$$

Όπου α_1 είναι συντελεστής για στρέψη ορθογωνικής διατομής(Πίνακας1)

$$h = b = 0.040 \text{ m}$$

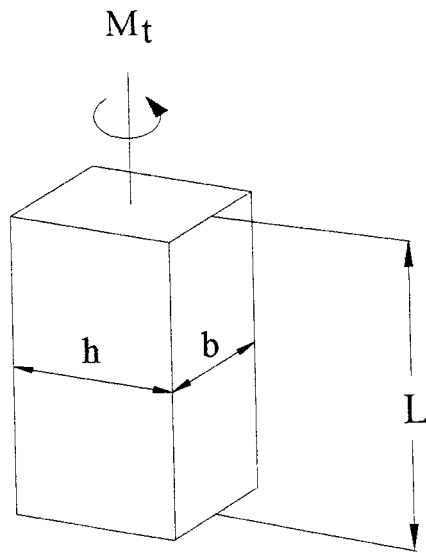
$$h / b = 1.00$$

$$\alpha = 0.208$$

Για $\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{ολ}} = 40 \text{ GPa}$ έχουμε :

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{t1}}{\alpha b^2 h} \quad 40 \text{ GPa} = \frac{M_{t1}}{0.208(0.040 \text{ m})^3}$$

$$M_{t1} = 532 \text{ Nm}$$



Για την συμπαγή ράβδο με την ορθογώνια επιφάνεια διατομής έχουμε :

$$h = 0.064 \text{ m} \quad b = 0.025 \text{ m} \quad h / b = 2.56 \quad \alpha = 0.256$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{\alpha b^2 h} \quad 40 \text{ MPa} = \frac{M_t}{0.256 (0.025 \text{ m})^2 (0.064 \text{ m})}$$

$$M_t = 414 \text{ Nm}$$

Για τον ορθογώνιο σωλήνα που έχει πάχος $t = 6 \text{ mm}$, η διατμητική τάση θα βρεθεί από την σχέση :

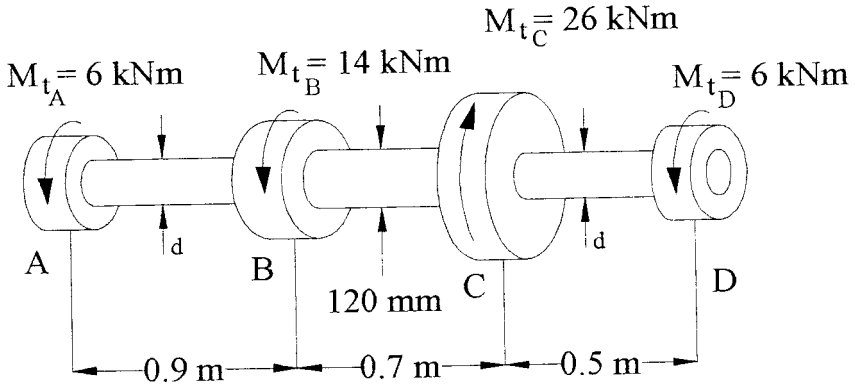
$$\tau = \frac{M_t}{2 F t}$$

Όπου F είναι η επιφάνεια στην οποία υπάρχει η μέση περίμετρος της διατομής. Έτσι έχουμε :

$$F = (0.034 \text{ m})(0.034 \text{ m}) = 1.156 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.20

Η άτρακτος BC είναι σωληνοειδής με εσωτερική διάμετρο 90 mm και εξωτερική διάμετρο 120 mm. Οι άτρακτοι AB και CD είναι συμπαγείς με διάμετρο d. α) Να υπολογίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη διατμητική τάση για την άτρακτο BC. β) Την απαιτούμενη διάμετρο d των ατράκτων AB και CD, όταν η επιτρεπόμενη διατμητική τάση για αυτές είναι 65 MPa.

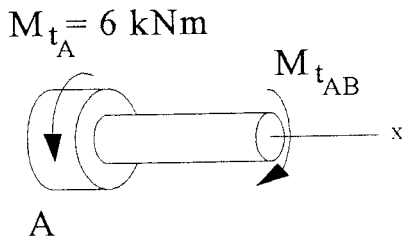


ΛΥΣΗ

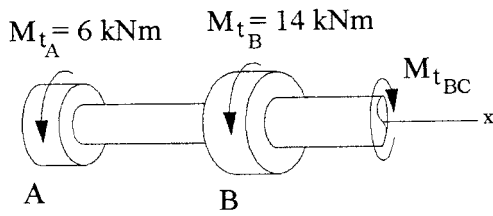
Για την άτρακτο AB από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2) και την συνθήκη ισορροπίας για την ροπή έχουμε :

$$\sum M_x = 0 \qquad (6 \text{ kNm}) - (M_t)_{AB} = 0$$

$$(M_t)_{AB} = 6 \text{ kNm}$$



(2)



(3)

Για την άτρακτο BC από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(3) έχουμε :

$$\begin{aligned} \Sigma M_x = 0 & \quad (6 \text{ kNm}) + (14 \text{ kNm}) - (M_t)_{BC} = 0 \\ & \quad (M_t)_{BC} = 20 \text{ kNm} \end{aligned}$$

α) Να υπολογίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη διατμητική τάση για την άτρακτο BC.

$$I_P = \frac{1}{2}\pi (r_2^4 - r_1^4) = \frac{1}{2}\pi [(0.060)^4 - (0.045)^4] = 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

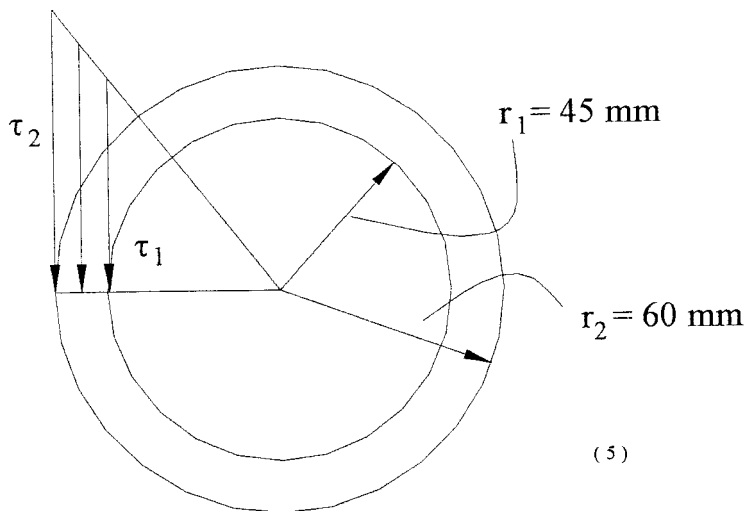
Η μέγιστη διατμητική τάση για την εξωτερική επιφάνεια σχ.(5) είναι :

$$\tau_2 = \tau_{\max}$$

$$\tau_{\max} = \frac{(M_t)_{BC} r_2}{I_P} = \frac{(20 \text{ kNm})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 86.2 \text{ MPa}$$

Για την ελάχιστη διατμητική τάση γράφουμε ότι οι ροπές είναι ανάλογες με την απόσταση από τον άξονα.

$$\frac{\tau_{\epsilon\lambda}}{\tau_{\max}} = \frac{r_1}{r_2} \quad \frac{\tau_{\epsilon\lambda}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}} \quad \tau_{\epsilon\lambda} = 64.7 \text{ MPa}$$



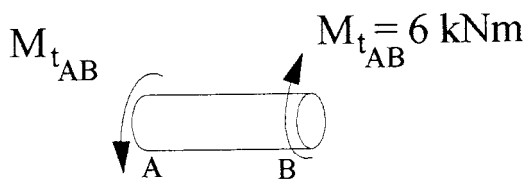
β) Η απαιτούμενη διάμετρος d των ατράκτων AB και CD : Ξέρουμε ότι το μέγεθος της στρεπτικής ροπής και της διατμητικής τάσης είναι $M_t = 6 \text{ kNm}$ και $\tau = 65 \text{ MPa}$ αντίστοιχα, οπότε από την παρακάτω σχέση έχουμε :

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p} \qquad 65 \text{ MPa} = \frac{(6 \text{ kNm}) r}{\pi / 2 r^4}$$

$$r^3 = 58.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \qquad r = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Ξέρουμε ότι $d = 2r$

$$\text{Οπότε } d = 2 (38.9 \times 10^{-3} \text{ m}) = 77.8 \text{ mm}$$



(4)

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ N,Q,M

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Οι εξωτερικές δυνάμεις που καταπονούν μία δοκό ή ένα σώμα ή και μία κατασκευή γενικότερα, μεταβιβάζονται στα σημεία στήριξης, ενώ οι στηρίξεις αντιδρούν έτσι ώστε να διατηρείται η ισορροπία του σώματος. Για την στήριξη των δοκών χρησιμοποιούνται οι εξής θεμελιώδεις τρόποι:

Η κύλιση (ή ελεύθερη έδραση). Σε αυτήν, το σημείο στήριξης είναι ελεύθερο να μετακινείται χωρίς τριβές με την βοήθεια του εδράνου κύλισης μόνον κατά μία διεύθυνση. Η αντίδραση σε αυτή την περίπτωση, είναι η δύναμη που διέρχεται από το σημείο στήριξης, κάθετα στην κύλιση.

Η άρθρωση. Σε αυτήν, το σημείο στήριξης συνδέεται μόνιμα με το έδαφος ή άλλο στέρεο σύστημα με άρθρωση, η οποία επιτρέπει μόνο την ελεύθερη στροφή της δοκού. Η αντίδραση της άρθρωσης είναι δυνατόν να έχει οποιαδήποτε διεύθυνση. Στην περίπτωση αυτή, αναλύουμε συνήθως την αντίδραση σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, μία οριζόντια και μία κάθετη.

Η πάκτωση. Η στήριξη αυτού του είδους δεν επιτρέπει καμία μετακίνηση ή στροφή της δοκού. Οι αντιδράσεις στην περίπτωση αυτή είναι, αφενός οι δύο συνιστώσες της αντίδρασης που συναντήσαμε στην άρθρωση, αφετέρου δε και μία ροπή, που αποκλείει την περίπτωση περιστροφής της δοκού και που ονομάζεται ροπή πάκτωσης. Με πάκτωση στηρίζονται οι πρόβολοι, οι οποίοι αν έχουν πάκτωση και στα δύο τους άκρα ονομάζονται αμφίπακτοι, διαφορετικά μονόπακτοι ή απλά πρόβολοι.

Για τον υπολογισμό των αντιδράσεων αυτών, σχεδιάζουμε το διάγραμμα ελεύθερου σώματος της δοκού. Εφαρμόζοντας στη γενική περίπτωση τις τρεις εξισώσεις στατικής ισορροπίας στο (Δ.Ε.Σ.),

$$\Sigma P_x = 0, \quad \Sigma P_y = 0, \quad \Sigma M = 0$$

Προσδιορίζουμε τις τρεις άγνωστες αντιδράσεις (ή οι δύο όταν τα φορτία είναι μόνον κατακόρυφα).

Σαν κατασκευαστικό στοιχείο η δοκός, χρησιμοποιείται σε πάρα πολλές περιπτώσεις. Ο κυριότερος λόγος είναι ότι μπορεί να δεχθεί φορτία τόσο κατά τη διεύθυνση του άξονα της (αξονικά), όσο και κάθετα σε αυτόν (εγκάρσια ή διατμητικά). Τα εξωτερικά φορτία που καταπονούν μία δοκό, εφόσον περιέχονται στο ίδιο επίπεδο με τον άξονά της, έχουν σαν συνέπεια την εμφάνιση σε οποιαδήποτε διατομή της, τριών γενικά εντατικών μεγεθών. Αυτά είναι:

Η αξονική ή ορθή δύναμη, που συμβολίζεται με N

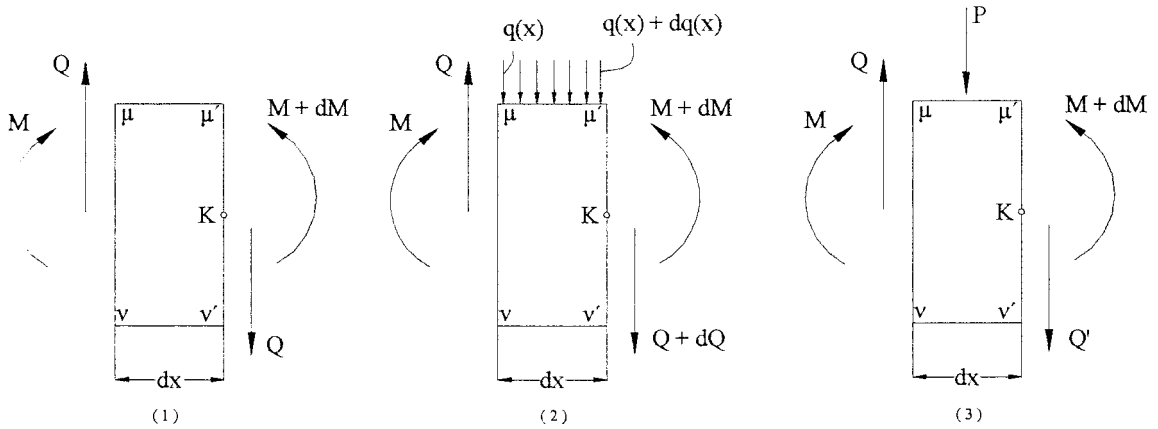
Η τέμνουσα δύναμη που συμβολίζεται με Q

Η καμπτική ροπή ή ροπή κάμψης που συμβολίζεται με M

Τα τρία αυτά στατικά μεγέθη ονομάζονται από κοινού φορτία διατομής, επειδή δρουν και τα τρία σε οποιαδήποτε διατομή της δοκού, ή και εσωτερικές δυνάμεις . Αν τα εξωτερικά φορτία δεν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο τότε στα τρία εντατικά μεγέθη προστίθεται και η ροπή στρέψης M_t οπότε τα φορτία διατομής ανέρχονται σε τέσσερα.

Θεωρούμε δύο τομές $\mu-\nu$ και $\mu'-\nu'$, σε δύο παράπλευρες διατομές μιας δοκού που απέχουν μεταξύ τους στοιχειώδη απόσταση dx . Αποκόπτεται έτσι από την δοκό ένα στοιχείο της, που στην αριστερή έδρα ασκούνται η τέμνουσα δύναμη Q καθώς και καμπτική ροπή M , τις οποίες θεωρούμε θετικές. Αν μεταξύ των διατομών $\mu-\nu$ και

$\mu' - \nu'$ δεν εφαρμόζεται κανένα εξωτερικό φορτίο, τότε στην δεξιά έδρα του στοιχείου θα ασκούνται, η τέμνουσα δύναμη Q καθώς και η καμπτική ροπή ($M + dM$), όπου dM είναι η μεταβολή της καμπτικής ροπής M μεταξύ των δύο διατομών σχ.(1).



Επειδή το στοιχείο ισορροπεί, θα πρέπει το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών ως προς το σημείο K (που είναι το κέντρο βάρους της διατομής), να είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\Sigma M_K = 0 \quad M - (M + dM) + Qdx = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{dM}{dx}$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει το εξής συμπέρασμα: Σε διατομές της δοκού μεταξύ των συγκεντρωμένων δυνάμεων, η μεταβολή της καμπτικής ροπής ως προς το μεταβλητό μήκος x , ισούται με την τέμνουσα δύναμη.

Αν μεταξύ των διατομών $\mu - \nu$ και $\mu' - \nu'$ υπάρχει και κατανεμημένο φορτίο έντασης $q(x)$ στην αριστερή έδρα και $q(x) + dq(x)$ στην δεξιά σχ.(2) εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας για τις ροπές του στοιχείου αυτού ως προς το σημείο K , περίπου θα ισχύει:

$$\Sigma M_K = 0 \quad M - (M + dM) + Qdx - \frac{q(x) + [q(x) + dq(x)]}{2} dx (dx / 2) = 0$$

Στη σχέση αυτή, επειδή ο τελευταίος όρος αντιπροσωπεύει πολύ μικρή ποσότητα, μπορεί χωρίς αισθητό λάθος να παραληφθεί, οπότε ξαναβρίσκουμε ότι $Q = dM / dx$, που βρήκαμε παραπάνω. Στο στοιχείο αυτό θα πρέπει επίσης, το αλγεβρικό άθροισμα των κατακόρυφων δυνάμεων να είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\Sigma F_y = 0 \quad Q - (Q + dQ) - \frac{q(x) + [q(x) + dq(x)]}{2} dx = 0$$

Οπότε, αμελώντας την ποσότητα $dq(x) dx / 2$ ως πολύ μικρή, βρίσκουμε:

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει το εξής συμπέρασμα: Στην ειδική περίπτωση που η δοκός φέρει ομοιόμορφο φορτίο με σταθερή ένταση, η τέμνουσα δύναμη στην περιοχή αυτή, μεταβάλλεται γραμμικά σε συνάρτηση με το x . Προφανώς, αν το καταναμημένο φορτίο $q(x)$ μεταβάλλεται γραμμικά με το x , τότε η τέμνουσα δύναμη Q θα μεταβάλλεται παραβολικά.

Αν τέλος, μεταξύ των διατομών μ - ν και μ' - ν' ενεργεί συγκεντρωμένο φορτίο P και Q είναι η τέμνουσα δύναμη στην αριστερή έδρα ενώ Q' στην δεξιά τότε εφαρμόζοντας τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων ως προς τον κατακόρυφο άξονα, βρίσκουμε:

$$Q - P - Q' = 0 \quad \Rightarrow \quad Q' = Q - P$$

Από τη σχέση αυτή, φαίνεται ότι υπάρχει απότομη μεταβολή της τέμνουσας δύναμης στο στοιχειώδες μήκος dx , που το ονομάζουμε συνήθως άλμα. Εντελώς αντίστοιχα, άλμα παρατηρείται επίσης στη ροπή κάμψης M στα σημεία που ασκούνται εξωτερικές ροπές, καθώς και στην αξονική δύναμη N στα σημεία που ασκούνται αξονικές δυνάμεις. Προφανώς και η παραγωγός dM / dx στο σημείο εφαρμογής της δύναμης P , θα παρουσιάζει ασυνέχεια.

Συνοψίζοντας τις σχέσεις και για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις, έχουμε:

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) = -\frac{d^2 M}{dx^2}$$

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

Είδαμε ότι όταν μία δοκός φορτίζεται με κατακόρυφα φορτία, τόσο η τέμνουσα δύναμη Q , τόσο και η ροπή κάμψης M μεταβάλλονται γενικά με την απόσταση x , η οποία ορίζει τη θέση της διατομής της. Για το λόγο αυτό είναι χρήσιμο να σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των ποσοτήτων αυτών κατά μήκος της δοκού. Έτσι, στη μεν τετμημένη σχεδιάζουμε τη θέση x της διατομής της δοκού, στη δε τεταγμένη την αντίστοιχη τιμή της αξονικής δύναμης ή τέμνουσας δύναμης Q ή της ροπής κάμψης M . Οι γραφικές παραστάσεις ονομάζονται διαγράμματα αξονικών (Δ.Α.Δ.) ή τέμνουσών δυνάμεων (Δ.Τ.Δ.) και ροπών κάμψης (Δ.Ρ.Κ.).

Για την κατασκευή των διαγραμμάτων αυτών, είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι μερικοί κανόνες, οι οποίοι απορρέουν από τις εξισώσεις που αποδείξαμε, και οι οποίοι είναι: Σε αφόρτιστη περιοχή της δοκού ($P = 0$), τέμνουσα δύναμη Q έχει σταθερή τιμή και παρίσταται από ευθεία παράλληλη με τον άξονα της δοκού. Η δε καμπτική ροπή M μεταβάλλεται γραμμικά και παρίσταται από κεκλιμένη ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης Q .

Σε περιοχή της δοκού που φορτίζεται ομοιόμορφα από κατανεμημένο φορτίο q , η Q μεταβάλλεται γραμμικά, παρίσταται δε από ευθεία με κλίση $-q$. Η M μεταβάλλεται παραβολικά (καμπύλη β^{ov} βαθμού).

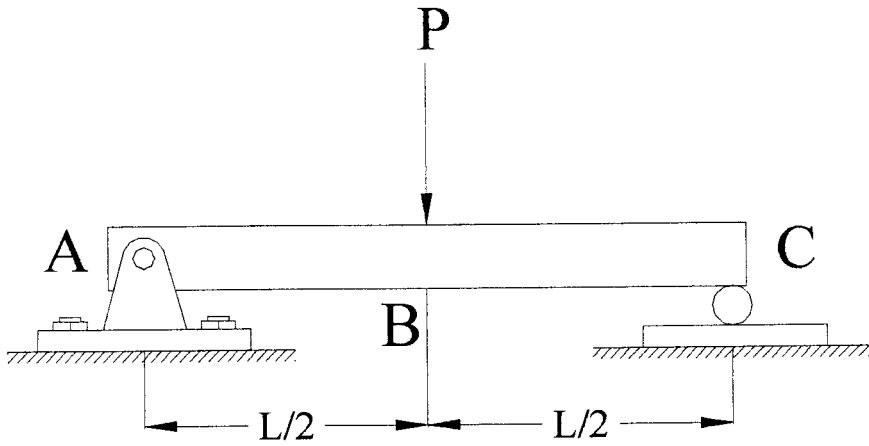
Σε περιοχή της δοκού που φορτίζεται γραμμικά (τριγωνική ή τραπεζοειδής φόρτιση), δηλαδή το $q(x)$ είναι εξίσωση πρώτου βαθμού, η Q μεταβάλλεται παραβολικά (καμπύλη β^{ov} βαθμού) σε συνάρτηση με το x , ενώ η M μεταβάλλεται κατά καμπύλη γ^{ov} βαθμού. Γενικά αν το εξωτερικό κατανεμημένο φορτίο $q(x)$ σε ένα τμήμα της δοκού είναι συνάρτηση n βαθμού τότε η τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ είναι βαθμού $n + 1$ ενώ η καμπτική ροπή $M(x)$ είναι $n + 2$.

Η M παίρνει ακρότατες τιμές εκεί που μηδενίζεται η τέμνουσα δύναμη. Η τιμή της M μπορεί να βρεθεί αν στην τιμή της καμπτικής ροπής άλλης διατομής, προσθέσουμε αλγεβρικά το εμβαδόν του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων που μεσολαβεί ανάμεσα στις δύο διατομές.

Για την κατασκευή των (Δ.Τ.Δ.) και (Δ.Ρ.Κ.), χωρίζουμε τη δοκό σε τμήματα, με κριτήρια την εμφάνιση συγκεντρωμένης δύναμης για το διάγραμμα Q ή συγκεντρωμένης ροπής για το διάγραμμα M και αρχής ή τέλους του άλματος στη συνεχή φόρτιση. Υπενθυμίζουμε ότι για τα διαγράμματα είναι απαραίτητη πρώτα η εύρεση των αντιδράσεων της δοκού οι οποίες, για τις ισοστατικές δοκούς, βρίσκονται από τις εξισώσεις ισορροπίας που εφαρμόζονται στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 2.1

Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).



(1)

ΛΥΣΗ

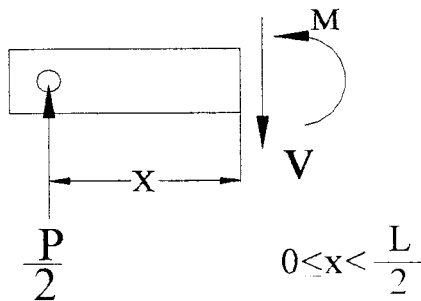
Υπολογισμός αντιδράσεων : Η δοκός στο (Δ.Ε.Σ.) σχ.(2) είναι διαχωρισμένη σε αυθαίρετη απόσταση x από το σημείο A της περιοχής AB. Οι άγνωστες V και M ενεργούν με θετική φορά, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε :

$$\Sigma F_y = 0$$

$$V = P / 2$$

$$\Sigma M = 0$$

$$M = P / 2 x$$

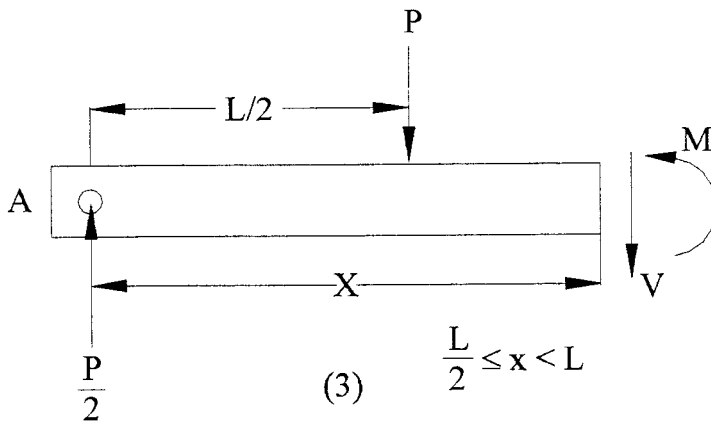


(2)

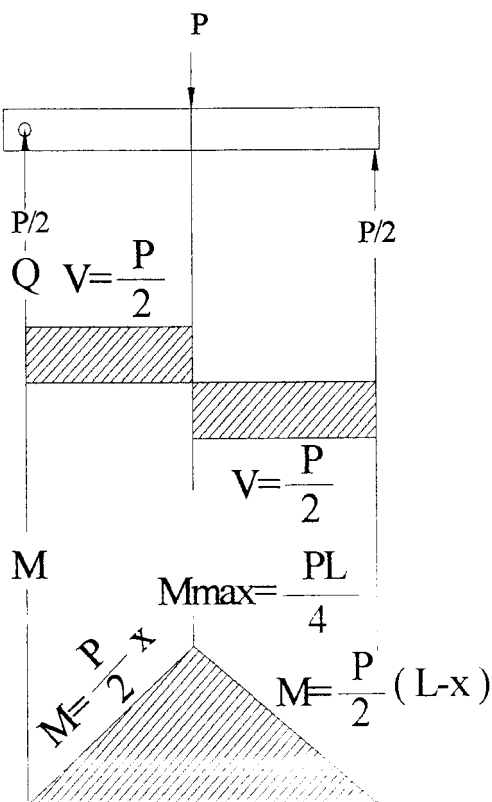
Από το (Δ.Ε.Σ.) σχ.(3) και την απόσταση x που εκτείνεται στην περιοχή BC έχουμε :

$$\Sigma F_y = 0 \quad P/2 - P - V = 0 \quad V = -P/2$$

$$\Sigma M = 0 \quad M + P(x - L/2) - (P/2)x = 0 \quad M = P/2(L - x)$$

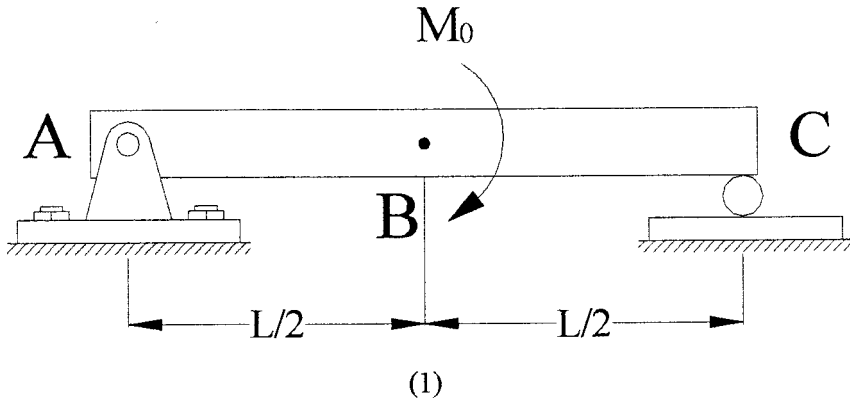


Από τις εξισώσεις (1) και (3) για την καμπτική ροπή και τις εξισώσεις (2) και (3) για την τέμνουσα ροπή σχεδιάζουμε τα διαγράμματα των αντιδράσεων στήριξης σχ.(4)



ΑΣΚΗΣΗ 2.2

Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).

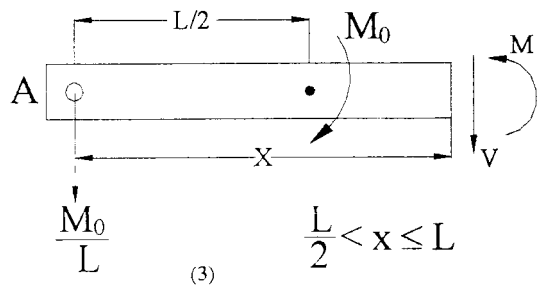
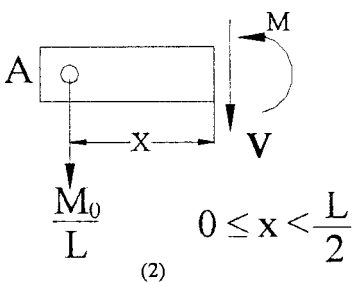


ΛΥΣΗ

Υπολογισμός αντιδράσεων : Η δοκός στο (Δ.Ε.Σ.) σχ.(2) είναι διαχωρισμένη σε αυθαίρετη απόσταση x από το σημείο A της περιοχής AB. Οι άγνωστες V και M ενεργούν με θετική φορά σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε :

$$\Sigma F_y = 0 \quad V = - \frac{M_0}{L}$$

$$\Sigma M = 0 \quad M = - \frac{M_0}{L} x$$



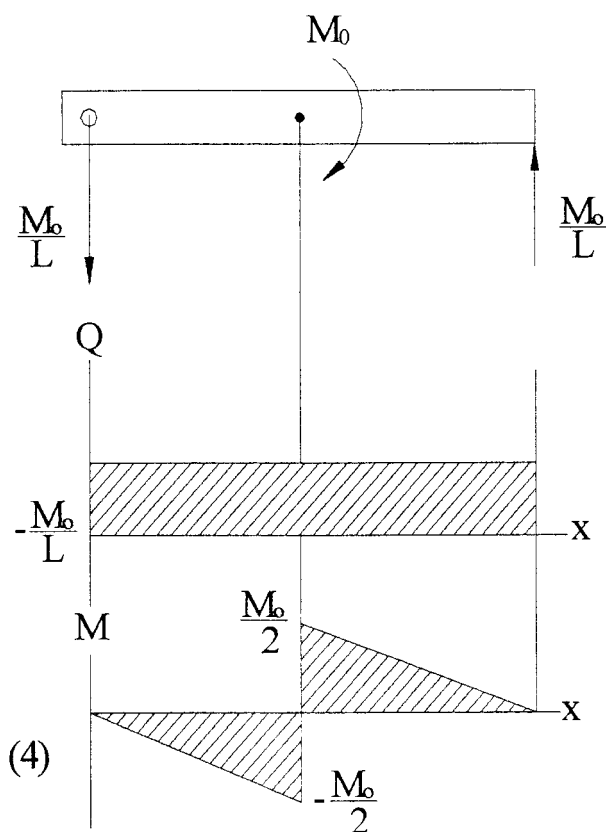
Από το (Δ.Ε.Σ.) σχ.(3) και την απόσταση x που εκτείνεται στην περιοχή BC έχουμε :

$$\Sigma F_y = 0 \quad V = - \frac{M_0}{L}$$

$$\Sigma M = 0 \quad M = M_0 - \frac{M_0}{L} x$$

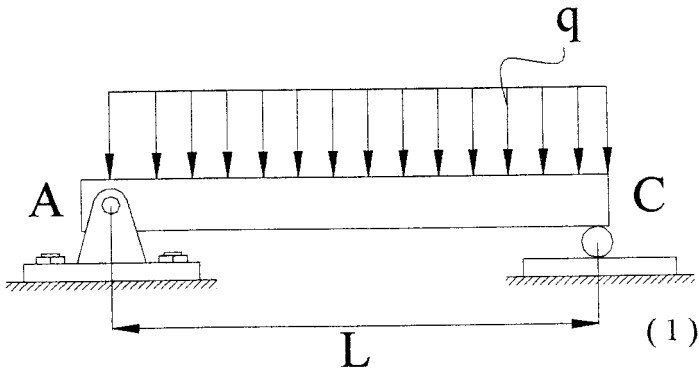
$$M = M_0 [1 - (x / L)]$$

Όταν σχεδιάσουμε γραφικά τις παραπάνω συναρτήσεις, στα διαγράμματα της καμπτικής ροπής και της τέμνουσας δύναμης παρατηρούμε ότι η τέμνουσα δύναμη είναι σταθερή σε ολόκληρο το μήκος της δοκού και δεν επηρεάζεται από την καμπτική ροπή που ενεργεί στο κέντρο της δοκού σχ.(4).



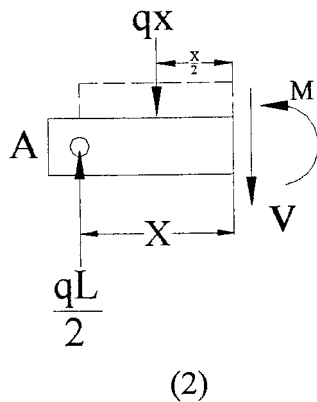
ΑΣΚΗΣΗ 2.3

Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).



ΛΥΣΗ

Το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το αριστερό τμήμα της δοκού φαίνεται στο σχ. (2).



Η κατανομημένη φόρτιση γι' αυτό το τμήμα απεικονίζεται από την συνισταμένη δύναμη, μόνο μετά την απομόνωση του τμήματος σαν διάγραμμα ελευθέρου σώματος. Επειδή το τμήμα έχει μήκος x , το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης θα είναι qx . Αυτή η δύναμη ενεργεί στο κέντρο της περιοχής, που περιλαμβάνει την κατανομημένη φόρτιση για την απόσταση $x/2$ από την δεξιά άκρη του σχήματος. Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε :

$$\Sigma F_y = 0 \quad \frac{qL}{2} - qx - V = 0 \quad V = q\left(\frac{L}{2} - x\right) \quad (1)$$

$$\Sigma M = 0 \quad -\left(\frac{qL}{2}\right)x + (qx)\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0 \quad M = \frac{q}{2}(Lx - x^2) \quad (2)$$

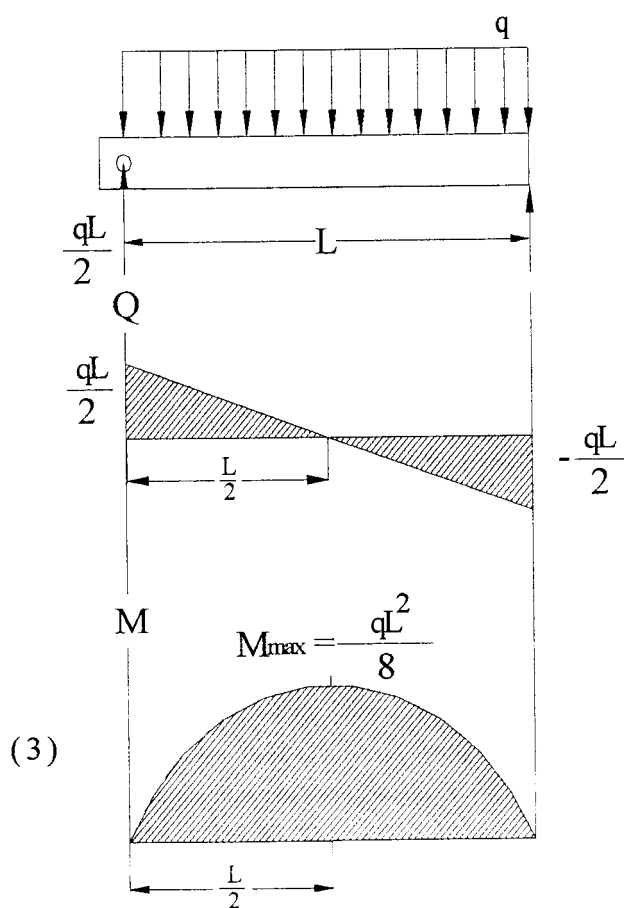
Τα αποτελέσματα για Q και M μπορούν να ελεγχουν από τον τύπο $dQ/dx = -q$. Αυτό είναι σωστό γιατί το θετικό φορτίο q ενεργεί προς τα κάτω. Επίσης $dm/dx = Q$.

Διαγράμματα [Q] και [M] : Τα διαγράμματα τέμνουσας δύναμης και καμπτικής ροπής φαίνονται στην εικόνα (3), σχεδιάστηκαν βασισμένα στις εξισώσεις (1) και (2). Το σημείο μηδέν της τέμνουσας δύναμης μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση (1).

$$V = q\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \quad x = \frac{L}{2}$$

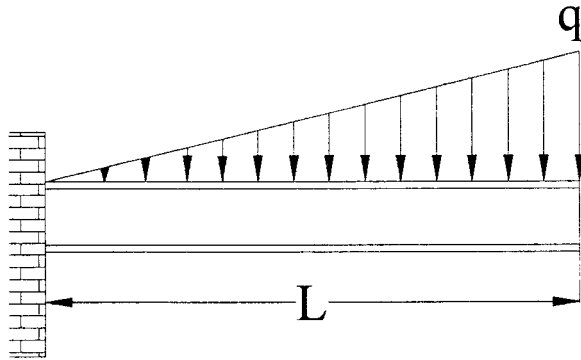
Από το διάγραμμα καμπτικής ροπής αυτή η τιμή του x τυχαίνει να αντιπροσωπεύει το σημείο στη δοκό όπου ενεργεί η μέγιστη τιμή της. Έτσι από την εξίσωση (2) έχουμε :

$$M_{\max} = \frac{q}{2} \left[L\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] = \frac{qL^2}{8}$$



ΑΣΚΗΣΗ 2.4

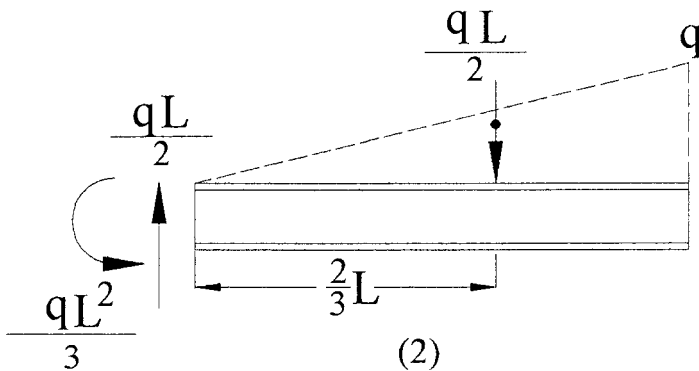
Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).



(1)

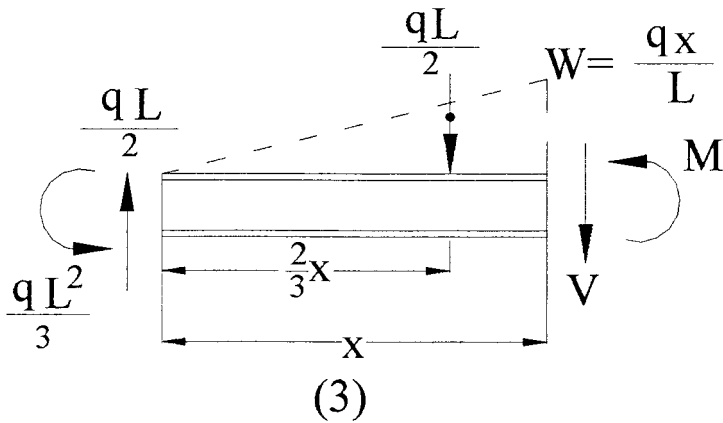
ΛΥΣΗ

Αντιδράσεις στήριξης : το κατανεμημένο φορτίο αντικαταστάθηκε από την συνιστάμενη δύναμη και οι αντιδράσεις έχουν καθοριστεί όπως φαίνεται στο σχήμα (2).



Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(3) της δοκού το τμήμα του οποίου έχει μήκος x . Παρατηρούμε ότι την ένταση του τριγωνικού φορτίου στο τμήμα αυτό, την βρίσκουμε από την αναλογία που είναι : $q / x = q / L$ ή $q = qx / L$. Με την ένταση του φορτίου γνωστή, η συνισταμένη δύναμη του κατανεμημένου φορτίου έχει οριστεί από την περιοχή κάτω από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(3).

Έτσι έχουμε :



$$\Sigma F_y = 0 \quad \frac{qL}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{qx}{L} \right) x - V = 0$$

$$V = \frac{q}{2L} (L^2 - x^2)$$

$$\Sigma M = 0 \quad \frac{qL^2}{3} - \frac{qL}{2} (x) + \frac{1}{2} \left(\frac{qx}{L} \right) x \left(\frac{1}{3} x \right) + M = 0$$

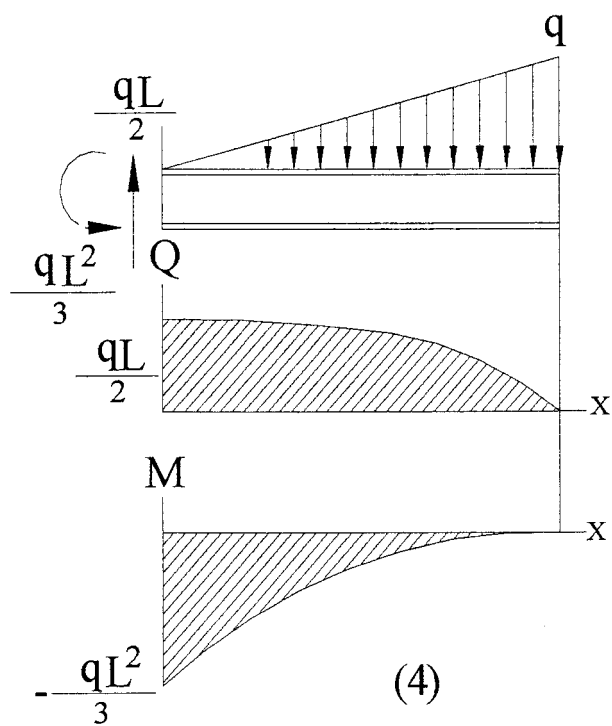
$$M = \frac{q}{6L} (-2L^3 + 3L^2 x - x^3)$$

Τα αποτελέσματα μπορούν να ελεγχθούν εφαρμόζοντας τις παρακάτω εξισώσεις :

$$q = -\frac{dQ}{dx} = -\frac{q}{2L} (0 - 2x) = \frac{qx}{L}$$

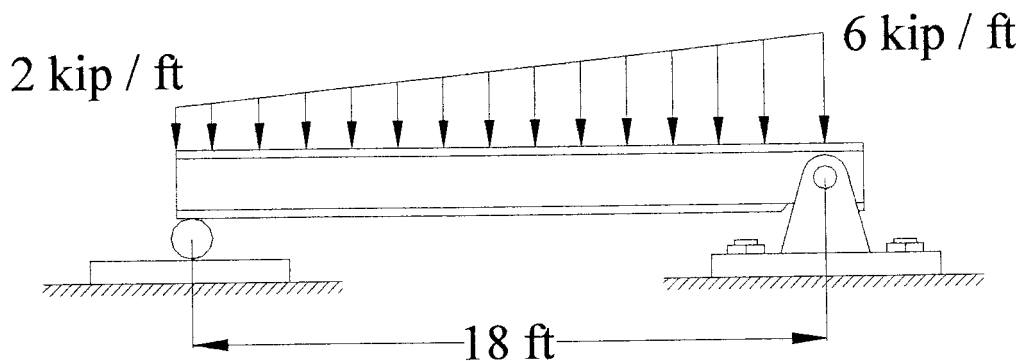
$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{q}{6L} (-0 + 3L^2 - 3x^2) = \frac{q}{2L} (L^2 - x^2)$$

Τα διαγράμματα των εξισώσεων είναι σχεδιασμένα στην εικόνα (4).



ΑΣΚΗΣΗ 2.5

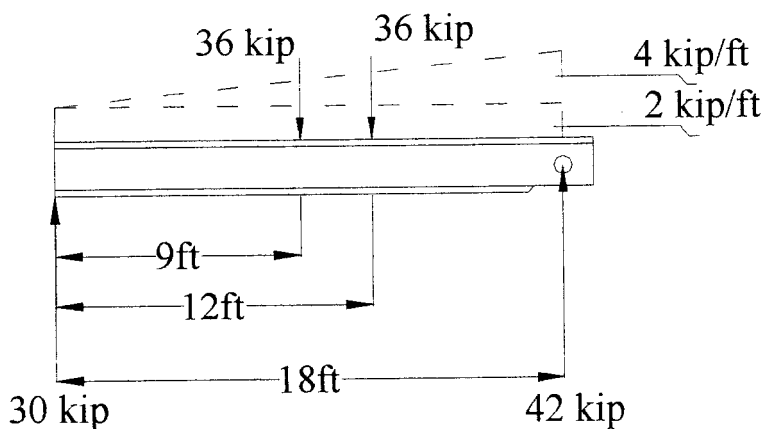
Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).



(1)

ΛΥΣΗ

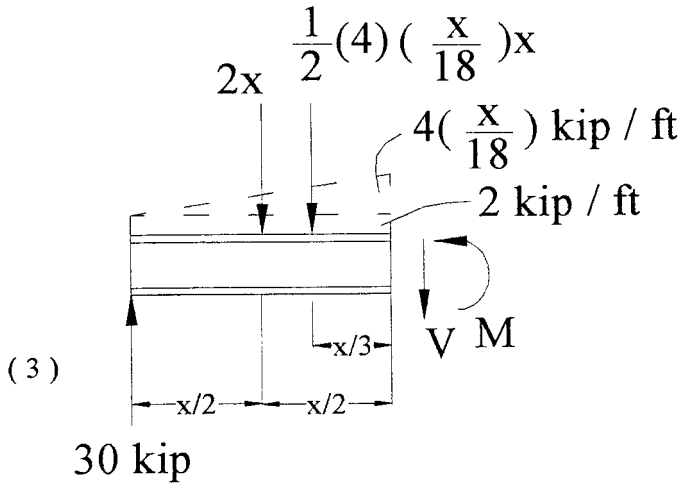
Αντιδράσεις στήριξης : το κατανεμημένο φορτίο είναι χωρισμένο σε συνισταμένη τριγωνική και ορθογώνια φόρτιση, αυτές οι δύο φορτίσεις αντικαθιστώνται από τις αντίστοιχες συνισταμένες δυνάμεις. Οι αντιδράσεις έχουν υπολογιστεί και φαίνονται στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2).



(2)

Αντιδράσεις καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης : από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος για το αριστερό τμήμα της δοκού σχ.(3) βλέπουμε ότι το τραπεζοειδές φορτίο έχει αντικατασταθεί από ένα τριγωνικό και ένα ορθογώνιο φορτίο.

Ακόμα παρατηρούμε ότι η ένταση του τριγωνικού φορτίου στο τμήμα αυτό βασίζεται σε αναλογία. Η συνισταμένη δύναμη και η τοποθέτηση του κάθε κατανεμημένου φορτίου φαίνονται στο σχ.(3).



Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις της ισορροπίας έχουμε :

$$\Sigma F_y = 0 \quad 30 \text{ kip} - (2 \text{ kip / ft})x - \frac{1}{2}(4 \text{ kip / ft})\left(\frac{x}{18 \text{ ft}}\right)x - V = 0$$

$$V = \left(30 - 2x - \frac{x^2}{9}\right) \text{ kip} \quad (1)$$

$$\Sigma M = 0$$

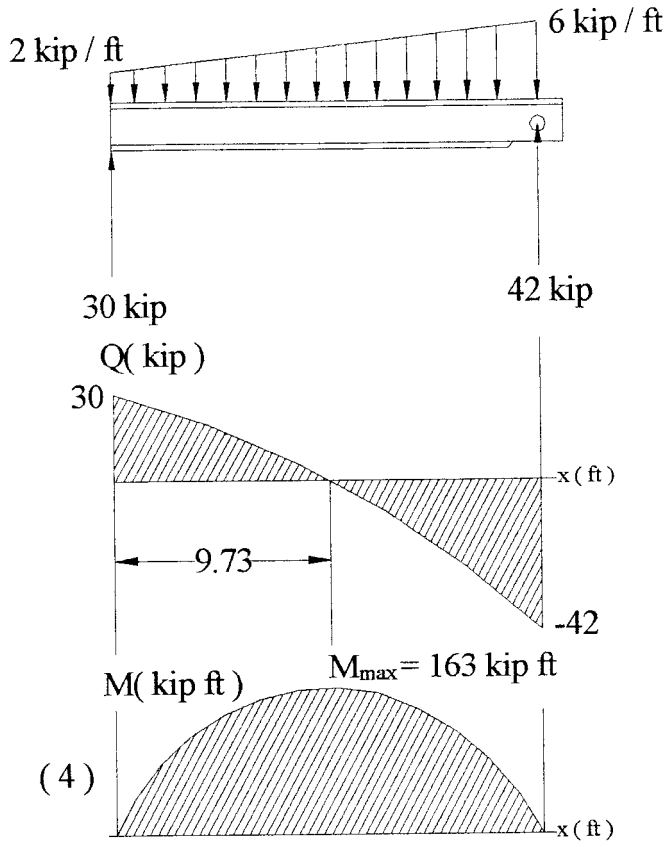
$$-30 \text{ kip}(x) + (20 \text{ kip / ft})x\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}(4 \text{ kip / ft})\left(\frac{x}{18 \text{ ft}}\right)x\left(\frac{x}{3}\right) + M = 0$$

$$M = \left(30x - x^2 - \frac{x^3}{9}\right) \text{ kipft} \quad (2)$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) σχεδιάζουμε τα διαγράμματα σχ.(4). Εφόσον το σημείο της μέγιστης ροπής παρουσιάζεται όταν $dM / dx = Q = 0$, από τις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε :

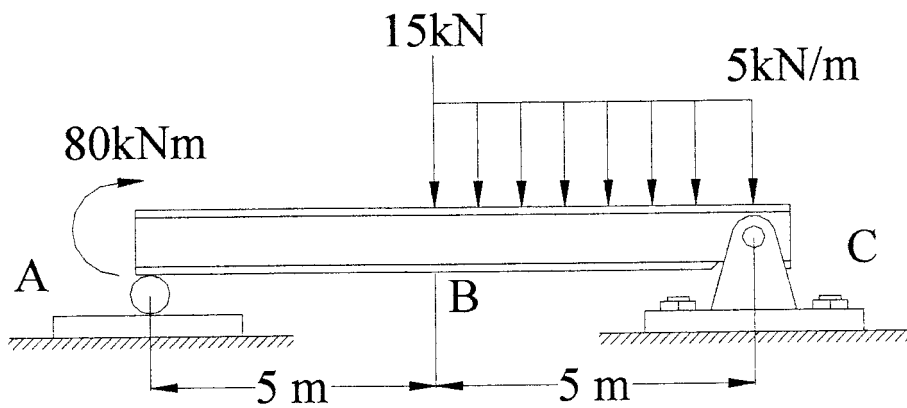
$$0 = 30 - 2x - \frac{x^2}{9} \quad x = 9.73 \text{ ft}$$

$$M = 30(9.73)^2 - (9.73) - \frac{(9.73)^3}{27} = 163 \text{ kipft}$$



ΑΣΚΗΣΗ 2.6

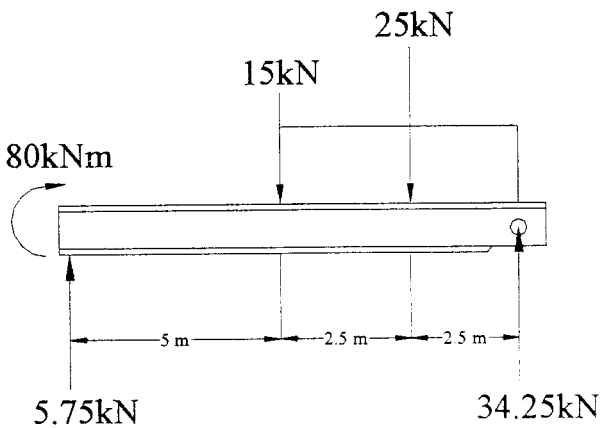
Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).



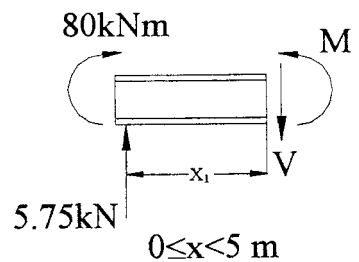
(1)

ΠΡΩΤΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΛΥΣΗΣ

Αντιδράσεις στήριξης : οι αντιδράσεις έχουν υπολογιστεί και τοποθετηθεί στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2)



(2)



(3)

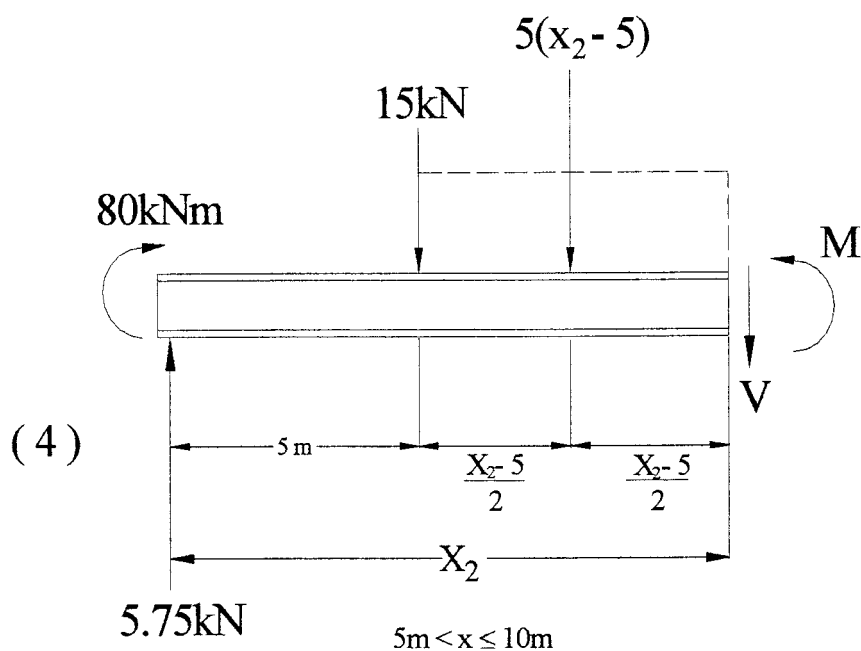
Υπολογισμός αντιδράσεων : Αφού υπάρχει διακοπή του κατανεμημένου φορτίου και ένα συγκεντρωμένο φορτίο στο κέντρο της δοκού, τα δύο τμήματα του x πρέπει να υπολογιστούν με τέτοιο τρόπο, ώστε να περιγράψουν την τέμνουσα δύναμη $[Q]$ και την καμπτική ροπή $[M]$ για ολόκληρη την δοκό.

Οι δύο συντεταγμένες θα έχουν σαν αρχή το σημείο Α, η απόσταση x_1 ισχύει από το σημείο Α μέχρι το σημείο Β και η απόσταση x_2 από το σημείο Β μέχρι το σημείο C. Έτσι έχουμε : $0 \leq x_1 < 5 \text{ m}$ σχ.(3)

$$\Sigma F_y = 0 \quad 5.75 \text{ kN} - V = 0 \quad V = 5.75 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\Sigma M = 0 \quad - 80 \text{ kNm} - 5.75 \text{ kN } x_1 + M = 0$$

$$M = (5.75 x_1 + 80) \text{ kNm} \quad (2)$$



$5 \text{ m} < x_2 \leq 10 \text{ m}$ σχ.(4)

$$\Sigma F_y = 0 \quad 5.75 \text{ kN} - 15 \text{ kN} - 5 \text{ kN/m} (x_2 - 5 \text{ m}) - V = 0$$

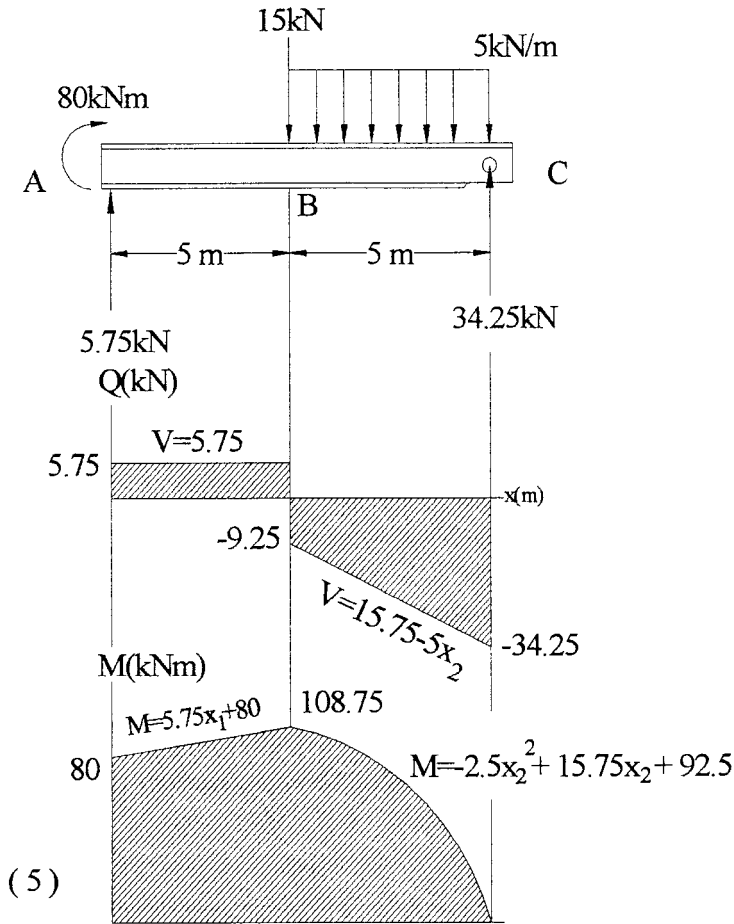
$$V = (15.75 - 5x_2) \text{ kN} \quad (3)$$

$$\Sigma M = 0 \quad - 80 \text{ kNm} - 5.75 \text{ kN } x_2 + 15 \text{ kN} (x_2 - 5 \text{ m})$$

$$+ 5 \text{ kN/m} (x_2 - 5 \text{ m}) (x_2 - 5 \text{ m} / 2) + M = 0$$

$$M = (- 2.5 x_2^2 + 15.75 x_2 + 92.5) \text{ kNm} \quad (4)$$

Τα αποτελέσματα μπορούν να ελεγχθούν εφαρμόζοντας $q = - dQ / dx$ και $Q = dM / dx$. Επίσης, όταν το $x_1 = 0$ οι εξισώσεις (1) και (2) μας δίνουν $V = 5.75 \text{ kN}$ και $M = 80 \text{ kNm}$, όταν το $x_1 = 10 \text{ m}$, οι εξισώσεις (3) και (4) μας δίνουν $V = - 34.25 \text{ kN}$ και $M = 0$. Τα διαγράμματα των παραπάνω εξισώσεων φαίνονται στο σχήμα (5).



ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΛΥΣΗΣ

Παρατηρούμε ότι είναι πιο εύκολο να διαλέξουμε το μήκος x_2 και σαν αρχή το σημείο C και να το επεκτείνουμε θετικά από τα αριστερά του, προς το B σχ.(6). Εδώ οι V και M ενεργούν στο αριστερό τμήμα. Έτσι έχουμε : $0 \leq x_2 < 5 \text{ m}$

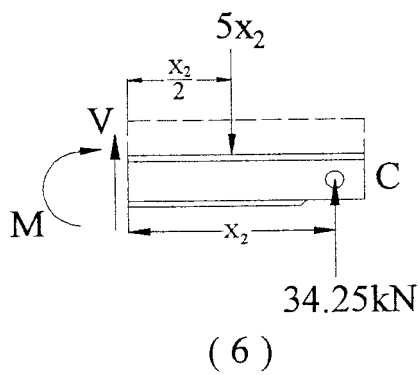
$$\Sigma F_y = 0 \quad V - (5 \text{ kN/m}) x_2 + 34.25 \text{ kN} = 0$$

$$V = (5 x_2 + 34.25) \text{ kN} \quad (5)$$

$$\Sigma M = 0 \quad - M - (5 \text{ kN/m}) x_2 (x_2 / 2) + 34.25 \text{ kN} x_2 = 0$$

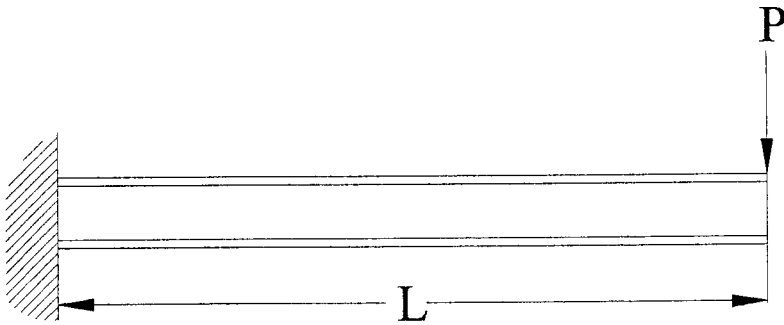
$$M = (34.25 x_2 - 2.5 x_2^2) \text{ kNm} \quad (6)$$

Αυτές οι δύο εξισώσεις καθορίζουν την ευθεία γραμμή και την παραβολή στα διαγράμματα του τμήματος BC σχ.(5). Είναι διαφορετικές συναρτήσεις από αυτές των εξισώσεων (3) και (4), αφού περιγράφουν τις καμπύλες από διαφορετικό αρχικό σημείο. Παρατηρούμε όμως ότι δίνουν τις ίδιες τιμές για $x_2 = 0$, $V = - 34.25 \text{ kN}$ και $M = 0$ και $x_2 = 5 \text{ m}$, $V = - 9.25 \text{ kN}$ και $M = 108.75 \text{ kNm}$.



ΑΣΚΗΣΗ 2.7

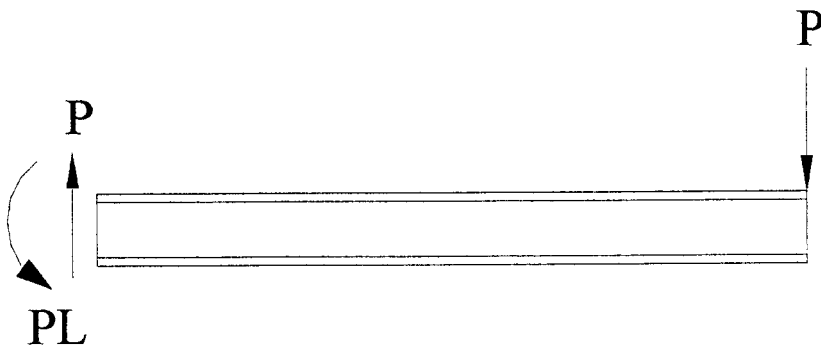
Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).



(1)

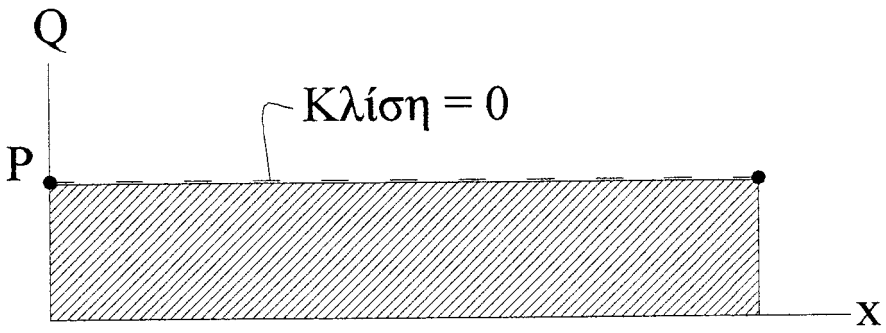
ΛΥΣΗ

Οι αντιδράσεις έχουν υπολογιστεί και τοποθετηθεί στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2).



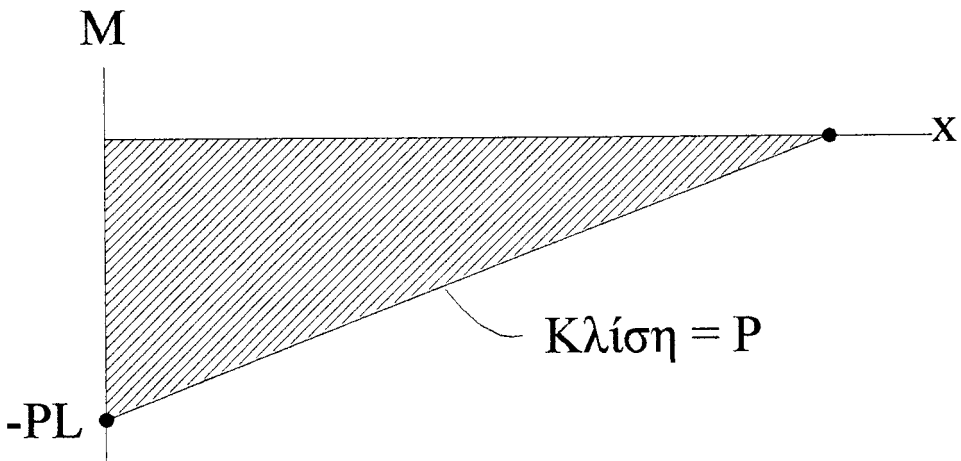
(2)

Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης : Όταν το $x = 0$ τότε η τέμνουσα δύναμη $V = + P$ και όταν $x = L$ τότε $V = - P$ σχ.(3). Αφού το φορτίο $q = 0$ για $0 < x < L$, η κλίση του διαγράμματος θα είναι μηδέν ($dQ / dx = - q = 0$) σε όλα τα σημεία, γι' αυτό μια οριζόντια ευθεία γραμμή ενώνει τα δύο άκρα.



(3)

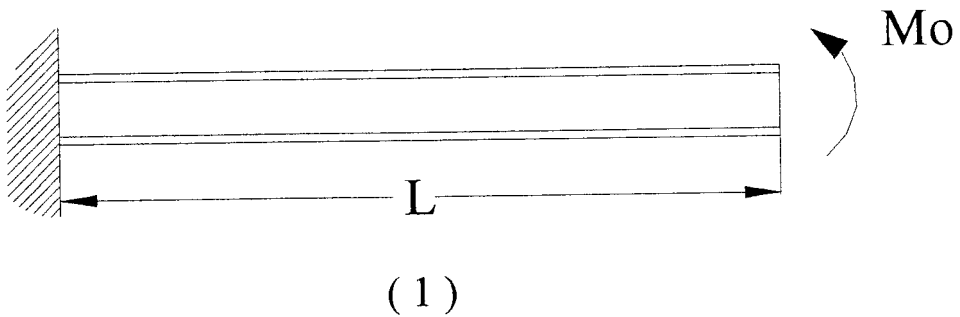
Διάγραμμα καμπτικής ροπής : Για $x = 0$ η καμπτική ροπή $M = - PL$ και για $x = L$, $M = 0$ σχ.(4). Το διάγραμμα τέμνουσας δύναμης μας δείχνει ότι η κλίση του διαγράμματος καμπτικής ροπής θα είναι σταθερά θετικό για $0 < x < L$, τέτοιο που αυτή η κλίση θα είναι $dM / dx = Q = + P$. Έτσι τα δύο άκρα ενώνονται με μία ευθεία θετική γραμμή που έχει κλίση $= P$.



(4)

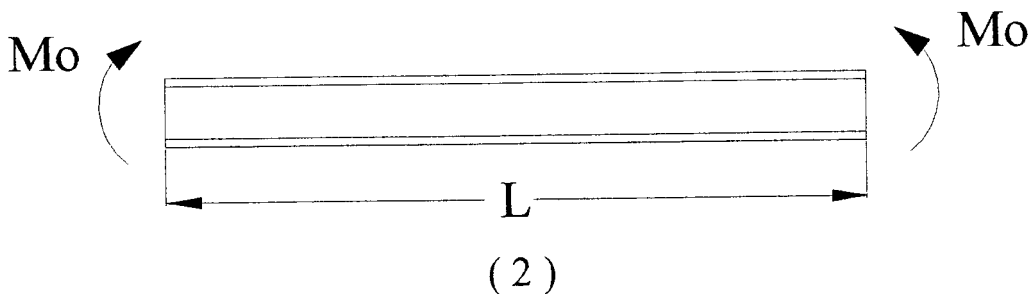
ΑΣΚΗΣΗ 2.8

Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).

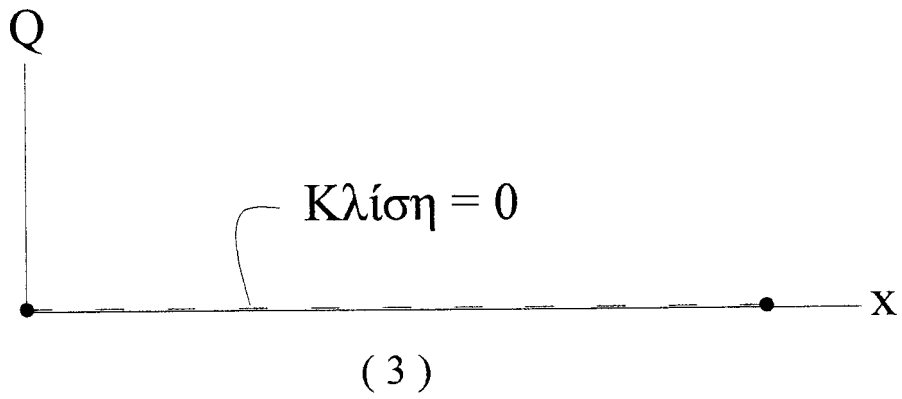


ΛΥΣΗ

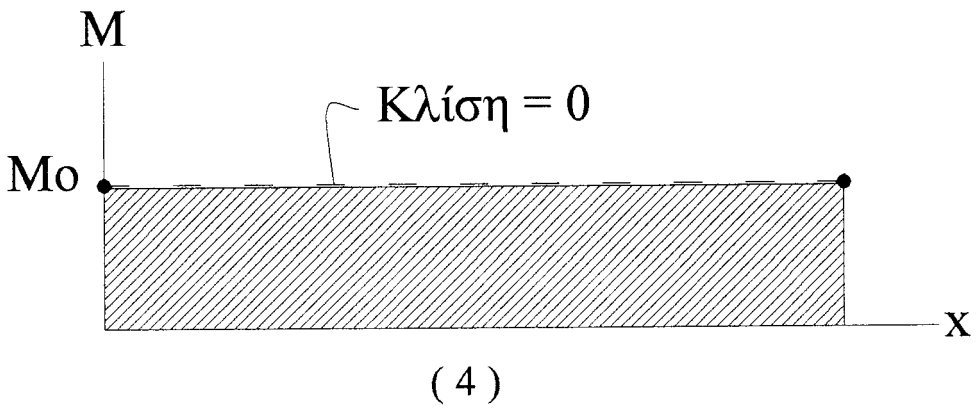
Οι αντιδράσεις στήριξης για το πακτωμένο άκρο έχουν υπολογιστεί στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2).



Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης : η τέμνουσα δύναμη είναι μηδέν και στα δύο άκρα $V = 0$ για $x = 0$ και $x = L$ σχ.(3). Αφού κανένα κατανεμημένο φορτίο δεν υπάρχει πάνω στην δοκό για $0 < x < L$ το διάγραμμα δεν θα έχει κλίση, $dQ / dx = -q(x) = 0$ σε όλα τα σημεία. Για αυτό μία οριζόντια γραμμή ενώνει τα δύο σημεία, που μας δείχνει ότι η τέμνουσα δύναμη είναι μηδέν από το ένα άκρο της δοκού προς το άλλο.

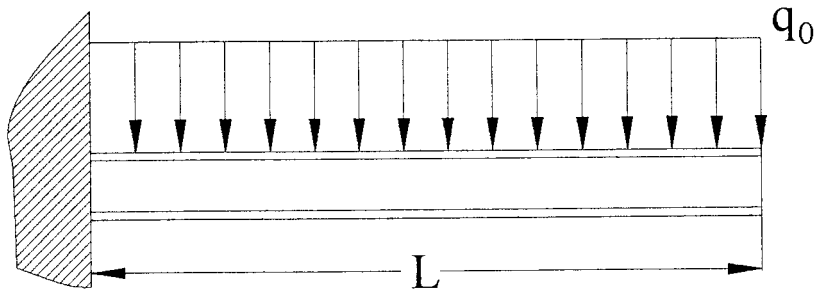


Διάγραμμα καμπτικής ροπής : το διάγραμμα τέμνουσας δύναμης μας δείχνει ότι η κλίση του διαγράμματος καμπτικής ροπής θα είναι μηδέν για $0 < x < L$ αφού $dM / dx = Q = 0$. Έτσι τα δύο άκρα ενώνονται με μια ευθεία γραμμή.



ΑΣΚΗΣΗ 2.9

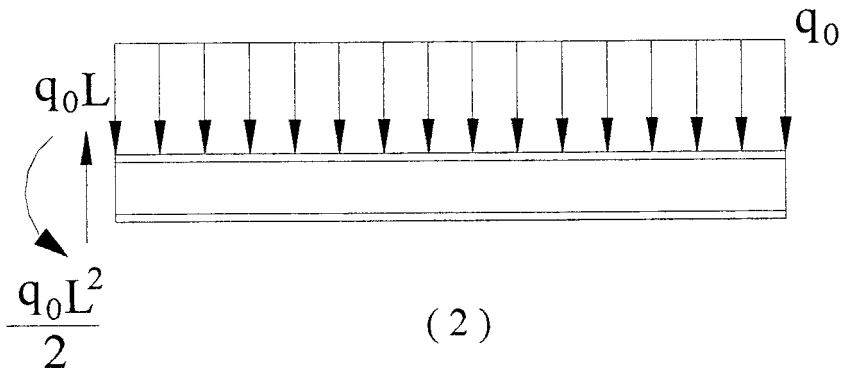
Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).



(1)

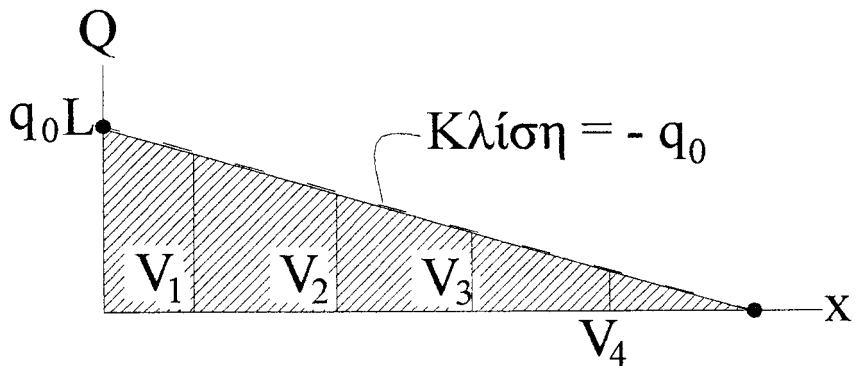
ΛΥΣΗ

Οι αντιδράσεις στήριξης έχουν υπολογιστεί και τοποθετηθεί στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2).



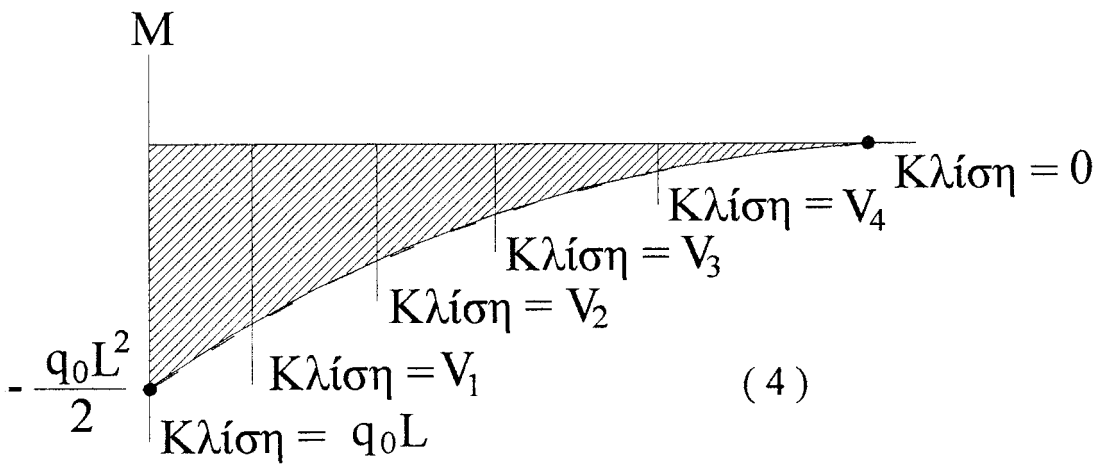
(2)

Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης : το κατανομημένο φορτίο στην δοκό είναι σταθερά θετικό και αφού $dQ / dx = -q_0$, η κλίση του διαγράμματος είναι σταθερά αρνητική. Για αυτό μια ευθεία γραμμή με αρνητική κλίση θα ενώνει τα δύο σημεία σχ.(3).



(3)

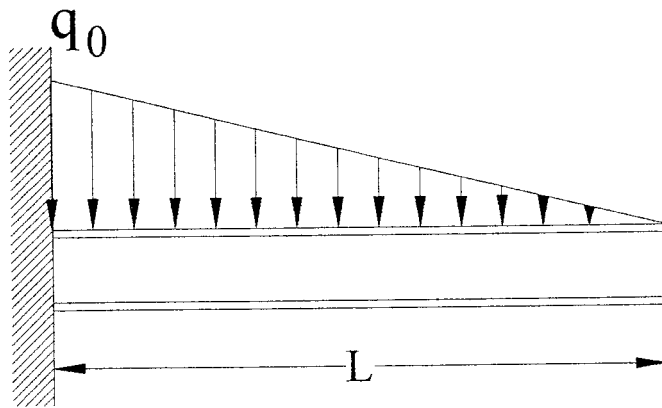
Διάγραμμα καμπτικής ροπής : οι διαδοχικές τιμές της τέμνουσας δύναμης στο διάγραμμα τέμνουσας δύναμης μας δείχνουν ότι η κλίση του διαγράμματος καμπτικής ροπής θα είναι πάντα θετική, παρόλα αυτά ελαττώνεται γραμμικά, από $dM / dx = q_0L$ για $x = 0$, μέχρι $dM / dx = 0$ για $x = L$. Αφού το διάγραμμα τέμνουσας δύναμης είναι γραμμικό, το διάγραμμα καμπτικής ροπής θα είναι παραβολικό έχοντας γραμμική ελάττωση της κλίσης σχ.(4).



(4)

ΑΣΚΗΣΗ 2.10

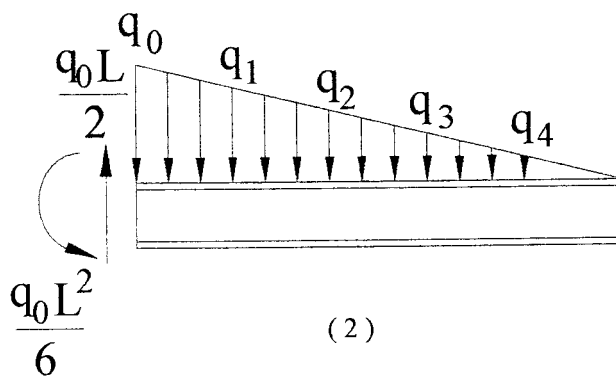
Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης, για την δοκού του σχήματος (1).



(1)

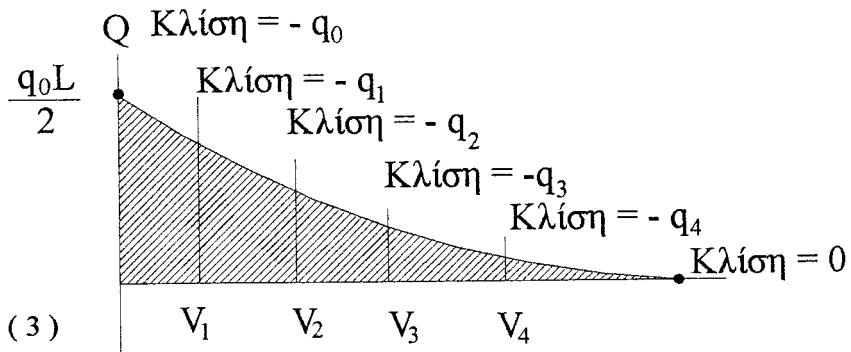
ΛΥΣΗ

Οι αντιδράσεις έχουν υπολογιστεί και τοποθετηθεί στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2).

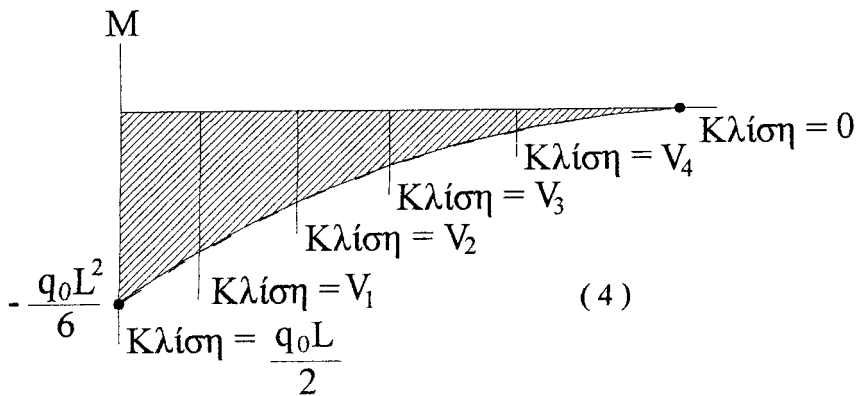


(2)

Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης : το κατανεμημένο φορτίο που ενεργεί πάνω στην δοκό είναι θετικό και έχει γραμμική μείωση. Έτσι η κλίση της καμπύλης στο διάγραμμα θα έχει αρνητική μείωση από $dQ / dx = -q_0$ για $x = 0$ μέχρι $dQ / dx = 0$ για $x = L$. Αφού το φορτίο έχει γραμμική κατανομή, το διάγραμμα τέμνουσας δύναμης θα είναι παραβολικό, με κλίση που θα μειώνεται αρνητικά σχ.(3).

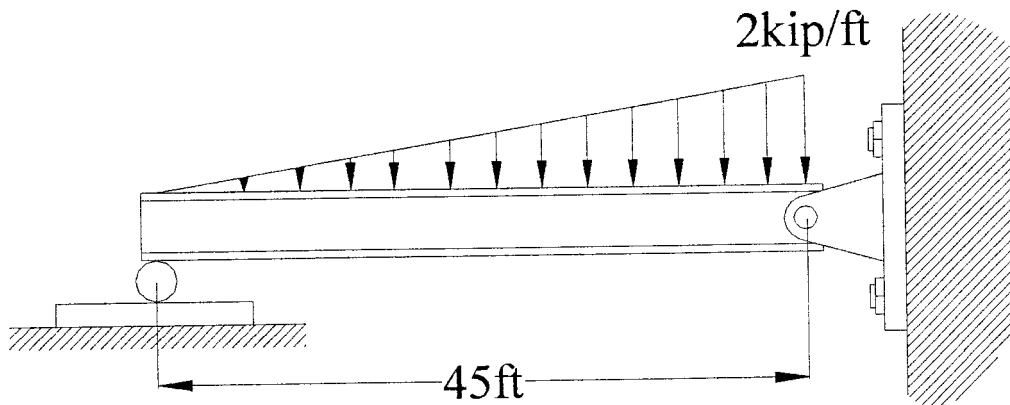


Διάγραμμα καμπτικής ροπής : από το διάγραμμα τέμνουσας δύναμης, η κλίση του διαγράμματος καμπτικής ροπής θα είναι παραβολικό και θα είναι πάντα θετικό αλλά με μείωση από $dM/dx = q_0 L / 2$ για $x = 0$ μέχρι $dM/dx = 0$ για $x = L$.



ΑΣΚΗΣΗ 2.11

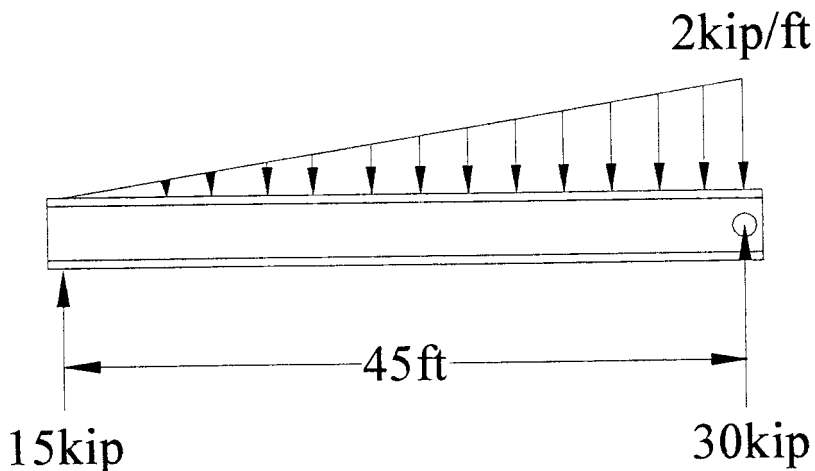
Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).



(1)

ΛΥΣΗ

Οι αντιδράσεις στήριξης έχουν υπολογιστεί και τοποθετηθεί στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2).

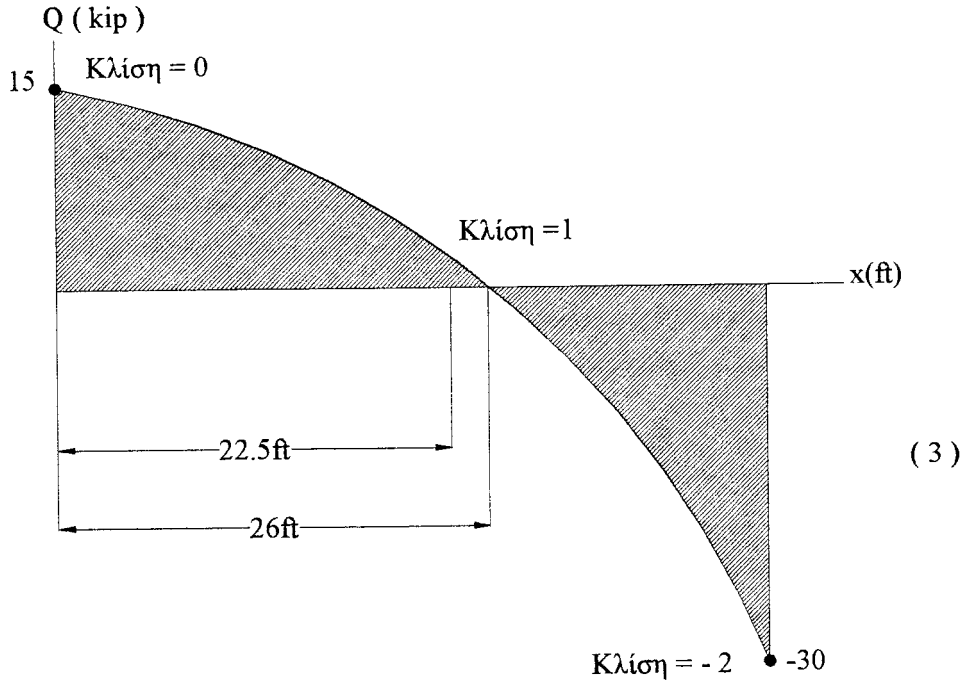


(2)

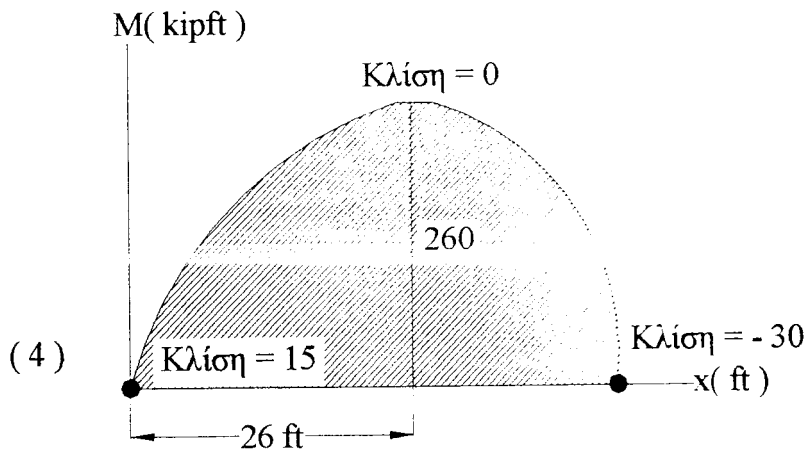
Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης : στα άκρα της δοκού για $x = 0$, $V = + 15$ και για $x = 45$ $V = - 30$ σχ.(3). Η κλίση της δοκού από το κατανεμημένο φορτίο θα μεταβληθεί από $dQ / dx = 0$ για $x = 0$ σε $dQ / dx = - 2$ για $x = 45$. Γενικότερα για $0 \leq x \leq 45$ η κλίση του διαγράμματος τέμνουσας δύναμης θα είναι όλο και περισσότερο αρνητική, αφού το κατανεμημένο φορτίο είναι όλο και περισσότερο θετικό ($dQ / dx = - q$).

Σαν αποτέλεσμα το διάγραμμα θα έχει παραβολική κλίση. Το σημείο μηδέν της τέμνουσας δύναμης μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισοροπίας. Έτσι για $V = 0$ έχουμε :

$$\Sigma F_y = 0 \quad 15 \text{ kip} - 1/2 [2 \text{ kip/ft } (x / 45 \text{ ft })] x = 0 \quad x = 26.0 \text{ ft}$$



Διάγραμμα καμπτικής ροπής : στα άκρα της δοκού για $x = 0$, $M = 0$ και για $x = 45$, $M = 0$ σχ.(4). Από το διάγραμμα τέμνουσας δύναμης, η κλίση του διαγράμματος καμπτικής ροπής θα είναι $dM / dx = 15$ για $x = 0$ και $dM / dx = - 30$ για $x = 45$. Γενικά για $0 \leq x \leq 26$ η κλίση θα είναι όλο και περισσότερο θετική, αφού και η τέμνουσα δύναμη είναι όλο και περισσότερο θετική. Παρομοίως για $26 \leq x \leq 45$ η κλίση θα είναι όλο και περισσότερο αρνητική.

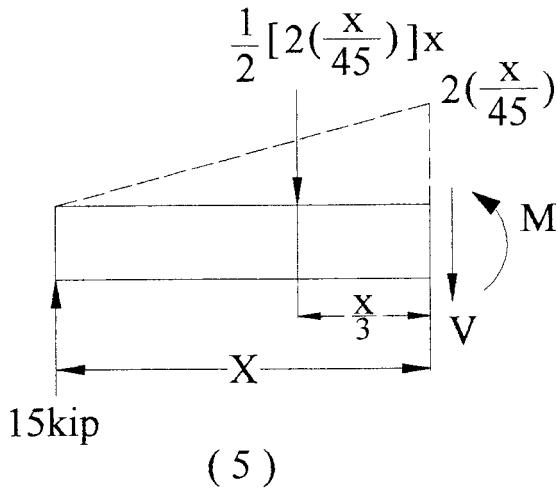


Η μέγιστη καμπτική ροπή είναι για $x = 26$ μιας και $dM / dx = Q = 0$ στο σημείο αυτό.
 Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(5) έχουμε :

$$\Sigma M = 0$$

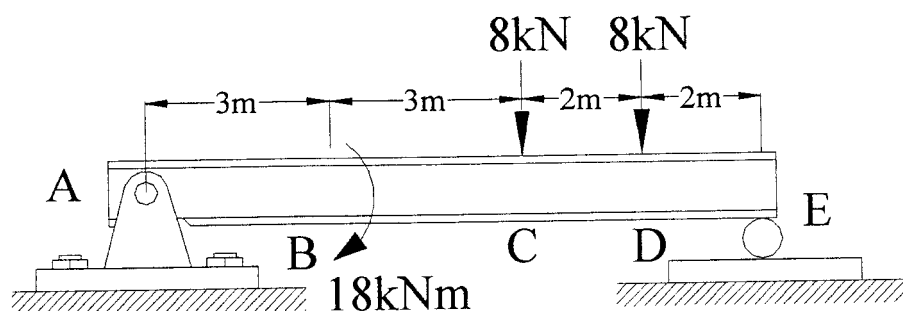
$$- 15 \text{ kip} (26 \text{ ft}) + 1 / 2 [2 \text{ kip/ft} (26.0 \text{ ft} / 45 \text{ ft})] (26.0 \text{ ft}) (26.0 \text{ ft} / 3) + M = 0$$

$$M = 260 \text{ kip ft}$$



ΑΣΚΗΣΗ 2.12

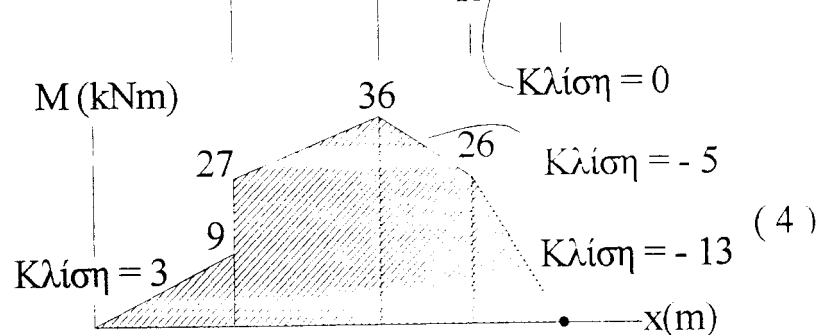
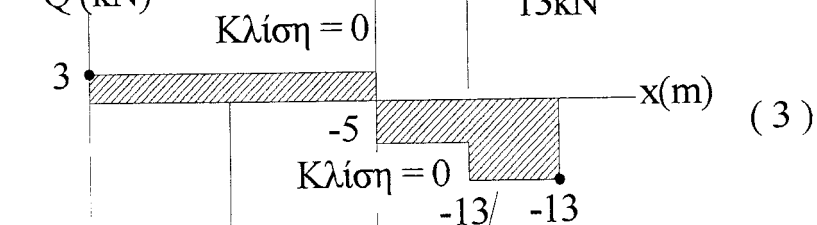
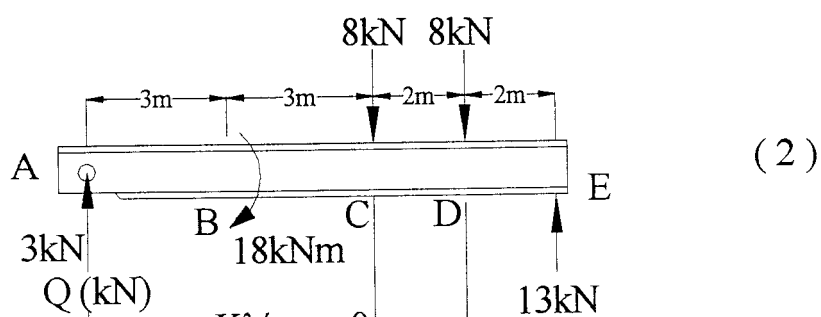
Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).



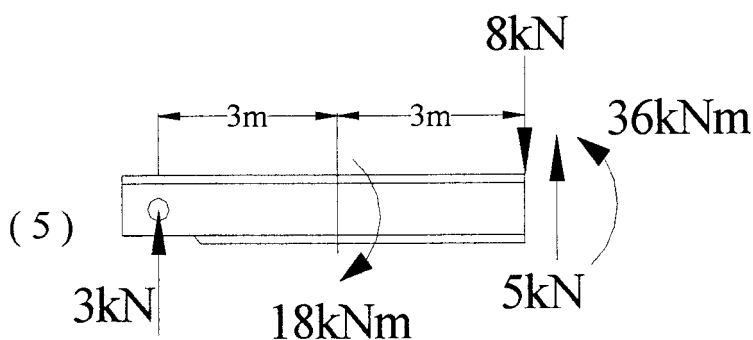
(1)

ΛΥΣΗ

Οι αντιδράσεις στήριξης έχουν υπολογιστεί και τοποθετηθεί στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2).

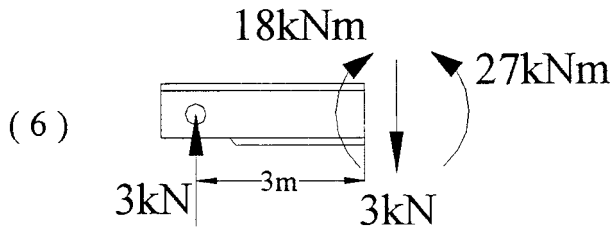


Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης : για $x = 0$, $V_A = + 3 \text{ kN}$ και για $x = 10$, $V_E = - 13 \text{ kN}$ σχ.(3). Σε ενδιάμεσο σημείο του διαγράμματος, η κλίση της τέμνουσας δύναμης θα είναι μηδέν, $dQ / dx = - q(x) = 0$. Η τέμνουσα δύναμη διατηρεί την τιμή $+ 3 \text{ kN}$ σε αυτήν την περιοχή μέχρι το σημείο C. Στο C η τέμνουσα δύναμη διακόπτεται γιατί εκεί συγκεντρώνεται η δύναμη των 8 kN . Η τιμή της τέμνουσας δύναμης στα δεξιά του σημείου C ισούται με $- 5 \text{ kN}$, αφού έχουμε χωρίσει σε τμήματα την δοκό, όπως βλέπουμε στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(5). Το σημείο $V = - 5 \text{ kN}$ είναι σχεδιασμένο στο διάγραμμα. Όπως και πριν το $q(x) = 0$ από το σημείο C προς το σημείο D και από το D προς το σημείο E σχ.(2), έτσι η κλίση θα είναι μηδέν σε αυτά τα σημεία. Το διάγραμμα κάνει άλμα ξανά στο σημείο D και φτάνει την τιμή $- 13 \text{ kN}$ στο σημείο E. Παρατηρούμε ότι κανένα άλμα ή διακοπή δεν συμβαίνει στο σημείο B όπου η καμπτική ροπή 18 kNm εφαρμόζεται. Ο λόγος για αυτό μπορεί να δείχτεί εάν εξετάσουμε την ισορροπία του διαγράμματος ελευθέρου σώματος σχ.(6). Το διάγραμμα μπορεί επίσης να υπολογιστεί ακολουθώντας την φόρτιση στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος. Έτσι ξεκινώντας από το σημείο A η δύναμη 3 kN ενεργεί προς τα πάνω. Έτσι έχουμε $V_A = + 3 \text{ kN}$. Καμία κατανεμημένη φόρτιση δεν ενεργεί ανάμεσα στο A και στο C έτσι η τέμνουσα δύναμη παραμένει σταθερή $dQ / dx = 0$. Στο σημείο C η δύναμη των 8 kN ενεργεί προς τα κάτω. Έτσι έχουμε άλμα προς τα κάτω κατά 8 kN , από τα $+ 3 \text{ kN}$ στα $- 5 \text{ kN}$. Ξανά η τέμνουσα δύναμη παραμένει σταθερή από το C προς το D όπου και κάνει ξανά άλμα, αλλά 8 kN , φτάνοντας στα $- 13 \text{ kN}$. Τελικά χωρίς καμία κατανεμημένη φόρτιση ανάμεσα στο D και στο E τελειώνει στα $- 13 \text{ kN}$.



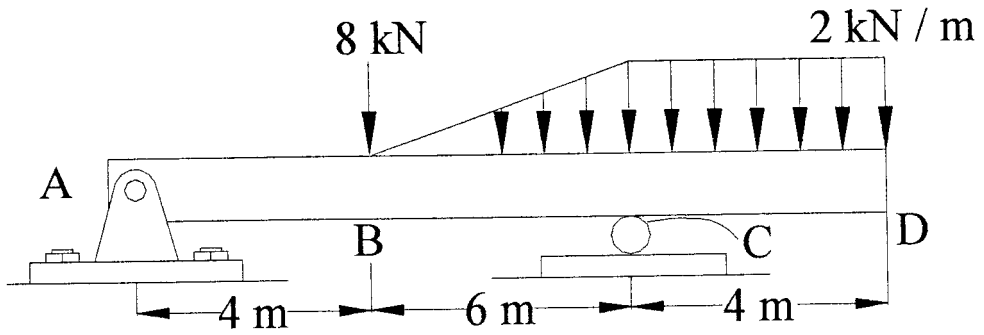
Διάγραμμα καμπτικής ροπής : η ροπή και στα δύο άκρα της δοκού είναι μηδέν σχ (4) Από το διάγραμμα τέμνουσας δύναμης, η κλίση του διαγράμματος της καμπτικής ροπής από το σημείο A στο C είναι σταθερή και αυξάνεται θετικά $+ 3$. Η τιμή της ροπής στα αριστερά του σημείου B είναι $\Delta M_{AB} = M_B - M_A = (3 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m}) - 0 = 9 \text{ kNm}$, αφού η $M_A = 0$, τότε η $M_B = 9 \text{ kNm}$. Στο σημείο B γίνεται **άλμα λόγω της** συγκεντρωμένης ροπής των 18 kNm προς τα επάνω, γιατί η ροπή έχει την φορά του ρολογιού και έτσι η τιμή της δεξιά του σημείου B είναι $M_B = - 27 \text{ kNm}$. Από το σημείο αυτό η κλίση $dM / dx = + 3$ διατηρείται μέχρι το διάγραμμα να φτάσει την κορυφή των 36 kNm . Βρίσκοντας την περιοχή κάτω από το διάγραμμα τέμνουσας δύναμης από το B στο C έχουμε $\Delta M_{BC} = (3 \text{ kN}) (3 \text{ m}) = 9 \text{ kNm}$ έτσι ώστε $M_C = 27 \text{ kNm} + 9 \text{ kNm} = 36 \text{ kNm}$.

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο επαληθεύουμε την τιμή των 26 kNm στο σημείο D και τελειώνουμε στο μηδέν που είναι το σημείο E.



ΑΣΚΗΣΗ 2.13

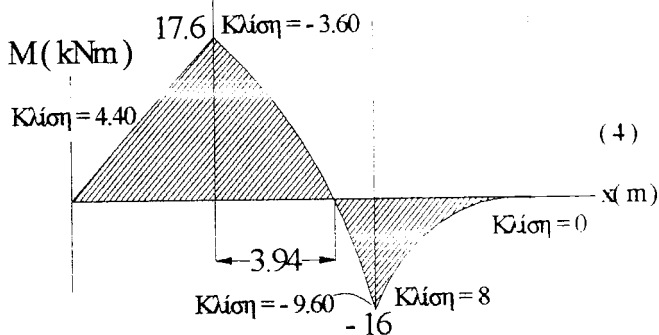
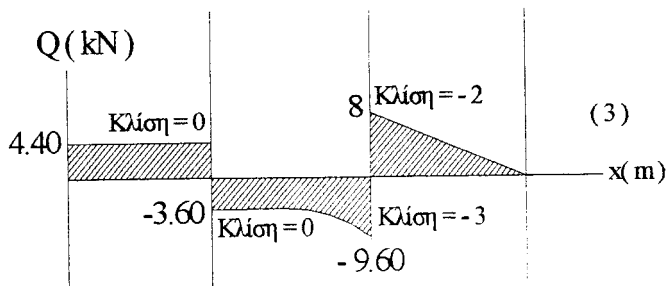
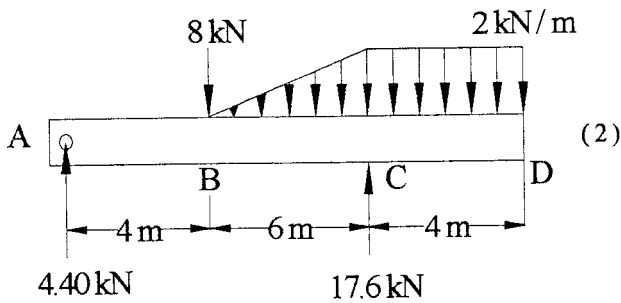
Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για την δοκό του σχήματος (1).



(1)

ΛΥΣΗ

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος υπολογίζουμε τις αντιδράσεις στήριξης σχ.(2).



Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης : συνήθως αρχίζουμε τοποθετώντας τις ροπές που ασκούνται στα άκρα $V_A = + 4.40 \text{ kN}$ και $V_D = 0$ σχ.(3). Αφού δεν υπάρχει φόρτιση στο σημείο A μέχρι το B, η κλίση του διαγράμματος θα είναι μηδέν. Ακόμα αφού το φορτίο q αυξάνεται θετικά από το B μέχρι το σημείο C, η κλίση του διαγράμματος θα αυξάνεται αρνητικά. Τέλος από το σημείο C μέχρι το D το φορτίο q είναι σταθερό και για αυτό η κλίση του διαγράμματος θα είναι σταθερά αρνητική. Χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες περιοχές κάτω από το διάγραμμα του φορτίου (καμπύλη του q), βρίσκουμε τις αλλαγές της ροπής. Για παράδειγμα $\Delta V_{BC} = - (1/2)(6 \text{ m})(2 \text{ k/m}) = - 6 \text{ kN}$, έτσι ώστε $V_C = - 3.60 \text{ kN} - 6 \text{ kN} = - 9.60 \text{ kN}$ αριστερά του C.

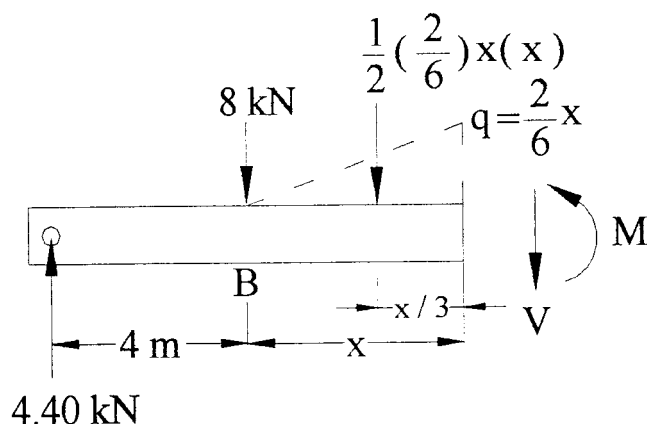
Διάγραμμα καμπτικής ροπής : οι καμπτικές ροπές στα άκρα είναι $M_A = 0$ και $M_D = 0$ σχ.(4). Παρατηρώντας το διάγραμμα βλέπουμε πως η κλίση και οι διάφορες καμπύλες έχουν τοποθετηθεί από το διάγραμμα τέμνουσας δύναμης χρησιμοποιώντας την σχέση $dM / dx = Q$. Το σημείο μηδέν της καμπτικής ροπής μπορεί να υπολογιστεί εάν εγκαταστήσουμε το M σαν συνάρτηση του x , το x εκτείνεται από το σημείο B μέσα στην περιοχή BC σχ.(5).

$$\Sigma M = 0$$

$$- 4.40 \text{ kN} (4 \text{ m} + x) + 8 \text{ kN} (x) + 1/2 \left(\frac{2 \text{ kN/m}}{6 \text{ m}} \right) x (x) (x/3) + M = 0$$

$$M = [- (1/18) x^3 - 3.60 x + 17.6] \text{ kNm} = 0$$

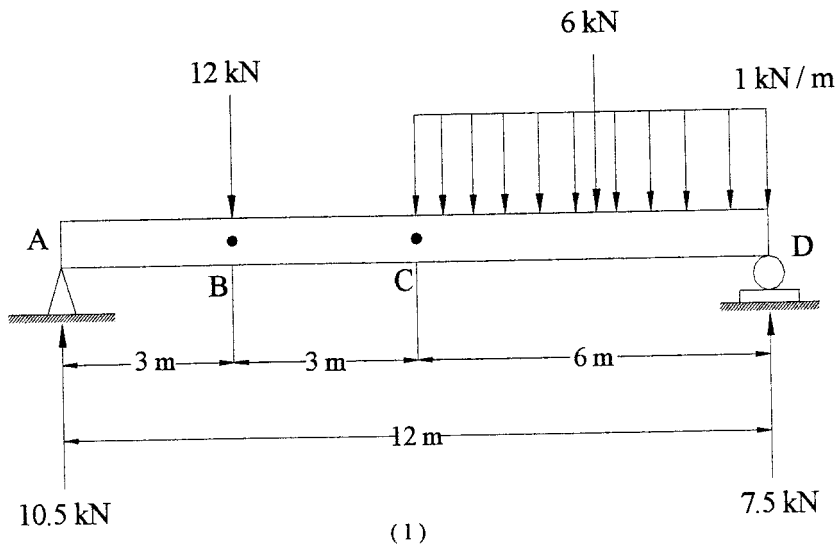
$$x = 3.49 \text{ m}$$



(5)

ΑΣΚΗΣΗ 2.14

Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις μεταξύ των φορτίσεων, της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής, για να σχεδιάσετε τα [Q] (Δ.Τ.Δ.) και [M] (Δ.Ρ.Κ.) διαγράμματα για την δοκό του σχήματος (1).



ΛΥΣΗ

Υπολογισμός (Δ.Τ.Δ.) διαγράμματος : Η τιμή της τέμνουσας δύναμης αριστερά του σημείου A είναι μηδέν.

$$V_A = 0$$

$$\Delta V \text{ (από αριστερά προς δεξιά του A)} = 10.5 \text{ kN}$$

$$V \text{ (δεξιά του A)} = 10.5 \text{ kN}$$

$$\Delta V \text{ (από αριστερά προς δεξιά του B)} = -12 \text{ kN}$$

$$V \text{ (δεξιά του B)} = 10.5 - 12 = -1.5 \text{ kN}$$

$$\Delta V \text{ (από δεξιά του B προς το C)} = 0$$

$$V \text{ (στο C)} = -1.5 \text{ kN}$$

$$\Delta V \text{ (από το C μέχρι αριστερά του D)} = 1(-6) = -6.0 \text{ kN}$$

$$V \text{ (αριστερά του D)} = -1.5 - 6.0 = -7.5 \text{ kN}$$

$$\Delta V \text{ (από αριστερά του D μέχρι δεξιά του D)} = 7.5 \text{ kN}$$

$$V_{(\text{δεξιά του D})} = -7.5 + 7.5 = 0$$

Υπολογισμός (Δ.Ρ.Κ.) διαγράμματος :

$$M_A = 0$$

$$\Delta M_{AB} = 10.5(3) = 31.5 \text{ kNm}$$

$$M_B = 31.5 \text{ kNm}$$

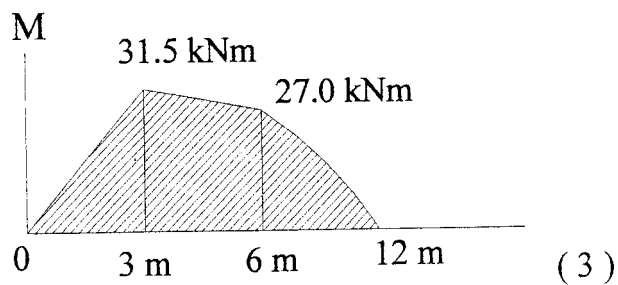
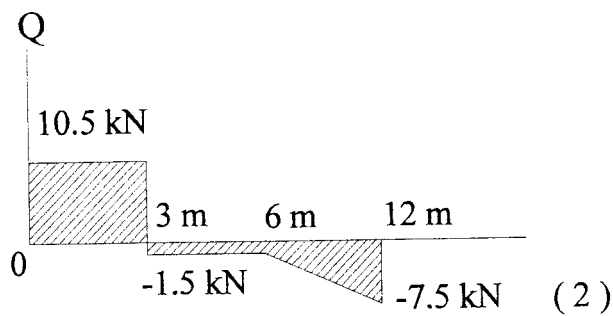
$$\Delta M_{BC} = -1.5(3) = -4.5 \text{ kNm}$$

$$M_C = 31.5 - 4.5 = 27 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{CD} = \frac{-(7.5 + 1.5)(6)}{2} = -27 \text{ kNm}$$

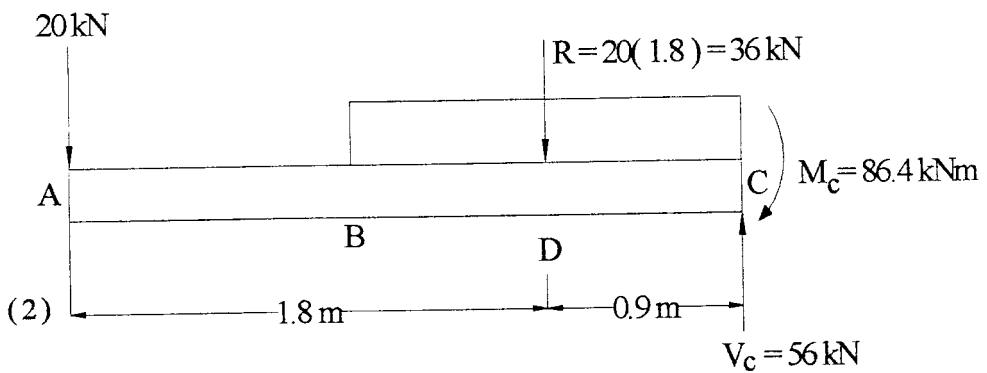
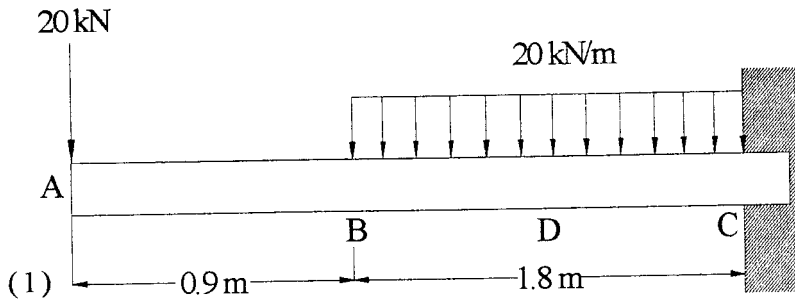
$$M_D = 27 - 27 = 0$$

Διαγράμματα τέμνουσας δύναμης σχ.(2) και ροπής κάμψης σχ.(3)



ΑΣΚΗΣΗ 2.15

Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις μεταξύ των φορτίσεων, της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής, για να σχεδιάσετε τα [Q] (Δ.Τ.Δ.) και [M] (Δ.Ρ.Κ.) διαγράμματα για την δοκό του σχήματος (1).



ΛΥΣΗ

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2) και τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε :

$$\Sigma M_B = 0 \quad : \quad 20(2.7) + 36(0.9) - M_C = 0 \quad M_C = 86.4 \text{ kNm}$$

$$\Sigma f_y = 0 \quad : \quad -20 - 36 + V_C = 0 \quad V_C = 56 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad : \quad -36(1.8) + V_C(2.7) - M_C = 0$$

$$-36(1.8) + 56(2.7) - 86.4 = 0$$

Υπολογισμός (Δ.Τ.Δ.) διαγράμματος : Η τιμή της τέμνουσας δύναμης αριστερά του σημείου A είναι μηδέν.

$$V_{(\text{αριστερά του A})} = 0$$

$$\Delta V_{(\text{από αριστερά προς τα δεξιά του A})} = - 20 \text{ kN}$$

$$V_{(\text{δεξιά του A})} = - 20 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{(\text{από δεξιά του A προς το B})} = 0$$

$$V_{(\text{στο B})} = - 20 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{(\text{από το B προς το C})} = - 36 \text{ kN}$$

$$V_{(\text{δεξιά του C})} = - 20 - 36 = - 56 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{(\text{από αριστερά του C μέχρι δεξιά του C})} = 56 \text{ kN}$$

$$V_{(\text{δεξιά του C})} = - 56 + 56 = 0$$

Υπολογισμός (Δ.Ρ.Κ.) διαγράμματος :

$$M_A = 0$$

$$\Delta M_{AB} = - 20(0.9) = - 18 \text{ kNm}$$

$$M_B = - 18 \text{ kNm}$$

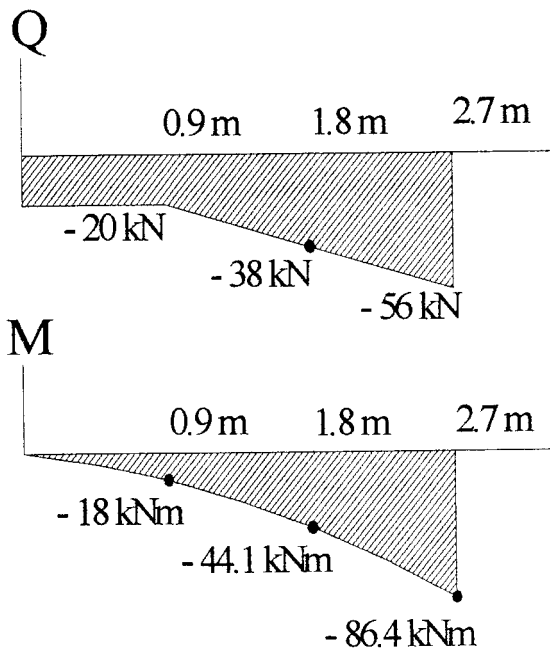
$$\Delta M_{BD} = 0.9 \left(\frac{- 20 - 38}{2} \right) = - 26.1 \text{ kNm}$$

$$M_D = - 18 - 26.1 = - 44.1 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{DC} = 0.9 \left(\frac{- 38 - 56}{2} \right) = - 42.3 \text{ kNm}$$

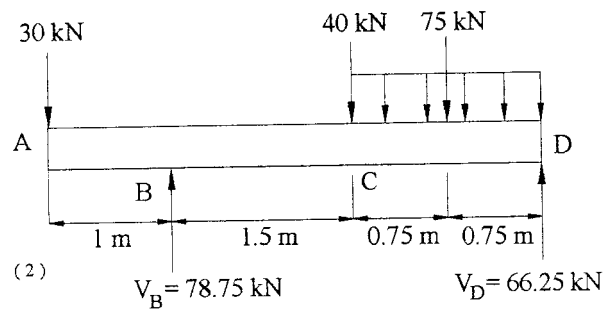
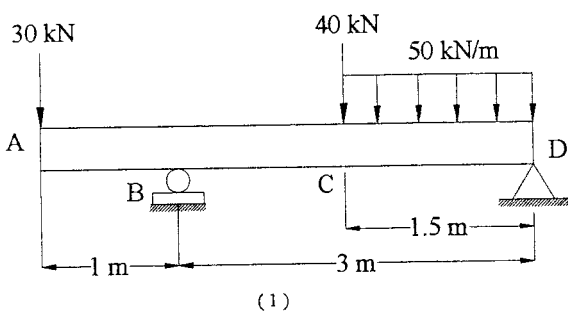
$$M_C = - 44.1 - 42.3 = - 86.4 \text{ kNm}$$

Διαγράμματα τέμνουσας δύναμης και ροπής κάμψης :



ΑΣΚΗΣΗ 2.16

Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις μεταξύ των φορτίσεων, της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής για να σχεδιάσετε τα [Q] (Δ.Τ.Δ.) και [M] (Δ.Ρ.Κ.) διαγράμματα, για την δοκό του σχήματος (1).



ΛΥΣΗ

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2) και τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε :

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 & : 30(1) - 40(1.5) - 75(2.25) + V_D(3) = 0 \\ V_D & = 66.25 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_D = 0 & : 30(4) - V_B(3) + 40(1.5) + 75(2.25) = 0 \\ V_B & = 78.75 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 & : -30 + V_B - 40 - 75 + V_D = 0 \\ -30 + 78.75 - 40 - 75 + 66.25 & = 0 \end{aligned}$$

Υπολογισμός (Δ.Τ.Δ.) διαγράμματος : Η τιμή της τέμνουσας δύναμης αριστερά του σημείου A είναι μηδέν.

$$V_{\text{(αριστερά του A)}} = 0$$

$$\Delta V_{\text{(από αριστερά προς τα δεξιά του A)}} = -30 \text{ kN}$$

$$V_{(\text{δεξιά του A})} = -30 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{(\text{από το A προς το B})} = 0$$

$$V_{(\text{αριστερά του B})} = -30 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{(\text{από αριστερά του B μέχρι δεξιά του B})} = 78.75 \text{ kN}$$

$$V_{(\text{δεξιά του B})} = 78.75 - 30 = 48.75 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{(\text{από το B μέχρι το C})} = 0$$

$$V_{(\text{αριστερά του C})} = 48.75 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{(\text{από αριστερά του C μέχρι δεξιά του C})} = -40 \text{ kN}$$

$$V_{(\text{δεξιά του C})} = -40 + 48.75 = 8.75 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{(\text{από αριστερά του C μέχρι δεξιά του D})} = -75 \text{ kN}$$

$$V_{(\text{αριστερά του D})} = 8.75 - 75 = -66.25 \text{ kN}$$

$$\Delta V_{(\text{από αριστερά του D μέχρι δεξιά του D})} = 66.25 \text{ kN}$$

$$V_{(\text{δεξιά του D})} = -66.25 + 66.25 = 0$$

Για να βρούμε που είναι το σημείο E, όπου η τέμνουσα δύναμη ισούται με το μηδέν γράφουμε :

$$\Delta V_{(\text{από δεξιά του C προς το E})} = -50x' = -8.75 \quad \text{ή} \quad x' = 0.175 \text{ m}$$

Το μέρος ,όπου η τέμνουσα δύναμη ισούται με το μηδέν, είναι : $x = 2.5 + 0.175 = 2.675 \text{ m}$. Το διάγραμμα της τέμνουσας δύναμης είναι σχεδιασμένο στο σχήμα (3).

Υπολογισμός (Δ.Ρ.Κ.) διαγράμματος :

$$M_A = 0$$

$$\Delta M_{AB} = -30(1) = -30 \text{ kNm}$$

$$M_B = -30 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{BC} = 48.75(1.5) = 73.125 \text{ kNm}$$

$$M_C = -30 + 73.125 = 43.125 \text{ kNm}$$

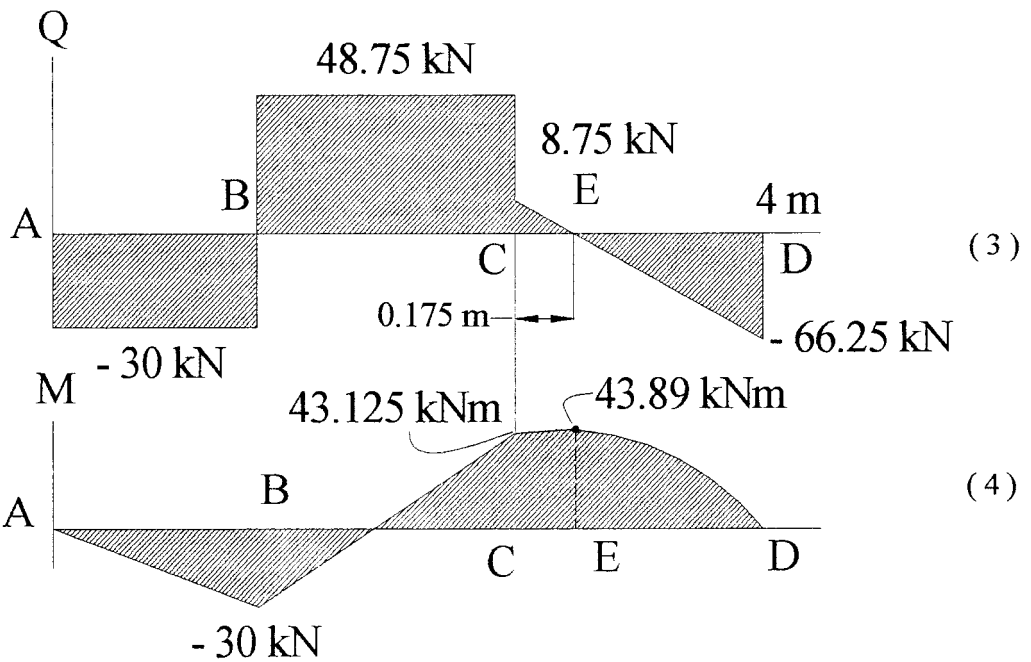
$$\Delta M_{CE} = \frac{(0.175)(8.75)}{2} = 0.766 \text{ kNm}$$

$$M_E = 43.125 + 0.766 = 43.891 \text{ kNm}$$

$$\Delta M_{CE} = \frac{(1.5 - 0.175)(-66.25)}{2} = -43.891 \text{ kNm}$$

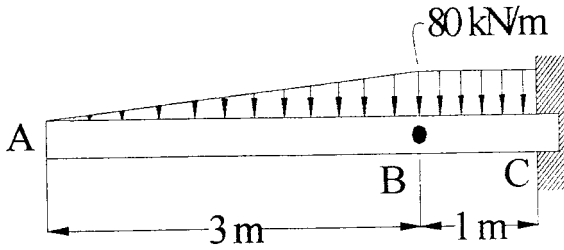
$$M_D = 43.891 - 43.891 = 0$$

Το διάγραμμα καμπτικής ροπής είναι σχεδιασμένο στο σχήμα (4).

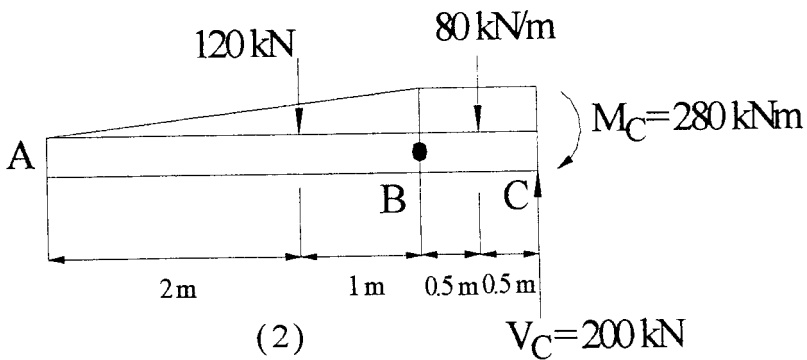


ΑΣΚΗΣΗ 2.17

Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις μεταξύ των φορτίσεων, της τέμνουσας δύναμης και της καμπτικής ροπής, για να σχεδιάσετε τα [Q] (Δ.Τ.Δ.) και [M] (Δ.Ρ.Κ.) διαγράμματα για την δοκό του σχήματος (1).



(1)



(2)

ΛΥΣΗ

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2) και τις εξισώσεις ισορροπίας έχουμε :

$$\Sigma M_C = 0 \quad : \quad 120(2) + 80(0.5) - M_C = 0 \quad M_C = 280 \text{ kNm}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad -120 - 80 + V_C = 0 \quad V_C = 200 \text{ kNm}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad : \quad -120(2) - 80(3.5) + V_C(4) - M_C = 0$$

$$-120(2) - 80(3.5) + 200(4) - 280 = 0$$

Υπολογισμός (Δ.Τ.Δ.) διαγράμματος : Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2), υπολογίζουμε την τέμνουσα δύναμη.

$$V_A = 0$$

$$\Delta V_{(\text{από το A προς το B})} = \frac{80(3)}{2} = -120 \text{ kN}$$

$$V_B = -120 \text{ kN}$$

$$\Delta V \text{ (από το Β προς το C)} = -80(1) = -80 \text{ kN}$$

$$V_C = -120 - 80 = -200 \text{ kN}$$

Υπολογισμός (Δ.Ρ.Κ.) διαγράμματος :

$$M_A = 0$$

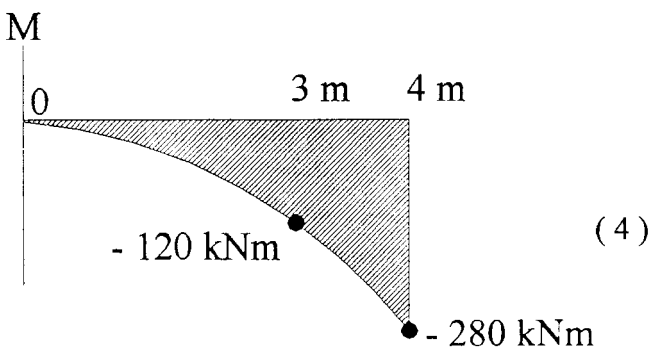
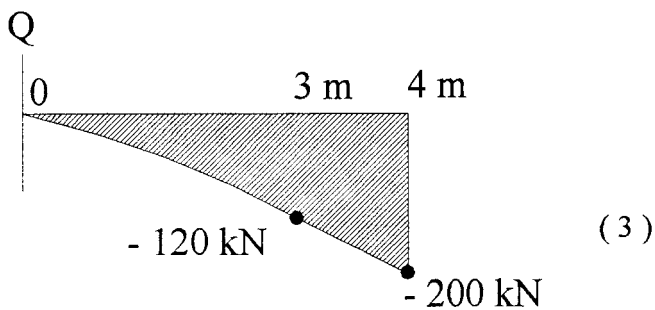
$$M_{AB} = \frac{-120(3)}{3} = -120 \text{ kNm}$$

$$M_B = -120 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = \frac{(120 + 200)}{2} = -160 \text{ kNm}$$

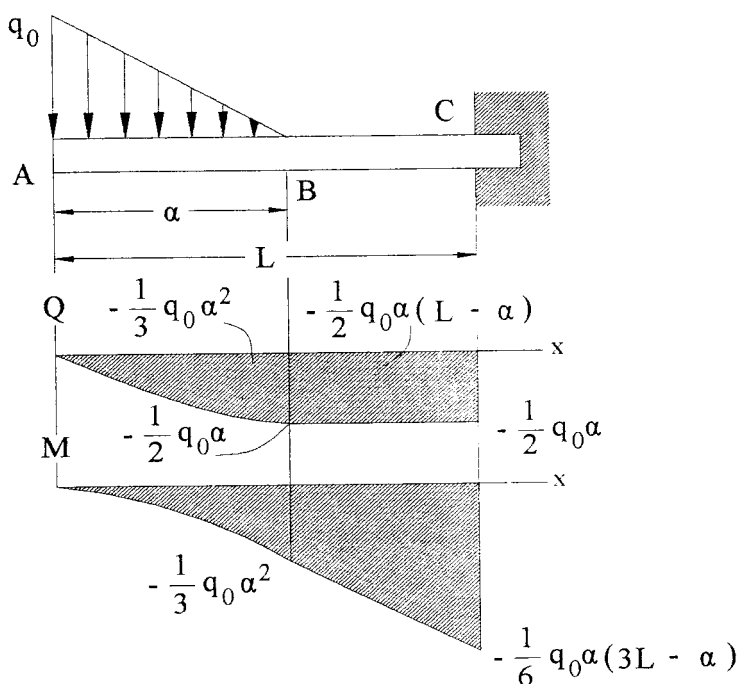
$$M_C = -120 - 160 = -280 \text{ kNm}$$

Τα διαγράμματα τέμνουσας δύναμης σχ.(3) και καμπτικής ροπής σχ.(4) είναι σχεδιασμένα παρακάτω :



ΑΣΚΗΣΗ 2.18

Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για τον πρόβολο του σχήματος (1).



ΛΥΣΗ

Διάγραμμα τέμνουσας δύναμης : στο ελεύθερο άκρο της δοκού βρίσκουμε την $V_A = 0$. Μεταξύ του σημείου A και B η περιοχή κάτω από το φορτίο είναι $\frac{1}{2}q_0\alpha$; Βρίσκουμε την V_B γράφοντας :

$$V_A - V_B = -1/2(q_0\alpha)$$

$$V_B = -1/2(q_0\alpha)$$

Ανάμεσα του σημείο B και του σημείο C η δοκός δεν φορτίζεται γι' αυτό $V_A = V_B$. Στο σημείο A το φορτίο $q = q_0$, έτσι η κλίση του διαγράμματος είναι $dQ/dx = -q_0$, ενώ στο σημείο B η κλίση είναι $dQ/dx = 0$. Ανάμεσα στο A και στο B η φόρτιση ελαττώνεται γραμμικά και το διάγραμμα γίνεται παραβολικό. Ανάμεσα στο B και στο C το φορτίο $q = 0$ και το διάγραμμα είναι οριζόντια γραμμή.

Διάγραμμα καμπτικής ροπής : η καμπτική ροπή στο άκρο της δοκού είναι μηδέν. Υπολογίζουμε την περιοχή κάτω από την τέμνουσα καμπύλη και γράφουμε :

$$M_B - M_A = -1/3(q_0\alpha^2)$$

$$M_B = -1/3(q_0\alpha^2)$$

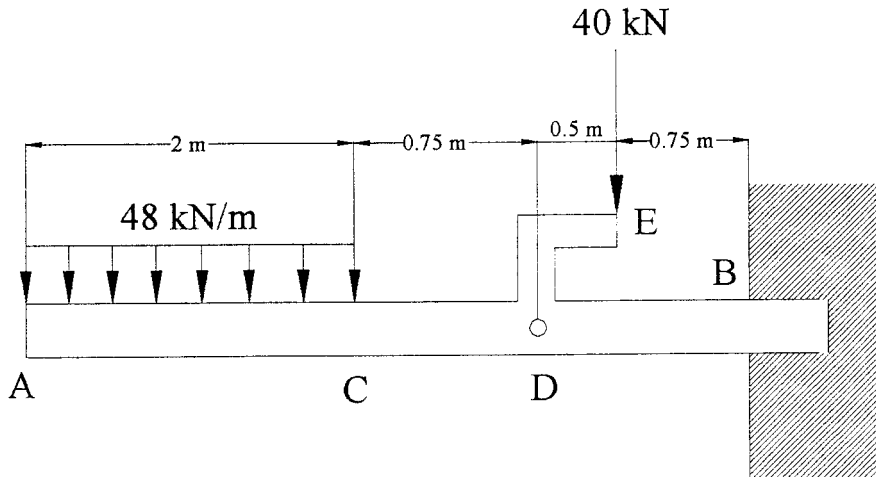
$$M_C - M_B = -1/2(q_0\alpha)(L - \alpha)$$

$$M_C = -1/6(q_0\alpha)(3L - \alpha)$$

Ο σχεδιασμός του διαγράμματος καμπτικής ροπής ολοκληρώνεται ανακαλώντας την σχέση $dM/dx = V$. Βλέπουμε επίσης ότι μεταξύ του A και του B το διάγραμμα είναι κυβική καμπύλη με μηδενική κλίση στο A και ανάμεσα στο B και στο C είναι ευθεία γραμμή.

ΑΣΚΗΣΗ 2.19

Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για τον πρόβολο AB. Το κατανεμημένο φορτίο εκτείνεται για 2 m και η δύναμη 40 kN ασκείται στο σημείο E σχ. (1).



(1)

ΛΥΣΗ

Η δύναμη των 40 kN έχει αντικατασταθεί από το ισοδύναμο σύστημα δυνάμεων στο σημείο D. Η αντίδραση στο σημείο B έχει καθοριστεί λαμβάνοντας όλο τον πρόβολο σαν διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2).

Από το σημείο A μέχρι το C : υπολογίζουμε την εσωτερική δύναμη για απόσταση x από το σημείο A, λαμβάνοντας υπόψιν το τμήμα του προβόλου στα αριστερά του τομέα 1. Αυτό το μέρος του φορτίου, που ενεργεί στο διάγραμμα ελευθέρου σώματος, είναι αντικαταστημένο από την συνισταμένη του, οπότε γράφουμε :

$$\Sigma F_y = 0 \quad - 48x - V = 0 \quad V = - 48x \text{ kN}$$

$$\Sigma M_1 = 0 \quad 48\left(\frac{1}{2}x\right) + M = 0 \quad M = - 24x^2 \text{ kNm}$$

Οι τιμές για V και M είναι έγκυρες για την περιοχή $0 < x < 2 \text{ m}$

Από το σημείο C μέχρι το D : λαμβάνοντας υπόψιν το τμήμα του προβόλου στα αριστερά του τομέα 2 και αντικαθιστώντας το φορτίο με την συνισταμένη του, έχουμε :

$$\Sigma F_y = 0 \quad - 96 - V = 0 \quad V = - 96 \text{ kN}$$

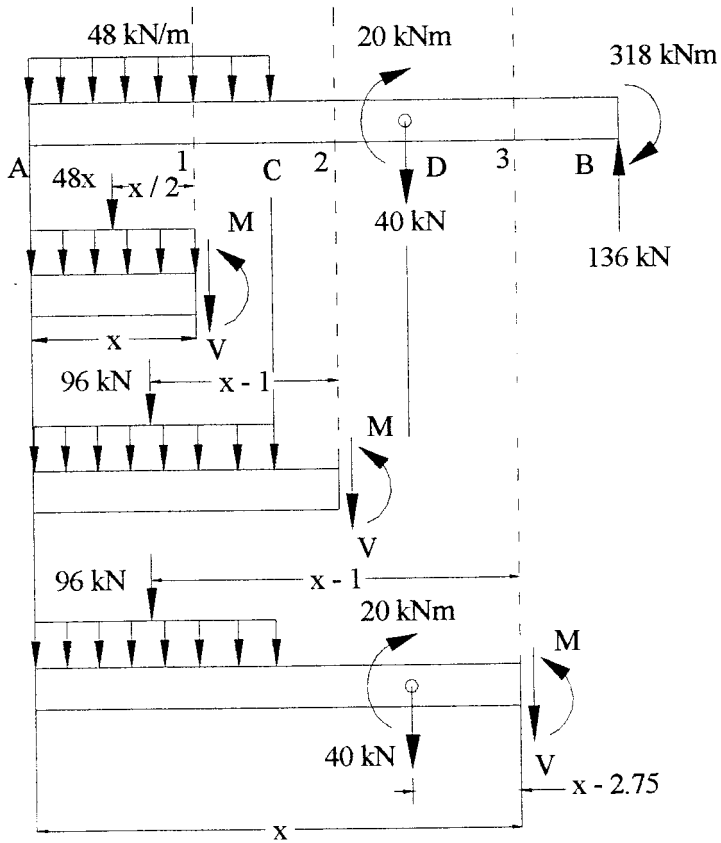
$$\Sigma M_2 = 0 \quad 96(x - 1) + M = 0 \quad M = 96 - 96x \text{ kNm}$$

Τα αποτελέσματα για V και M ισχύουν για την περιοχή $2 \text{ m} < x < 2.75 \text{ m}$.

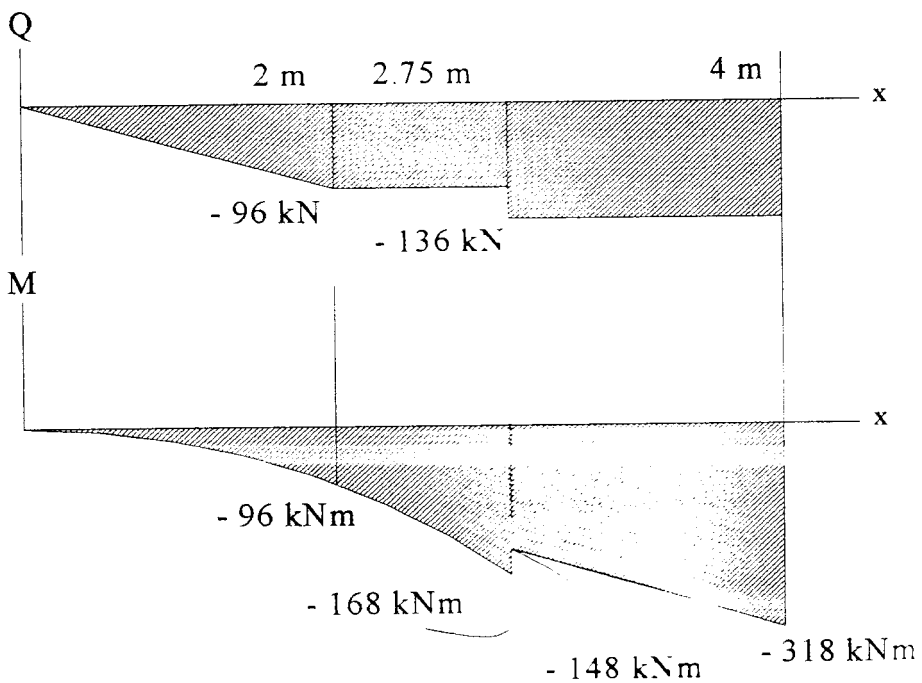
Από το σημείο D μέχρι το B : χρησιμοποιώντας το τμήμα του προβόλου αριστερά του τομέα 3 και για την περιοχή $2.75 \text{ m} < x < 4 \text{ m}$, έχουμε :

$$V = -136 \text{ kN}$$

$$M = 226 - 136x \text{ kNm}$$

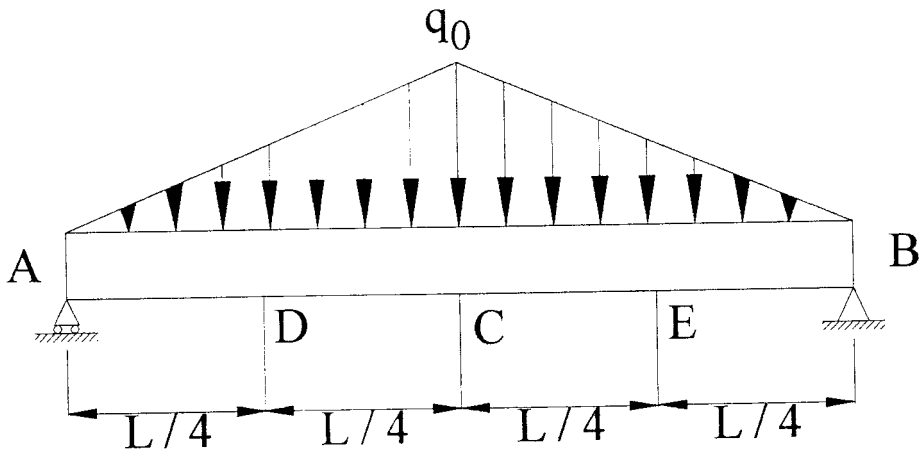


Τα διαγράμματα για ολόκληρη την δοκό μπορούν να σχεδιαστούν όπως παρακάτω. Παρατηρούμε ότι η καμπτική δύναμη 20 kNm στο σημείο D προκαλεί άλμα στο διάγραμμα καμπτικής ροπής.



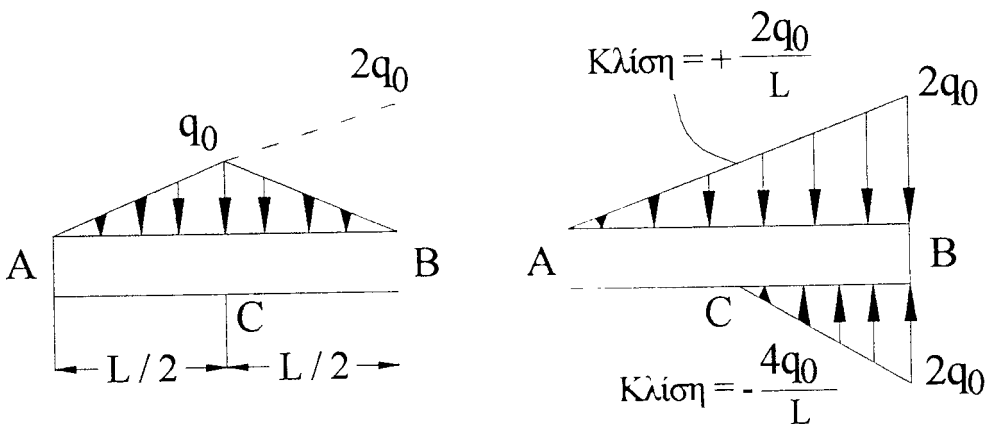
ΑΣΚΗΣΗ 2.20

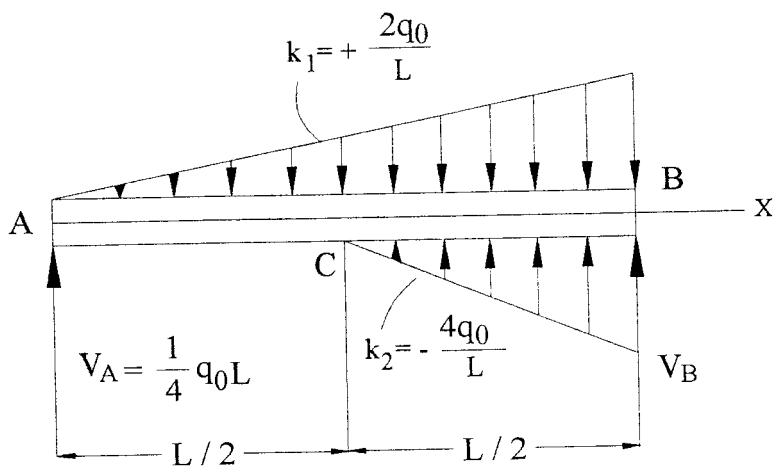
Για την δοκό του σχήματος, α) να υπολογίσετε τις εξισώσεις για την τέμνουσα δύναμη και την καμπτική ροπή σε κάθε σημείο της, β) να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για τα σημεία C, D και E.



ΛΥΣΗ

Το συνολικό φορτίο είναι $\frac{1}{2} q_0 L$ εξαιτίας της συμμετρίας. Κάθε αντίδραση είναι ίση με το μισό αυτού του φορτίου δηλαδή ίση με $\frac{1}{4} q_0 L$.





Το κατανεμημένο φορτίο έχει αντικατασταθεί από δύο ίσα τριγωνικά φορτία . Για το δεύτερο φορτίο γράφουμε :

$$q(x) = k_1 x + k_2 (x - \frac{1}{2} L) = \frac{2 q_0}{L} x - \frac{4 q_0}{L} (x - \frac{1}{2} L) \quad (1)$$

α) Να υπολογιστούν οι εξισώσεις για την τέμνουσα δύναμη και την καμπτική ροπή.

Από την εξίσωση (1) θα βρούμε την εξίσωση για την τέμνουσα δύναμη . Έτσι έχουμε :

$$V(x) = - \frac{q_0}{L} x^2 + \frac{2q_0}{L} (x - \frac{1}{2} L)^2 + \frac{1}{4} q_0 L \quad (2)$$

Για την καμπτική ροπή έχουμε :

$$M(x) = - \frac{q_0}{L} x^3 + \frac{2q_0}{3L} (x - \frac{1}{2} L)^3 + \frac{1}{4} q_0 L x \quad (3)$$

β) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα καμπτικής ροπής και τέμνουσας δύναμης για τα σημεία C, D και E.

Στο σημείο C : αντικαθιστώντας όπου $x = \frac{1}{2} L$ στις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε :

$$V_C = - \frac{q_0}{L} (\frac{1}{2} L)^2 + \frac{2q_0}{L} (\frac{1}{2} L - \frac{1}{2} L)^2 + \frac{1}{4} q_0 L$$

$$V_C = 0$$

$$M_C = - \frac{q_0}{3L} \left(\frac{1}{2} L \right)^3 + \frac{2q_0}{3L} \left(\frac{1}{2} L - \frac{1}{2} L \right)^3 + \frac{1}{4} q_0 L \left(\frac{1}{2} L \right)$$

$$M_C = \frac{1}{12} q_0 L^2$$

Στο σημείο D : αντικαθιστώντας όπου $x = \frac{1}{4} L$ στις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε :

$$V_D = - \frac{q_0}{L} \left(\frac{1}{4} L \right)^2 + \frac{2q_0}{L} \left(- \frac{1}{4} L \right)^2 + \frac{1}{4} q_0 L$$

$$V_D = \frac{3}{16} q_0 L$$

$$M_D = - \frac{q_0}{3L} \left(\frac{1}{4} L \right)^3 + \frac{2q_0}{3L} \left(- \frac{1}{4} L \right)^3 + \frac{1}{4} q_0 L \left(\frac{1}{4} L \right)$$

$$M_D = \frac{11}{192} q_0 L^2$$

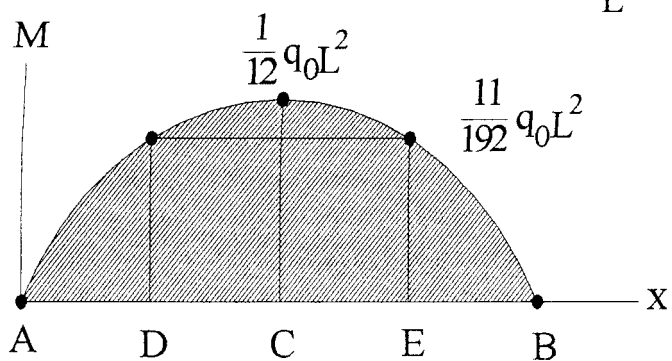
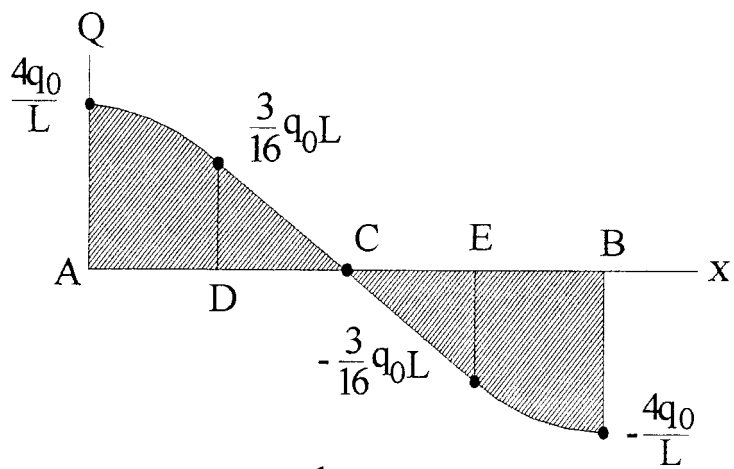
Στο σημείο E : αντικαθιστώντας όπου $x = \frac{3}{4} L$ στις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε :

$$V_E = - \frac{q_0}{L} \left(\frac{3}{4} L \right)^2 + \frac{2q_0}{L} \left(\frac{1}{4} L \right)^2 + \frac{1}{4} q_0 L$$

$$V_E = - \frac{3}{16} q_0 L$$

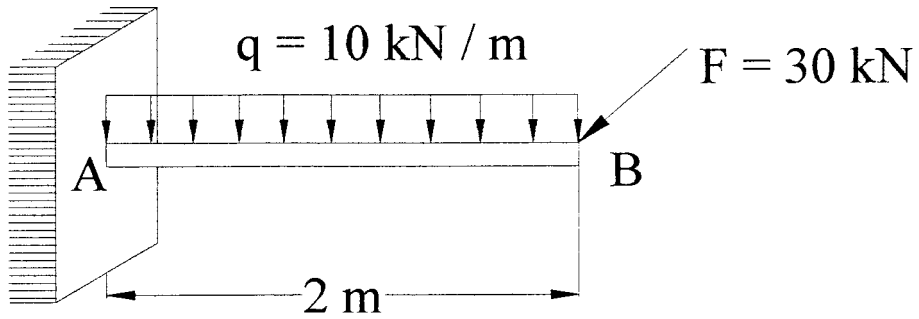
$$M_E = - \frac{q_0}{3L} \left(\frac{3}{4} L \right)^3 + \frac{2q_0}{3L} \left(\frac{1}{4} L \right)^3 + \frac{1}{4} q_0 L \left(\frac{3}{4} L \right)$$

$$M_E = \frac{11}{192} q_0 L^2$$



ΑΣΚΗΣΗ 2.21

Να υπολογίσετε τα φορτία διατομής της ευθύγραμμης δοκού του σχήματος (1).



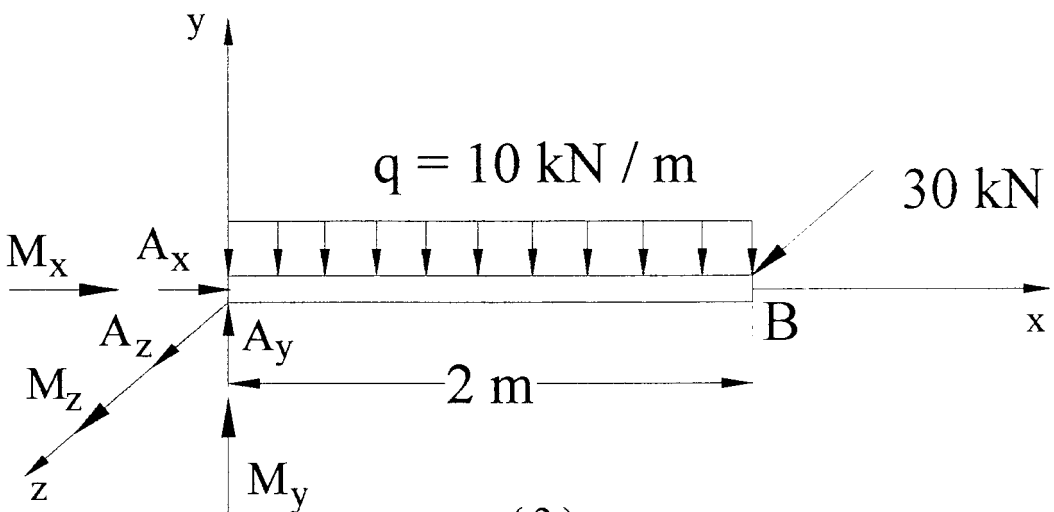
(1)

ΛΥΣΗ

Από το διάγραμμα ελευθέρου σώματος σχ.(2) θα βρούμε τις αντιδράσεις στήριξης

$$\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 20 = 0 \quad A_y = 20 \text{ kN}$$



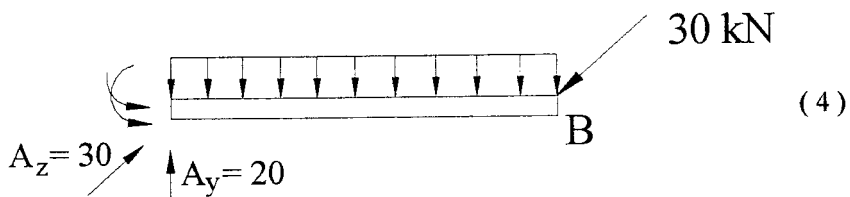
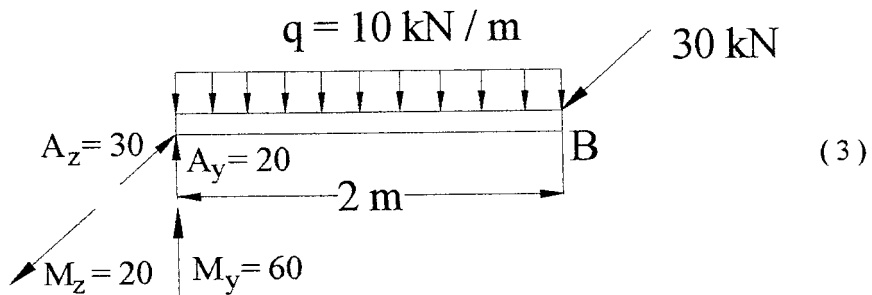
(2)

$$\Sigma F_z = 0 \quad A_z + 30 = 0 \quad A_z = -30 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad (i)x(-20j) + (2i)x(30k) + M_x i + M_y j - M_z k = 0$$

$$M_x = 0 \quad M_y = 60 \text{ kNm} \quad M_z = 20 \text{ kNm}$$

Σχεδιάζουμε ξανά το Δ.Ε.Σ. της δοκού βάζοντας τις φορές και τις τιμές των αντιδράσεων, που βρήκαμε πιο πάνω, σχ.(3). Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τα φορτία διατομής, ξεκινώντας ή από τα αριστερά ή από τα δεξιά.



Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα φορτία διατομής χωρίς τις αντιδράσεις, αν ξεκινούσαμε από τα αριστερά. Τα χαρακτηριστικά σημεία της δοκού είναι το A και το B. Η δοκός δεν καταπονείται ούτε με αξονικές δυνάμεις ούτε με στρεπτικές ροπές (δεν φορτίζεται με εξωτερικά φορτία κατά τη διεύθυνση του άξονα της και τα επίπεδα φόρτισης περνάνε από τον άξονα της δοκού).

Τέμνουσες Δυνάμεις

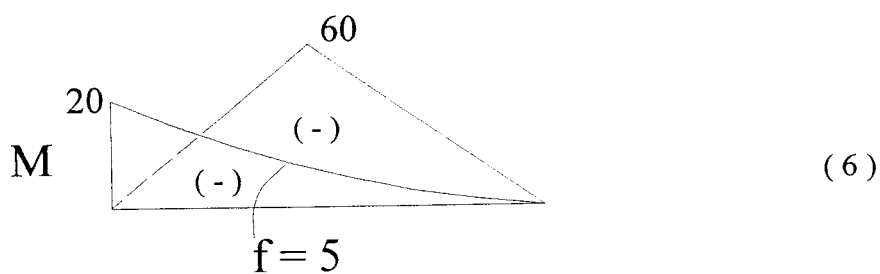
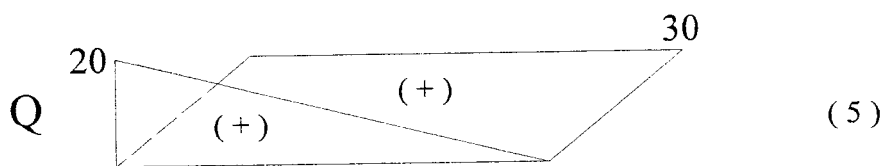
$$\begin{aligned} Q_{By} &= 0 & Q_{Ay} &= 20 \text{ kN} \\ Q_{Bz} &= 30 \text{ kN} & Q_{Az} &= 30 \text{ kN} \end{aligned}$$

Καμπτικές ροπές

$$\begin{aligned} M_{By} &= 0 & M_{Ay} &= -60 \text{ kNm} \\ M_{Bz} &= 0 & M_{Az} &= -20 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Όπως είδαμε παραπάνω, σαν επίπεδα αναφοράς θεωρούμε το κάτω και το εμπρός επίπεδο. Στο σχ.(4) σχεδιάσαμε το Δ.Ε.Σ. της δοκού και παραστήσαμε τις ροπές κάμψης με καμπύλα βέλη πάνω στα επίπεδα φόρτισης για να φαίνεται καλύτερα η κάμψη των δυο επιπέδων. Η καμπύλη των ροπών κάμψης στο επίπεδο xy είναι παραβολή δεύτερου βαθμού με βέλος $f = ql^2 / 8 = (10)(4) / 8 = 5$.

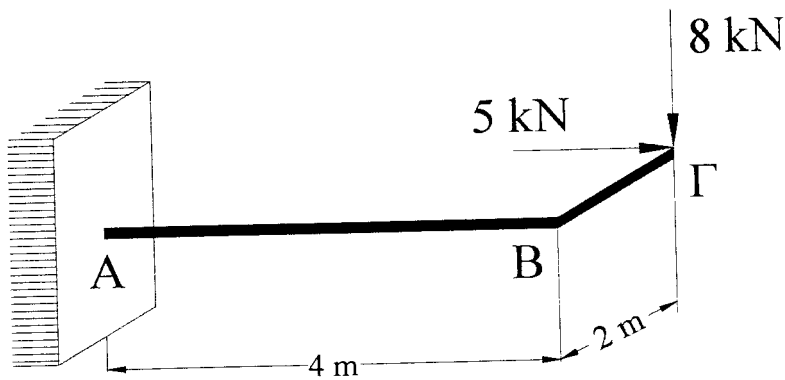
Τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων και των ροπών κάμψης τα σχεδιάζουμε στο επίπεδο φορτίσεως όπως γίνεται και στην περίπτωση της επιπέδου δοκού. Στο σχ.(5) έχει σχεδιαστεί το των τεμνουσών δυνάμεων και στο σχ.(6) το διάγραμμα των ροπών κάμψης.



Τα φορτία διατομής μιας δοκού, που ο άξονας της είναι τεθλασμένη ή καμπύλη γραμμή, υπολογίζονται όπως ακριβώς και για μια ευθύγραμμη δοκό. Στις δοκούς με άξονα τεθλασμένη ή καμπύλη γραμμή εμφανίζονται αξονικές δυνάμεις και στρεπτικές ροπές ακόμα κι αν η δοκός φορτίζεται μόνο με φορτία, που είναι κάθετα στον άξονα της.

ΑΣΚΗΣΗ 2.22

Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των φορτίων της διατομής της δοκού του σχήματος (1).



(1)

ΛΥΣΗ

Για να υπολογίσουμε τα φορτία διατομής και να χαράξουμε τα διαγράμματα τους, πρέπει να υπολογίσουμε τα φορτία διατομής στα χαρακτηριστικά σημεία A, Γ και στο γωνιακό σημείο B. Στο σημείο B που αλλάζει η διεύθυνση του άξονα, θα υπολογίσουμε τα φορτία διατομής αριστερά και δεξιά του σημείου B. Παρόλο που οι εσωτερικές δυνάμεις και οι ροπές στο σημείο B της διατομής της δοκού ΓΒ, είναι ίσες και αντίθετες στο σημείο B, της διατομής της δοκού ΑΒ, σε κάθε διατομή παριστάνουν αλλά φορτία διατομής αφού αλλάζει η διεύθυνση του άξονα της δοκού. Μπορούμε να υπολογίσουμε τα φορτία διατομής, αν φέρουμε φανταστικές τομές και εξετάσουμε την ισορροπία των δεξιών ή αριστερών κομματιών. Αν κανείς υπολογίσει τα φορτία διατομής από τα δεξιά κομμάτια, δεν χρειάζεται (στην περίπτωση που έχουμε πάκτωση στο αριστερό άκρο) να υπολογίσει τις αντιδράσεις στήριξης. Από το Δ.Ε.Σ. βρίσκουμε τις αντιδράσεις στήριξης, σχ(2).

$$\Sigma F_x = 0 \quad A_x + 5 = 0 \quad A_x = -5 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad A_y = 0 \quad A_y = 0$$

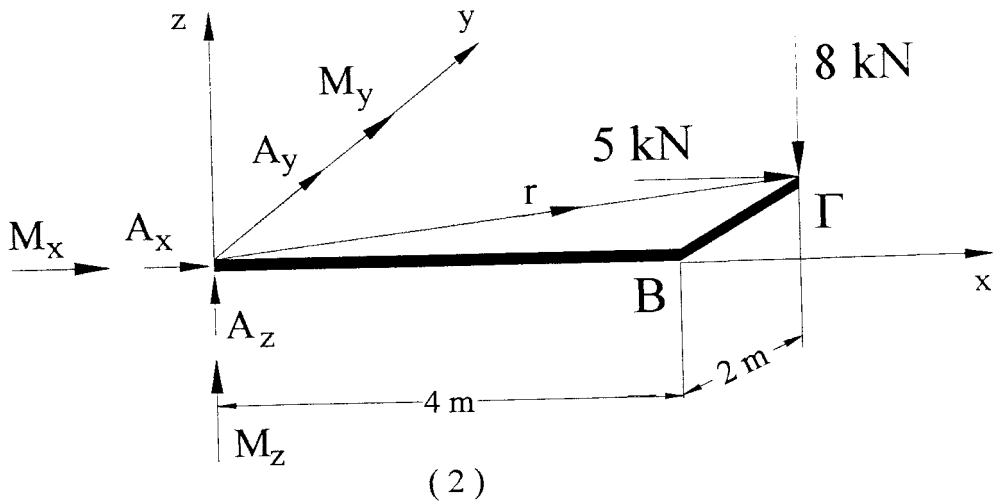
$$\Sigma F_z = 0 \quad A_z - 8 = 0 \quad A_z = 8 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad (4i + 2j) \times (5i - 8k) - M_x i - M_y j + M_z k = 0$$

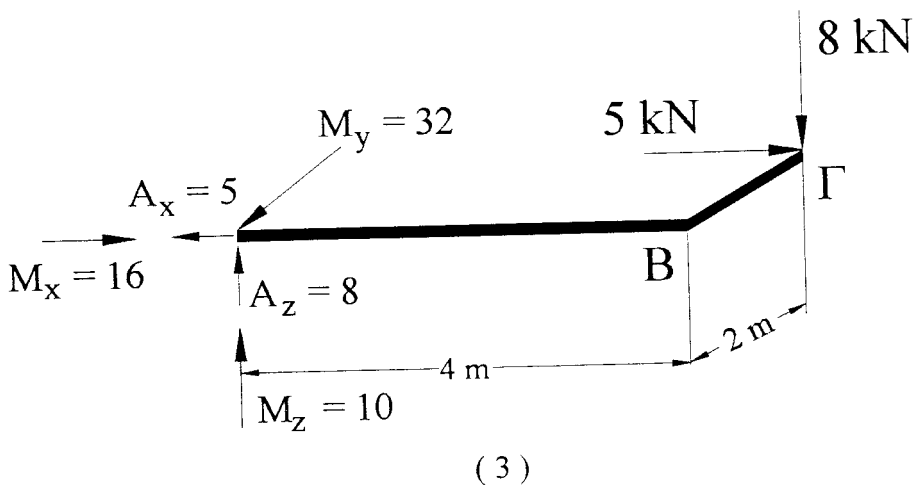
$$M_x = 16 \text{ kNm}$$

$$M_y = -32 \text{ kNm}$$

$$M_z = 10 \text{ kNm}$$



Σχεδιάζουμε και πάλι το Δ.Ε.Σ. του φορέα και βάζουμε τις αντιδράσεις στηρίξεις με τις φορές και τα μεγέθη, που υπολογίσαμε από τις εξισώσεις ισορροπίας, σχ.(3).



Φορτία διατομής Γ

$N = 0$	$Q_x = 5 \text{ kN}$	$M_x = 0$
$M_t = M_y = 0$	$Q_z = 8 \text{ kN}$	$M_z = 0$

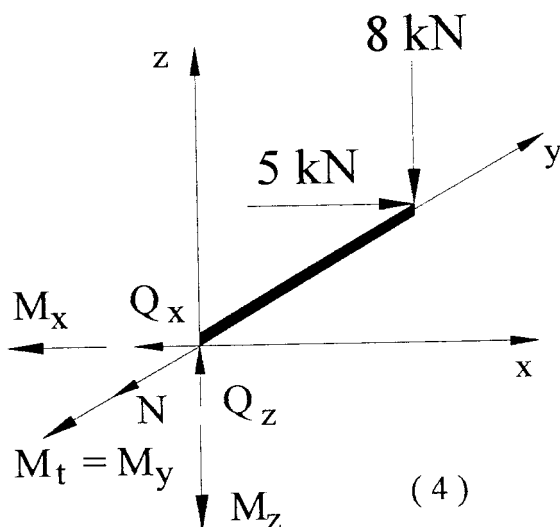
Φορτία διατομής B, της δοκού ΓB

Με μια τομή στο B χωρίζουμε την δοκό σε δυο κομμάτια . Από την ισορροπία του δεξιού κομματιού υπολογίζουμε τα φορτία διατομής . Πάνω στη διατομή βάζουμε τα φορτία με τις θετικές τους φορές, σχ.(4).

$$\Sigma F_x = 0 \quad 5 - Q_x = 0 \quad Q_x = 5$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad N = 0 \quad N = 0$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad -8 + Q_z = 0 \quad Q_z = 8$$



$$\Sigma M_B = 0 \quad (2j) \times (5i - 8k) - M_x i - M_y j - M_z k = 0$$

$$M_x = -16 \text{ kNm}$$

$$M_y = M_t = 0$$

$$M_z = -10 \text{ kNm}$$

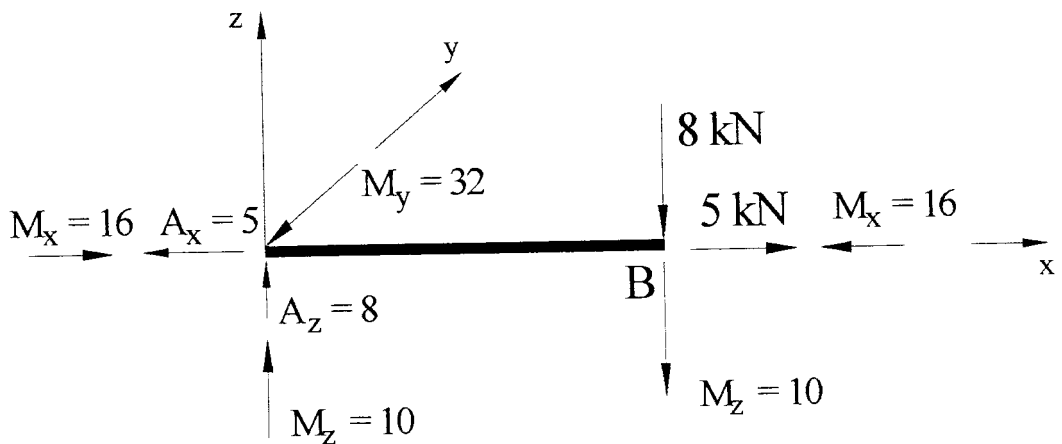
Για να προσδιορίσουμε τις αντιδράσεις στήριξης, πήραμε σαν σύστημα αξόνων αυτό, που φαίνεται στο σχ.(3). Το ίδιο σύστημα εξακολουθούμε να θεωρούμε και για τον υπολογισμό των φορτίων διατομής της δοκού. Όταν όμως μελετάμε την παραμόρφωση των σωμάτων, τότε υποθέτουμε, ότι ο άξονας x συμπίπτει με τον άξονα της δοκού. Αυτό συμβαίνει, επειδή στις εξισώσεις παραμόρφωσης υποθέτουμε ότι ο άξονας της δοκού συμπίπτει πάντοτε με τον άξονα x. Δηλαδή κάθε φορά, που ο άξονας της δοκού αλλάζει διεύθυνση, πρέπει να αλλάζουμε και το σύστημα αξόνων, έτσι ώστε ο άξονας της δοκού να συμπίπτει πάντοτε με τη διεύθυνση του άξονα x.

Φορτία διατομής B, της δοκού AB

Στη διατομή B της δοκού AB δρουν οι ίδιες εσωτερικές δυνάμεις, που δρουν και στη διατομή B της δοκού ΒΓ, σχ.(5).

$$N = 5 \text{ kN} \quad Q_y = 0 \quad M_y = 0$$

$$M_t = -16 \text{ kNm} \quad Q_z = 8 \text{ kN} \quad M_z = -10 \text{ kNm}$$



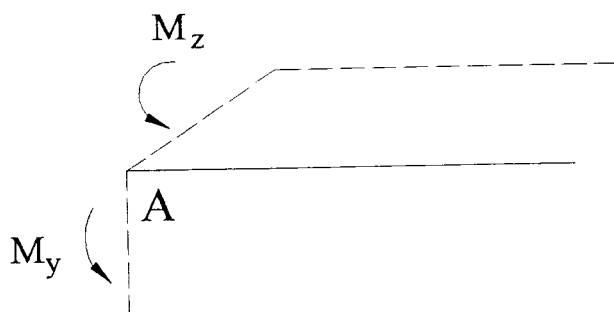
(5)

Η ροπή στρέψης είναι αρνητική, επειδή κατευθύνεται προς τη διατομή. Η ροπή κάμψης M_z είναι αρνητική, γιατί θλίβει το μπρος επίπεδο της δοκού.

Φορτία διατομής A

$$\begin{array}{lll}
 N = 5 \text{ kN} & Q_y = 0 & M_y = -32 \text{ kNm} \\
 M_t = M_x = -16 \text{ kNm} & Q_z = 8 \text{ kN} & M_z = -10 \text{ kNm}
 \end{array}$$

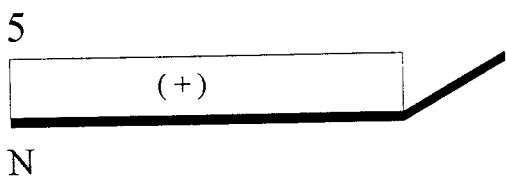
Η ροπή κάμψης M_z είναι αρνητική γιατί θλίβει το μπρος επίπεδο xz ενώ η M_y θλίβει το κάτω επίπεδο xy. Αυτό φαίνεται καθαρά στο σχ.(6), όπου έχουμε αντικαταστήσει τις ροπές κάμψης M_y και M_z με καμπύλα βέλη πάνω στα αντίστοιχα επίπεδα φόρτισης.



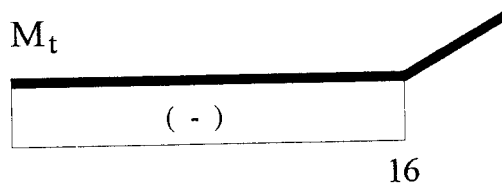
(6)

Τα διαγράμματα των φορτίων διατομής έχουν χαραχθεί στο σχ.(7). Τα διαγράμματα των αξονικών δυνάμεων θα σχεδιαστούν ξεχωριστά από τα διαγράμματα των

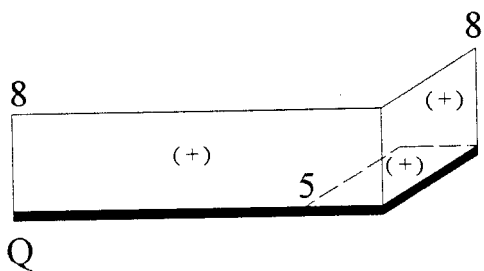
τεμνουσών δυνάμεων, όπως φαίνεται στα σχήματα (7α) και (7γ) . Επίσης τα διαγράμματα των ροπών στρέψης θα σχεδιαστούν ξεχωριστά από τα διαγράμματα των ροπών κάμψης, όπως φαίνεται στα σχήματα (7β) και (7δ). Τέλος τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων και των ροπών κάμψης θα σχεδιαστούν πάνω στα αντίστοιχα επίπεδα φόρτισης ενώ τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων και των στρεπτικών ροπών σχεδιάζονται σε οποίο από τα δυο επίπεδα θέλουμε.



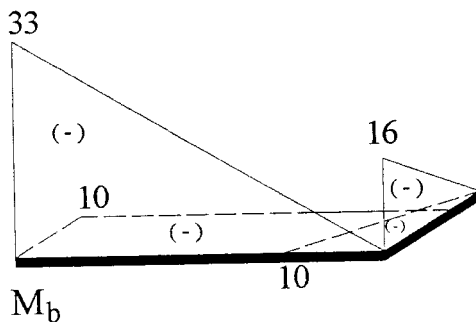
(7α)



(7β)



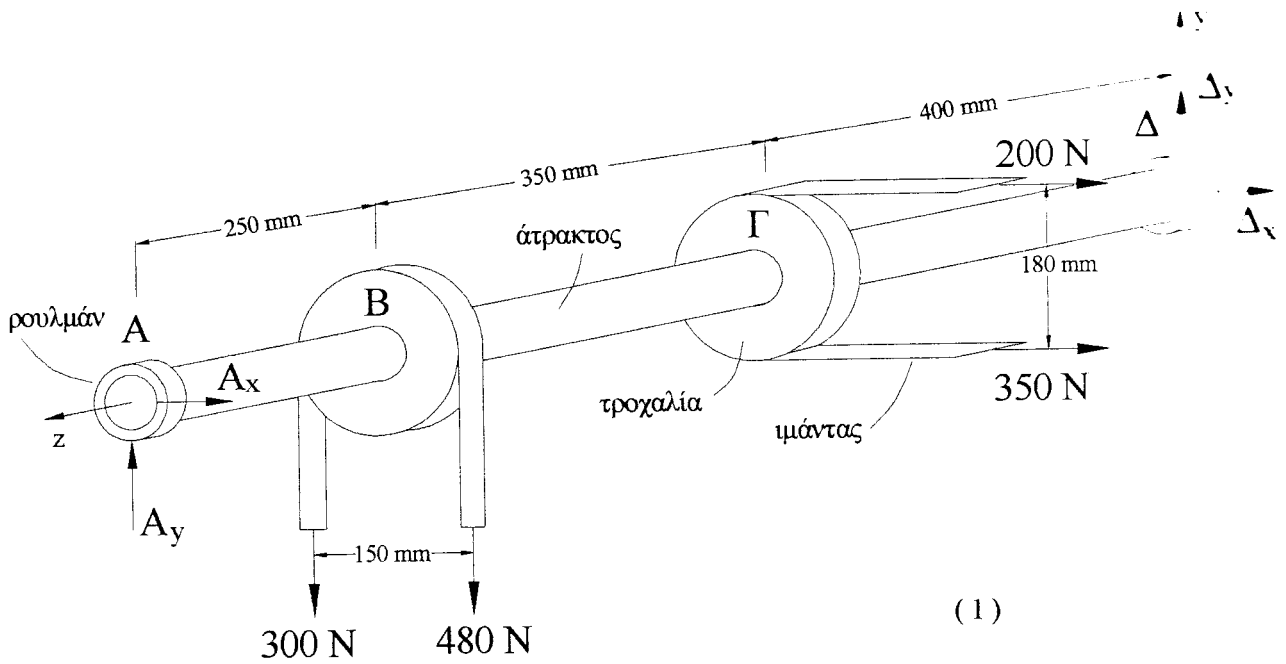
(7γ)



(7δ)

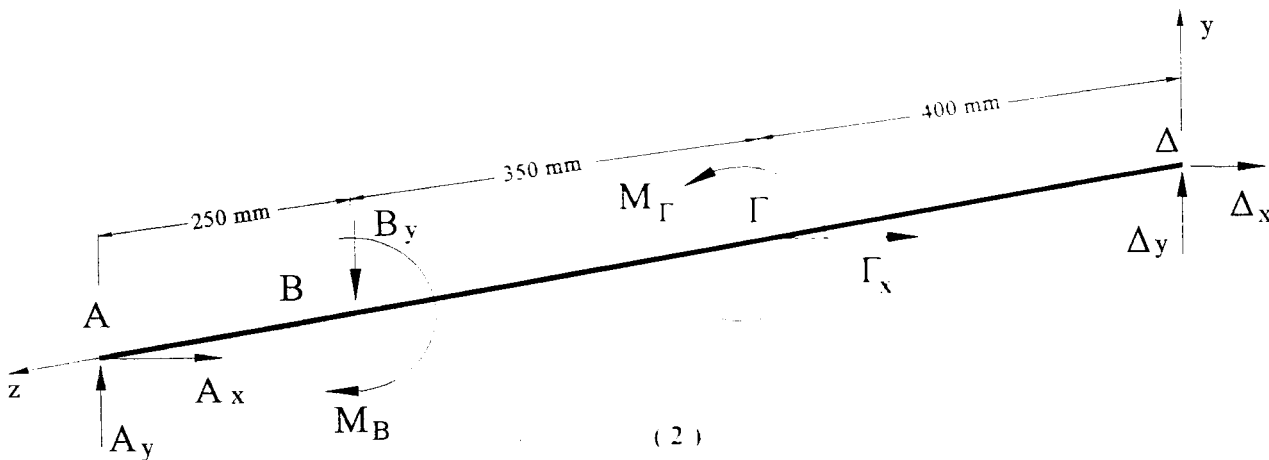
ΑΣΚΗΣΗ 2.23

Δυο τροχαλίες B και Γ είναι κατάλληλα στερεωμένες πάνω σε άτρακτο που στηρίζεται στα δυο ρουλεμάν A και Δ. Οι τροχαλίες φέρουν ιμάντες, η τάση των οποίων φαίνεται στο σχ.(1). α) Να βρεθούν οι δυνάμεις που ασκούν οι τροχαλίες στον άξονα. β) Να βρεθούν οι αντιδράσεις από τα ρουλεμάν στήριξης.



ΛΥΣΗ

Έστω σύστημα αξόνων Δxyz . Τα ρουλεμάν A, Δ επιτρέπουν την κίνηση της ατράκτου κατά τη διεύθυνση του άξονα z, οπότε έχουν αντιδράσεις μόνον κατά τις διευθύνσεις των δύο άλλων αξόνων, δηλαδή (A_x, A_y) και (Δ_x, Δ_y) σχ.(2).



Εξισώσεις ισορροπίας τροχαλίας Β

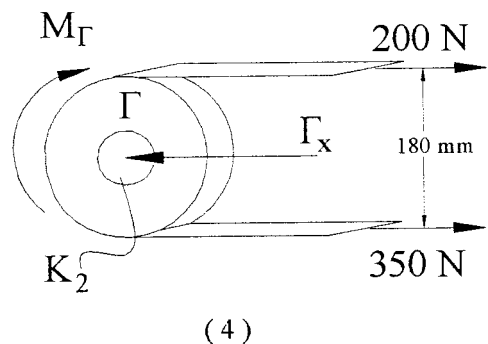
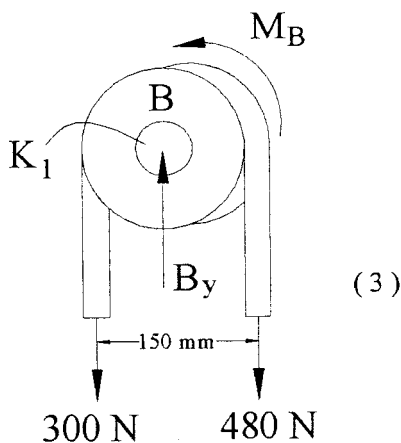
Στο σύστημα τροχαλίας Β – μάντα, ασκούνται οι γνωστές τάσεις, η άγνωστη B_y από τη στήριξη στον άξονα και μια άγνωστη ροπή M_B σχ.(3).

Από την ισορροπία της τροχαλίας έχουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \quad B_y - 300 - 480 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = 780 \text{ N}$$

$$\Sigma M_{KB} = 0 \quad -300\left(\frac{150}{2} \cdot 10^{-3}\right) - M_B + 480\left(\frac{150}{2} \cdot 10^{-3}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = 13.5 \text{ N}$$

Στην άτρακτο ΑΔ σχ.(2), λόγω δράσης – αντίδρασης ασκούνται στο Β οι αντιδράσεις των B_y , M_B που ίδια μέτρα αλλά αντίθετες φορές από ότι στο σχ.(3). Δηλαδή στην άτρακτο ΑΔ η B_y κατευθύνεται στα αρνητικά του άξονα y, ενώ το χαρακτηριστικό διάνυσμα της ροπής M_B κατευθύνεται στον άξονα - z .



Εξισώσεις ισορροπίας τροχαλίας Γ

Εντελώς αντίστοιχα, από την άλλη τροχαλία ασκείται στον άξονα ΑΔ η Γ_x αλλά και η M_Γ , που από την ισορροπία της τροχαλίας Γ – μάντα σχ.(4) έχουν μέτρα:

$$\Sigma F_x = 0 \quad -\Gamma_x + 200 + 350 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma_x = 550 \text{ N}$$

$$\Sigma M_{K\Gamma} = 0 \quad 200(90 \cdot 10^{-3}) + M_\Gamma - 350(90 \cdot 10^{-3}) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_\Gamma = 13.5 \text{ N}$$

Έτσι η Γ_x στην άτρακτο ΑΔ κατευθύνεται στα θετικά του άξονα x, ενώ το χαρακτηριστικό διάνυσμα της ροπής M_Γ κατευθύνεται στον άξονα + z (όποτε και εξουδετερώνει τη M_B). Σημειώνουμε ότι οι M_B , M_Γ είναι οι στρεπτικές ροπές για τον άξονα ΑΔ.

Εξισώσεις ισορροπίας ατράκτου ΑΔ

Θεωρώντας (αυθαίρετα) θετικές τις ροπές που το χαρακτηριστικό τους διάνυσμα κατευθύνεται στα θετικά του αντίστοιχου άξονα. από τις 6 στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας σχ.(2) έχουμε:

$$\Sigma M_x = 0 \quad -A_y (1000 \text{ mm}) + B_y (750 \text{ mm}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 585 \text{ N}$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad A_x (1000 \text{ mm}) + \Gamma_x (400 \text{ mm}) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -220 \text{ N}$$

$$\Sigma M_z = 0 \quad -M_B + M_\Gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad -13.5 + 13.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad A_x + \Gamma_x + \Delta_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -220 + 550 + \Delta_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = -330 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + B_y + \Delta_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 585 - 780 + \Delta_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = 195 \text{ N}$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad 0 = 0$$

Επομένως το μέτρο των αντιδράσεων από τα ρουλιμάν, είναι:

$$R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(-220)^2 + (585)^2} \quad \Rightarrow \quad R_A = 625 \text{ N}$$

$$R_\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} = \sqrt{(-330)^2 + (195)^2} \quad \Rightarrow \quad R_\Delta = 383.308 \text{ N}$$

ΛΥΓΙΣΜΟΣ
ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Κατά τη φόρτιση μίας ράβδου από θλιπτική αξονική δύναμη P και με προοδευτική αύξηση του μεγέθους της δύναμης αυτής, η ράβδος θα φτάσει το όριο πλαστικότητας και τελικά θα έχουμε αστοχία της ράβδου, όταν η τάση υπερβεί την αντοχή της, δηλαδή την τάση θραύσης. Το φαινόμενο αυτό θα συμβεί αν το μήκος της ράβδου δεν είναι πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις της διατομής της.

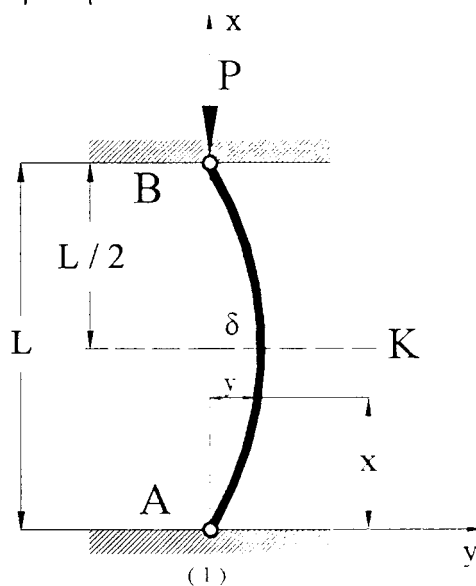
Στην περίπτωση όμως που το μήκος της ράβδου είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από τις διαστάσεις της διατομής της, το φαινόμενο εξελίσσεται διαφορετικά. Από ένα όριο φόρτισης και πέρα, το οποίο λέγεται κρίσιμο φορτίο $P_{κρ}$, η ράβδος μεταβαίνει από την ευσταθή κατάσταση της θλίψης στην ασταθή κατάσταση του λυγισμού.

Το βέλος κάμψης που παρουσιάζει η ράβδος, όταν έρθει σε κατάσταση λυγισμού, έχει ως αποτέλεσμα το φορτίο να δρα, πλέον, έκκεντρα ως προς το κέντρο βάρους της διατομής της. Τότε όμως αναπτύσσονται ροπές κάμψης, οι οποίες αυξάνουν ακόμα περισσότερο την καμπυλότητα της με την αύξηση του φορτίου, ώσπου έρχεται η θραύση της ράβδου με την υπέρβαση του ορίου αντοχής του υλικού της.

Το φαινόμενο του λυγισμού εκτός από το φορτίο που ενεργεί στη ράβδο εξαρτάται ακόμα από το σχήμα της διατομής, από τις ελαστικές ιδιότητες του υλικού, καθώς και από τον τρόπο στήριξής της στα άκρα της.

Οι διάφοροι τρόποι στήριξης της ράβδου στα άκρα της, διακρίνουν το λυγισμό στις παρακάτω τέσσερις περιπτώσεις :

1) Τη θεμελιώδη περίπτωση λυγισμού, κατά την οποία και τα δύο άκρα της ράβδου συνδέονται με άρθρωση. Θεωρούμε την αμφιαρθρωτή ράβδο του σχ.(1), στην οποία ασκείται κατακόρυφο κεντρικό φορτίο P , ικανό να προκαλέσει λυγισμό, δηλαδή κρίσιμο φορτίο $P_{κρ}$. Για τον υπολογισμό της τιμής $P_{κρ}$ θεωρούμε άξονα συντεταγμένων τον κατακόρυφο x και τον οριζόντιο y , διερχόμενους από την άρθρωση A . Συμβολίζουμε την οριζόντια απόκλιση του σημείου K με δ , η οποία αντιστοιχεί σε μήκος ράβδου $L/2$ ενώ κάθε μικρότερη απόκλιση έστω y αντιστοιχεί σε απόσταση x από τη άρθρωση A .



Η ροπή κάμψης που αναπτύσσεται σε κάθε τυχούσα διατομή της ράβδου που έχει απόσταση x , δίδεται από τη σχέση:

$$M(x) = P_y$$

Η ροπή κάμψης συνδέεται με το βέλος κάμψης y με τη σχέση:

$$EI_z = \frac{d^2 y}{dx^2} = - M(x)$$

Οπότε αντικαθιστώντας την τιμή της ροπής κάμψης προκύπτει η παρακάτω μορφή στην διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής:

$$EI_z = \frac{d^2 y}{dx^2} = - P_y$$

Απλοποιούμε την παραπάνω σχέση αντικαθιστώντας με τη σταθερή τιμή k , την ποσότητα:

$$k^2 = \frac{P}{EI_z}$$

Τότε, η παραπάνω διαφορική εξίσωση παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$y = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$$

Όπου c_1, c_2 , είναι σταθερές που προκύπτουν από την ολοκλήρωση και μπορούν να υπολογιστούν με τη χρησιμοποίηση των οριακών συνθηκών της ελαστικής γραμμής, που διέρχεται από τα σημεία έδρασης της ράβδου.

Έτσι, για το σημείο A με ($x = 0$), όπου λόγω άρθρωσης πρέπει το βέλος κάμψης να είναι μηδέν, δηλαδή $y = 0$, τότε προκύπτει $c_2 = 0$, ενώ για το σημείο B ($x = L$), όπου όμοια πρέπει να ισχύει $y = 0$, βρίσκουμε:

$$c_1 \sin(kL) = 0$$

Η παραπάνω συνθήκη επαληθεύεται όταν $c_1 = 0$ ή $\sin(kL) = 0$. Στην πρώτη περίπτωση η ράβδος ισορροπεί κατακόρυφα χωρίς περιορισμό στην τιμή του φορτίου, ενώ στην δεύτερη που μας αφορά, πρέπει να ισχύει:

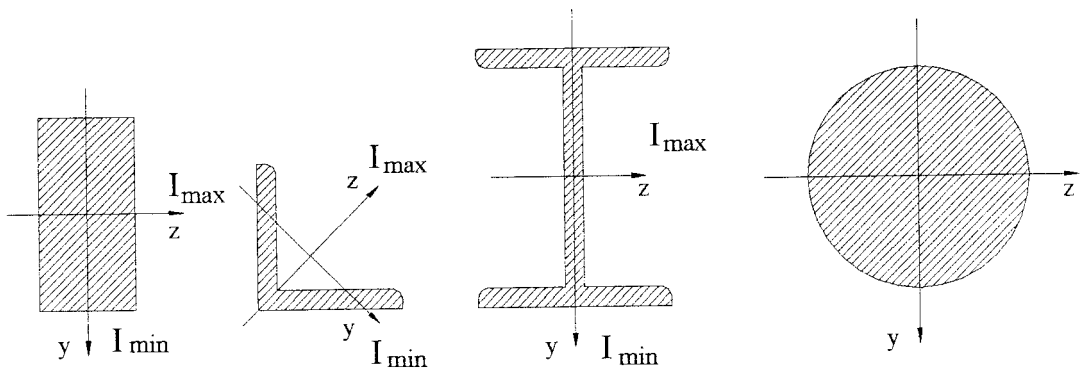
$$kL = n\pi$$

Όπου n , είναι ακέραιος αριθμός, τον οποίο θα θεωρήσουμε ίσο με τη μονάδα για να πάρουμε τη μικρότερη τιμή του φορτίου P , δηλαδή, αυτήν του κρίσιμου φορτίου και επειδή $k^2 = P / EI_z$, προκύπτει η σχέση:

$$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί τον τύπο του Euler για λεπτή ορθή ράβδο, αρθρωτή στη βάση όπως και στην κορυφή της.

Η τιμή του κρίσιμου φορτίου $P_{κρ}$, αντιπροσωπεύει τη μέγιστη τιμή του φορτίου που είναι σε θέση να φέρει η ράβδος και ονομάζεται φορτίο Euler. Από τον τύπο του Euler γίνεται αντιληπτό, ότι το κρίσιμο φορτίο είναι ανάλογο του μέτρου δυσκαμψίας EI_z της ράβδου, οπότε μία ράβδος με μεγάλο μέτρο ελαστικότητας και μεγάλη ροπή αδράνειας λυγίζει δύσκολα. Άλλοι παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, είναι το μήκος της ράβδου και ο τρόπος στήριξης στα άκρα της, ο οποίος καθορίζει το ελεύθερο ή ανηγμένο μήκος λυγισμού. Αντίθετα είναι ανεξάρτητο από την αντοχή του υλικού στη θλίψη. Η κάμψη της θλιβόμενης ράβδου γίνεται προς τη διεύθυνση κατά την οποία αυτή είναι περισσότερο εύκαμπτη. Για αυτό και στον τύπο του Euler ως ροπή αδράνειας θέτουμε την ελάχιστη τιμή της ροπής αδράνειας που παρουσιάζει η διατομή της ράβδου. Μερικές χαρακτηριστικές τυποποιημένες διατομές, που χρησιμοποιούνται πολύ σε πρακτικές εφαρμογές, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Αν οι ράβδοι στις οποίες ανήκουν θλίβονται με κεντρικό κρίσιμο φορτίο, οι τρεις πρώτες θα λυγίσουν στη διεύθυνση της ελάχιστης ροπής αδράνειας I_{min} , ενώ αυτή με την κυκλική διατομή θα λυγίσει, προφανώς σε οποιαδήποτε διεύθυνση.

2) Την περίπτωση λυγισμού στην οποία μόνο το πάνω άκρο της ράβδου είναι ελεύθερο, ενώ το κάτω πακτωμένο. Το κρίσιμο φορτίο μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο του Euler για αμφιαρθρωτή ράβδο θέτοντας οπου $L = 2L$, οπότε έχουμε:

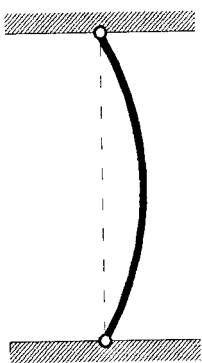
$$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(2L)^2} \Rightarrow P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{4L^2}$$

3) Την περίπτωση λυγισμού σε αμφίπακτη ράβδο, όπου και τα δύο άκρα της ράβδου είναι πακτωμένα. Υπολογίζουμε το κρίσιμο φορτίο ξέροντας ότι κάθε ακραίο τμήμα της συμπεριφέρεται ως απλή πακτωμένη ράβδος μήκους $L/4$ και έχουμε:

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Περιπτώσεις λυγισμού και ελεύθερου μήκους

α/α	Είδος στήριξης .	Ελεύθερο ή ανηγμένο μήκος λυγισμού.	Κρίσιμο φορτίο λυγισμού.
1	Δύο αρθρώσεις	$l_k = L$	$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$
2	Πάκτωση κάτω ελεύθερο άκρο επάνω	$l_k = 2L$	$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2}$
3	<i>Δύο πακτώσεις</i>	$l_k = 0.5L$	$P_{κρ} = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$
4	Πάκτωση κάτω άρθρωση επάνω	$l_k = 0.7L$	$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0.7)^2 l^2}$



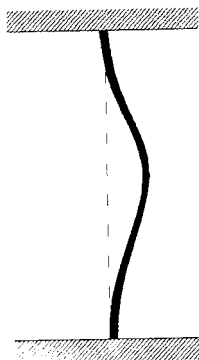
1

$$l_k = L$$



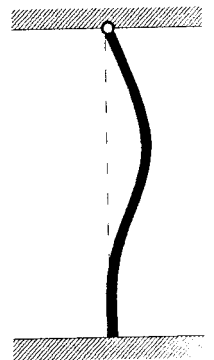
2

$$l_k = 2L$$



3

$$l_k = L/2$$



4

$$l_k = 0.7L$$

$$P_{\kappa\rho} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2L/4)^2} \Rightarrow P_{\kappa\rho} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(L/2)^2} \Rightarrow$$

$$P_{\kappa\rho} = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{L^2}$$

4) Την περίπτωση λυγισμού σε πακτωμένη – αρθρωτή ράβδο, παρατηρούμε ότι το κρίσιμο φορτίο είναι ίδιο με εκείνο που αντιστοιχεί σε μια αμφιαρθρωτή ράβδο ίδιου υλικού αλλά με μήκος ίσο $0.7L$, έτσι το κρίσιμο φορτίο είναι:

$$P_{\kappa\rho} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0.7L)^2}$$

Εισάγοντας τον όρο ελεύθερου ή ανηγμένου μήκους λυγισμού ℓ_k , αντίστοιχου με την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων καμπής της ελαστικής γραμμής σε κάθε περίπτωση στήριξης της ράβδου, δημιουργούμε έναν ενιαίο τύπο:

$$P_{\kappa\rho} = \frac{\pi^2 EI_z}{\ell_k^2}$$

Η τιμή του ελεύθερου μήκους λυγισμού και η αντίστοιχη μορφή του τύπου για το κρίσιμο φορτίο, για κάθε περίπτωση στήριξης, φαίνονται παραστατικά στον πίνακα 1.

Με την παραδοχή της ομοιόμορφης κατανομής των τάσεων σε μία ράβδο και διαιρώντας το κρίσιμο $P_{\kappa\rho}$, με το οποίο αυτή καταπονείται με το εμβαδόν F της διατομής της, προκύπτει η αναπτυσσόμενη κρίσιμη τάση στη ράβδο:

$$\sigma_{\kappa\rho} = \frac{P_{\kappa\rho}}{F} = \frac{\pi^2 EI}{F \ell_k^2} \quad (1)$$

Η δυσμενέστερη τιμή της κρίσιμης τάσης κατά το λυγισμό παρέχεται, όπως έχει αναφερθεί, από τη μικρότερη τιμή της ροπής αδρανείας I της διατομής, στη θέση της οποίας εισάγουμε την ακτίνα αδρανείας I που προκύπτει από τον τύπο

$$I_{\min} = F i_{\min}^2$$

Οπότε η εξίσωση (1) γράφεται και με τη μορφή $\sigma_{\kappa\rho} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{F i_k^2}$

Ορίζεται επίσης, ο λόγος λ από τη σχέση:

$$\lambda = \ell_k / i_{\min}$$

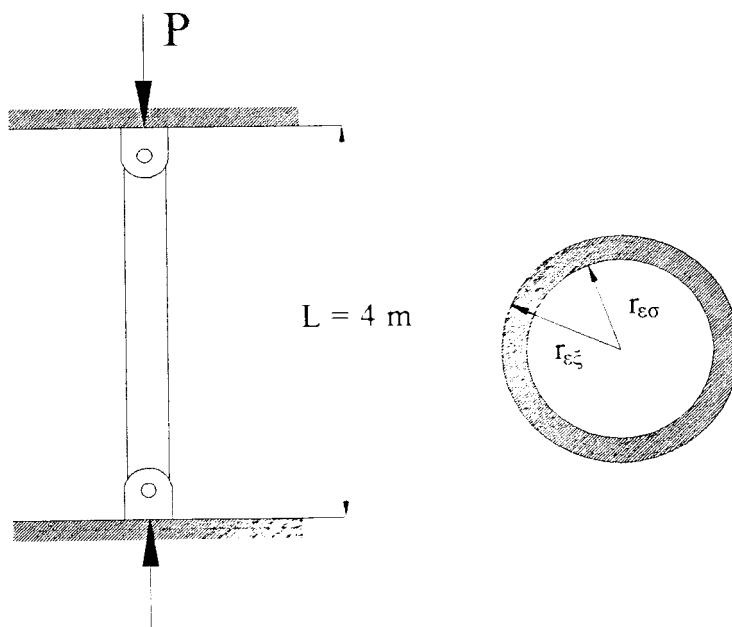
Ο λόγος λ (που είναι καθαρός αριθμός), μας παρέχει ένα μέτρο της ευαισθησίας της ράβδου στο λυγισμό, και ονομάζεται βαθμός λυγερότητας ή λυγερότητα της ράβδου και απλοποιεί τον τύπο της κρίσιμης τάσης κατά τον λυγισμό στην ανηγμένη του μορφή:

$$\sigma_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Στην παραπάνω εξίσωση φαίνεται ότι η κρίσιμη τάση εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του υλικού και κυρίως τη λυγερότητα της ράβδου.

ΑΣΚΗΣΗ 3.1

Ποιό είναι το μέγιστο θλιπτικό φορτίο που μπορεί να εφαρμοστεί σε μια αμφιάρθρωτη στήλη από κράμα αλουμινίου, μήκους $L = 4 \text{ m}$ και έχει συντελεστή ασφαλείας 1.5. Δίδονται : $E = 70 \text{ GPa}$, $r_{\epsilon\sigma} = 40 \text{ mm}$, $r_{\epsilon\xi} = 45 \text{ mm}$ και το όριο αναλογίας του υλικού $\sigma_a = 270 \text{ MPa}$.



ΛΥΣΗ

Αφού η στήλη είναι αμφιάρθρωτη το κρίσιμο φορτίο θα υπολογιστεί από τον τύπο του Euler, έτσι έχουμε :

$$P_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{L^2} = \frac{\pi^2 (70 \times 10^9 \text{ N/m}^2) (\pi/4) [(0.045)^4 - (0.040)^4] \text{ m}^4}{(4 \text{ m})^2}$$

$$P_{\text{κρ}} = 55.2 \text{ kN}$$

Η ορθή τάση που αναλογεί σε αυτό το φορτίο είναι :

$$\sigma_{\text{κρ}} = \frac{P_{\text{κρ}}}{A} = \frac{55.2 \text{ kN}}{\pi [(0.045)^2 - (0.040)^2] \text{ m}^2}$$

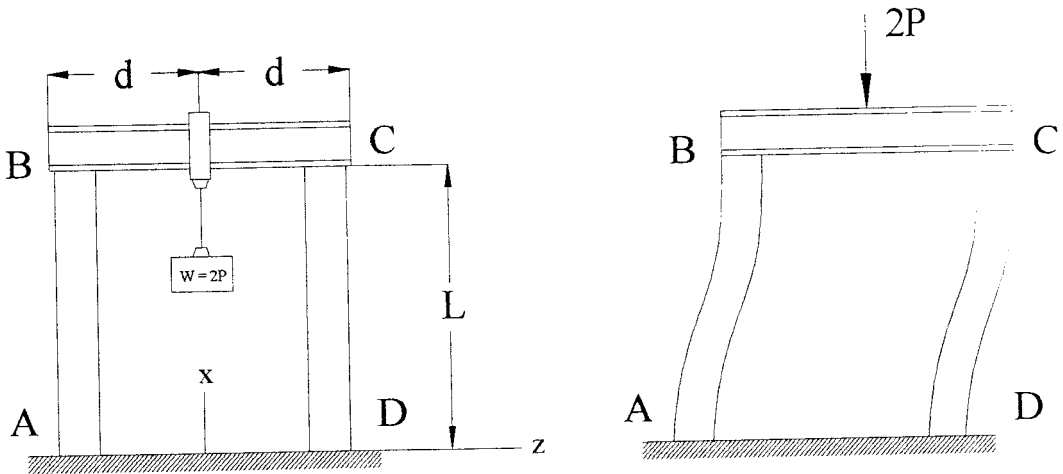
$$\sigma_{\text{κρ}} = 39.1 \text{ MPa} < \sigma_a$$

Η επιτρεπόμενη τάση είναι η κρίσιμη τάση προς τον συντελεστή ασφαλείας

$$P_{\text{επ}} = \frac{P_{\text{κρ}}}{\nu} = \frac{55.2 \text{ kN}}{1.5} = 34.8 \text{ kN}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2

Μία άκαμπτη δοκός BC στηρίζεται σε δύο ίδιες αμφίπακτες στήλες που έχουν μέτρο ελαστικότητας EI (για λυγισμό στο επίπεδο xz). Να υπολογίσετε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού χρησιμοποιώντας το ελεύθερο ή ανηγμένο μήκος λυγισμού l_k .



ΛΥΣΗ

Η σχέση που μας δίνει το κρίσιμο φορτίο χρησιμοποιώντας το ελεύθερο ή ανηγμένο μήκος λυγισμού l_k είναι :

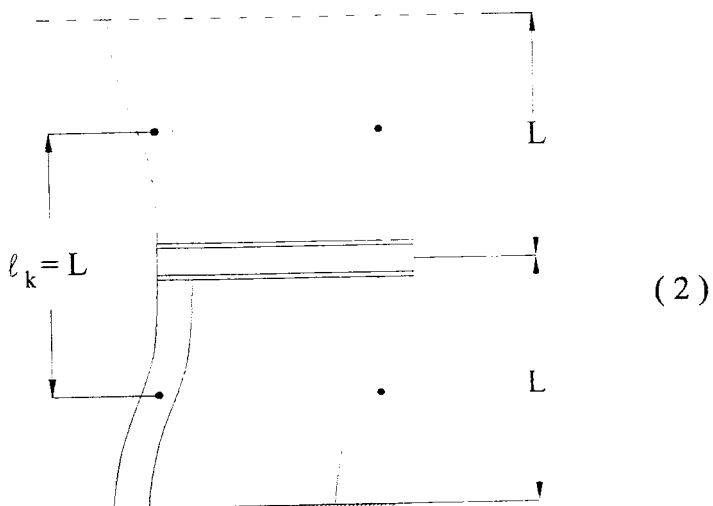
$$P_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2}$$

Επειδή οι δύο στήλοι είναι αμφίπακτοι σχ.(2) έχουμε :

$$l_k = 0.5(2L) = L$$

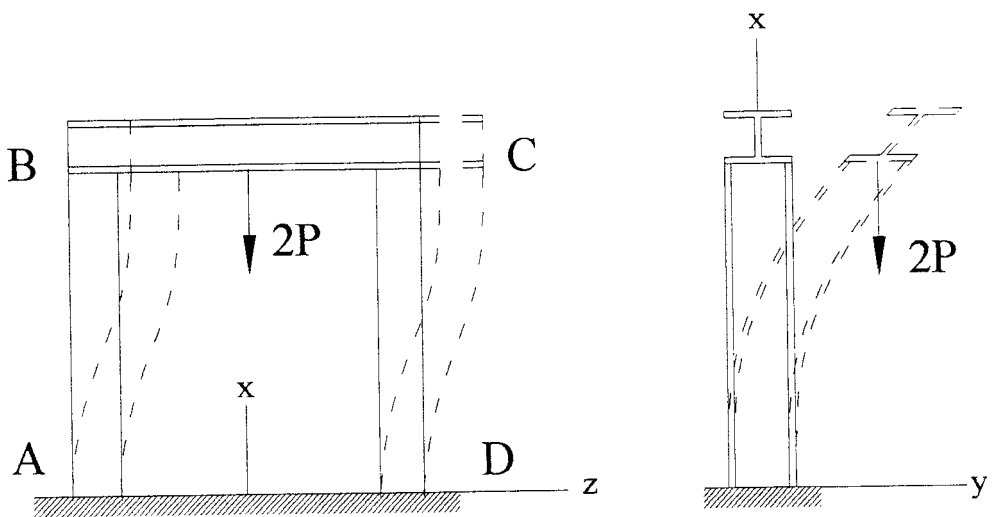
Αντικαθιστώντας την τιμή που βρήκαμε στην σχέση (1), βρίσκουμε το κρίσιμο φορτίο :

$$P_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



ΑΣΚΗΣΗ 3.3

Στην προηγούμενη άσκηση 3.2 ο λυγισμός των στηλών στο επίπεδο xz υπολογίστηκε. Όμως δεν υπάρχει κάτι που να εμποδίζει τις στήλες να λυγίσουν προς την κατεύθυνση y. Να υπολογίσετε για τις στήλες AB και CD εάν θα λυγίσουν στο επίπεδο xz (άξονας y) ή θα λυγίσουν προς την κατεύθυνση y (άξονας z) και να βρείτε το φορτίο λυγισμού. Υποθέστε ότι τα σημεία B και C είναι συγκολλημένα με την δοκό, η δοκός BC είναι άκαμπτη και δέχεται φορτίο P που εφαρμόζεται κεντρικά στην κορυφή της κάθε δοκού. ($E = 200(10^9) \text{ Pa}$, $\sigma_a = 36 \text{ MPa}$, $I_y = 5.3(10^{-6}) \text{ m}^4$, $I_z = 16.7(10^{-6}) \text{ m}^4$, $A = 3.7(10^{-3}) \text{ m}^2$ και $L = 4.8 \text{ m}$).



ΛΥΣΗ

Τα κρίσιμα φορτία θα υπολογιστούν από τον τύπο :

$$P_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 EI}{l_k^2} \quad (1)$$

Έτσι για τους άξονες z και y θα έχουμε :

$$(P_{\text{κρ}})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(l_k)_y^2} \quad (P_{\text{κρ}})_z = \frac{\pi^2 EI_z}{(l_k)_z^2} \quad (2)$$

Οι τιμές του ελεύθερου ή ανηγμένου μήκους λυγισμού (Πίνακας 1) για τον άξονα y είναι $l_k = 0.5(2L) = L$ ενώ για τον άξονα z είναι $l_k = 2L$. Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις έχουμε :

$$(P_{\text{κρ}})_y = \frac{\pi^2 [200(10^9) \text{ N/m}^2] [5.3(10^{-6}) \text{ m}^4]}{(4.8)^2} = 454 \text{ kN} \quad (3)$$

$$(P_{\kappa\rho})_z = \frac{\pi^2 [200(10^9) \text{ N / m}^2] [16.7(10^{-6})\text{m}^2]}{[2(4.8)]^2} = 357 \text{ kN} \quad (4)$$

Αφού $(P_{\kappa\rho})_z < (P_{\kappa\rho})_y$, ο λυγισμός θα παρουσιαστεί πρώτα στον άξονα z για το κρίσιμο φορτίο της τιμής. Έχουμε :

$$P_{\kappa\rho} = (P_{\kappa\rho})_z = 357 \text{ kN} \quad (5)$$

Στο πρόβλημα υποθέσαμε ότι η δοκός BC είναι άκαμπτη και ότι τα σημεία B και C είναι συγκολλημένα έτσι ώστε οι γωνίες μεταξύ των δοκών να είναι 90° . Προτού δεχτούμε το κρίσιμο φορτίο που βρήκαμε, αφού μια πραγματική δοκός BC δεν μπορεί να είναι τελείως άκαμπτη και οι συγκολλήσεις στα σημεία B και C μπορεί να είναι εύκαμπτες ώστε να επιτρέπουν τις δοκούς να μετακινούνται, θα πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας όλα αυτά τα δεδομένα. Η χειρότερη υπόθεση θα ήταν εάν οι στήλες ήταν με αρθρώσεις και όχι πακτωμένες με την δοκό BC. Αφού η δοκός BC είναι ελεύθερη να μετακινείται οριζόντια, η τιμή του l_k για πρόβολο με πάκτωση στο ένα άκρο και ελεύθερο το άλλο, είναι : $l_k = 2L$. Από την εξίσωση (3) θα έχουμε :

$$(P_{\kappa\rho})_y = \frac{\pi^2 [200(10^9) \text{ N / m}^2] [5.3(10^{-6})\text{m}^2]}{[2(4.8)]^2} = 113 \text{ kN} \quad (6)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (5) και (6) βλέπουμε πόσο σημαντικό είναι να διευκρινίζουμε τις συνθήκες που υπάρχουν στις δοκούς (π.χ το ένα άκρο πατωμένο). Έτσι η εξίσωση (5) θα γίνει :

$$P_{\kappa\rho} = (P_{\kappa\rho})_y = 113 \text{ kN}$$

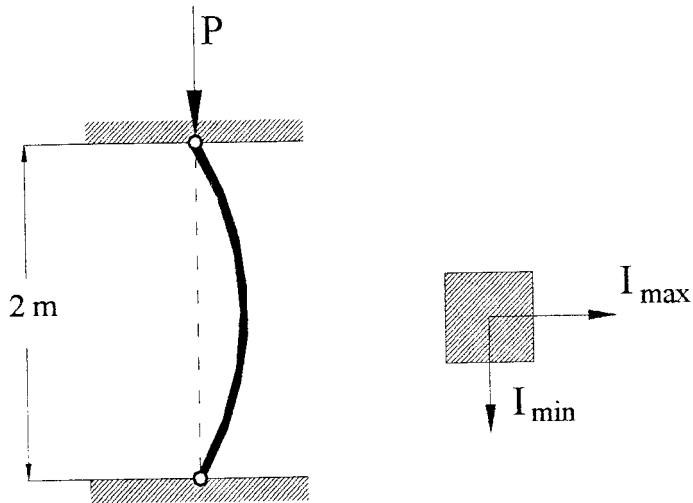
Η κρίσιμη τάση για το φορτίο είναι

$$\sigma_{\kappa\rho} = \frac{P_{\kappa\rho}}{A} = \frac{113 \text{ kN}}{3.7(10^{-3})\text{m}^2} = 30.5 \text{ MPa} < 36 \text{ MPa}$$

Η υπόθεση για ελαστικό λυγισμό ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ 3.4

Ξύλινος αμφιαρθρωτός στύλος τετραγωνικής διατομής με μήκος 2 m θλίβεται αξονικά, ενώ η επιτρεπόμενη τάση σε θλίψη είναι $\tau_{\epsilon\pi} = 12 \text{ MPa}$. Να υπολογιστεί το μέγεθος της διατομής που μπορεί να αντέξει φορτίο α) 100 kN β) 200 kN. Ο στύλος έχει συντελεστή ασφαλείας $\nu = 2.5$ και $E = 13 \text{ GPa}$.



ΛΥΣΗ

α) Για το φορτίο των 100 kN και χρησιμοποιώντας τον συντελεστή ασφαλείας έχουμε :

$$P_{\kappa\rho} = \nu P = 2.5 (100 \text{ kN}) = 250 \text{ kN} \quad L = 2 \text{ m} \quad E = 13 \text{ GPa}$$

$$\text{Από τον τύπο του Euler } P_{\kappa\rho} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\ell_k^2} \text{ και } \ell_k = L \text{ έχουμε :}$$

$$I_{\min} = \frac{P_{\kappa\rho} L^2}{\pi^2 E} = \frac{(250 \times 10^3 \text{ N}) (2 \text{ m})^2}{\pi^2 (13 \times 10^9 \text{ Pa})} = 7.794 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Απ' όπου προκύπτει ότι :

$$I_{\min} = d^4 / 12$$

Οπότε γράφουμε :

$$\frac{d^4}{12} = 7.794 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad d = 98.3 \text{ mm} \approx 100 \text{ mm}$$

Για την διάμετρο που βρήκαμε πρέπει να κάνουμε έλεγχο για να δούμε εάν αντέχει.
Έτσι έχουμε :

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100 \text{ kN}}{(0.100 \text{ m})^2} = 10 \text{ MPa}$$

Αφού $\sigma < \sigma_{\text{επ}}$, η διατομή μπορεί να αντέξει το φορτίο των 100 kN.

β) Για το φορτίο των 200 kN δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο :

$$P_{\text{κρ}} = \nu P = 2.5 (200 \text{ kN}) = 500 \text{ kN}$$

Από τον Euler έχουμε :

$$I_{\text{min}} = \frac{(500 \times 10^3)(2 \text{ m})^2}{\pi^2 (13 \times 10^9 \text{ Pa})} = 15.588 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\frac{d^4}{12} = 15.588 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad d = 116.95 \text{ mm}$$

Οπότε ελέγχουμε την διάμετρο που βρήκαμε εάν αντέχει .

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{200 \text{ kN}}{(0.11695 \text{ m})^2} = 14.62 \text{ MPa}$$

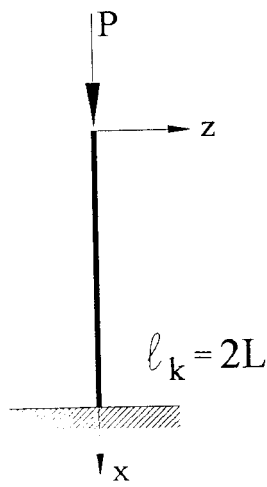
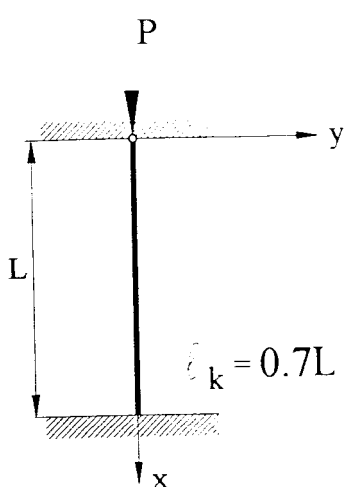
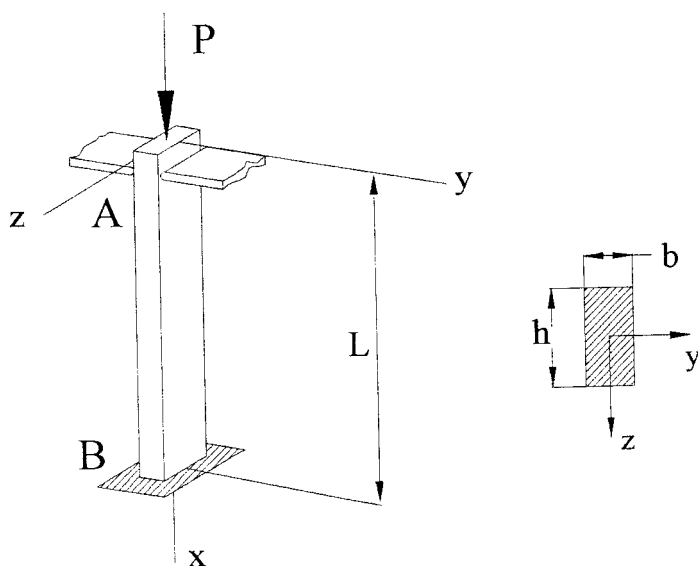
Βλέπουμε ότι η τιμή της κανονικής τάσης είναι μεγαλύτερη από αυτή της επιτρεπόμενης $\sigma > \sigma_{\text{επ}}$ **άρα** η διατομή που βρήκαμε δεν αντέχει και θα πρέπει να βρούμε καινούργια, χρησιμοποιώντας αυτή την φορά την επιτρεπόμενη τάση :

$$A = \frac{P}{\sigma_{\text{επ}}} = \frac{200 \text{ kN}}{12 \text{ MPa}} = 16.67 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$d^2 = 16.67 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad d = 129.1 \text{ mm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.5

Μία στήλη κατασκευασμένη από αλουμίνιο είναι ορθογωνικής διατομής και έχει μήκος L . Έχει πακτωμένο το ένα άκρο της, σημείο B, και καταπονείται σε αξονική θλίψη στο σημείο A. Δύο λεία, κυλινδρικά στις άκρες τους, ελάσματα περιορίζουν το άκρο A να μετακινείται στον έναν από τους δύο κατακόρυφους άξονες συμμετρίας της στήλης, αλλά το επιτρέπουν στον άλλον. α) Να υπολογίσετε τον λόγο $b : h$ των δύο πλευρών της διατομής, έτσι ώστε να ανταποκρίνεται στην πιο αποτελεσματική κατασκευή κατά του λυγισμού. β) Να υπολογίσετε την πιο αποτελεσματική διατομή της στήλης γνωρίζοντας ότι $L = 500 \text{ mm}$, $P = 20 \text{ kN}$, $E = 70 \text{ GPa}$ και ο συντελεστής ασφαλείας $\nu = 2.5$.



ΛΥΣΗ

Για το επίπεδο xy το ανηγμένο μήκος λυγισμού για την στήλη είναι $l_k = 0.7L$. Η ακτίνα αδρανεΐας της διατομής βρίσκεται γράφοντας :

$$I_z = 1/12 hb^3 \quad A = hb$$

$$\text{Αφού } I_z = Ai_z^2$$

Τότε λύνοντας ως προς i_z^2 έχουμε :

$$i_z = I_z / A = \frac{1/12hb^3}{hb} = \frac{b^2}{12}$$

$$i_z = b / \sqrt{12}$$

Η λυγρότητα της στήλης είναι :

$$\lambda = 0.7L / (b / \sqrt{12}) \quad (1)$$

Για το επίπεδο xz το ανηγμένο μήκος λυγισμού είναι $\ell_k = 2L$ και η ακτίνα αδρανείας της διατομής είναι :

$$i_y = h / \sqrt{12}$$

Έτσι η λυγρότητα της στήλης είναι :

$$\lambda = 2L / (h / \sqrt{12}) \quad (2)$$

α) Η πιο αποτελεσματική κατασκευή κατά του λυγισμού, είναι αυτή κατά την οποία, η κρίσιμη τάση $\sigma_{κρ}$ ανταποκρίνεται στο ότι οι δύο πιθανές τιμές του λυγισμού για τους δύο άξονες είναι ίσες. Από τον τύπο $\sigma_{κρ} = \pi^2 E / \lambda^2$, βλέπουμε ότι αυτή θα είναι η παραπάνω περίπτωση εάν οι δύο τιμές για την λυγρότητα της στήλης είναι ίσες. Έτσι έχουμε :

$$\frac{0.7L}{b / \sqrt{12}} = \frac{2L}{h / \sqrt{12}}$$

$$\text{Λύνοντας προς τον λόγο } \frac{b}{h} \text{ έχουμε : } \frac{b}{h} = \frac{0.7}{2} = 0.35$$

β) Να υπολογίσετε την πιο αποτελεσματική διατομή της στήλης

Για φορτίο $P = 20 \text{ kN}$ και συντελεστή ασφαλείας $\nu = 2.5$, βρίσκουμε το κρίσιμο φορτίο την στήλη :

$$P_{κρ} = \nu P = 2.5(20 \text{ kN}) = 50 \text{ kN}$$

Η κρίσιμη τάση βρίσκεται από : $b = 0.35h$ $A = hb = b = 0.35h^2$

$$\sigma_{\text{κρ}} = \frac{P_{\text{κρ}}}{A} = \frac{50 \times 10^3 \text{ kN}}{0.35h^2}$$

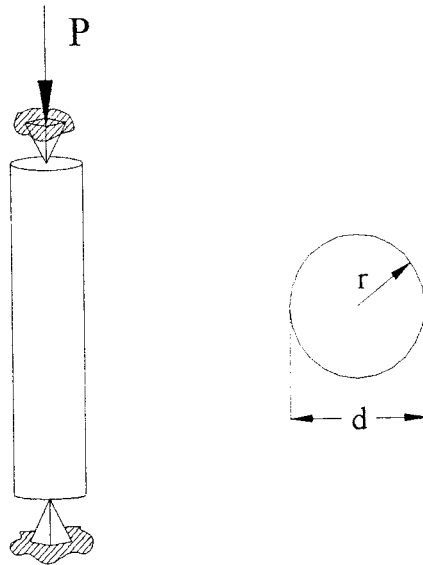
Αντικαθιστώντας το $L = 500 \text{ mm}$ στην εξίσωση (2) έχουμε $\lambda = 3.464 / h$.
Από την σχέση $\sigma_{\text{κρ}} = \pi^2 E / \lambda^2$ θα μπορέσουμε να βρούμε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει η διατομή για να είναι πιο αποτελεσματική.

$$\sigma_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{50 \times 10^3 \text{ kN}}{0.35h^2} = \frac{\pi^2 (70 \times 10^9)}{(3.464 / h)^2}$$

$$h = 39.7 \text{ mm} \quad b = 0.35h = 13.9 \text{ mm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.6

Σε μία ράβδο από κράμα αλουμινίου να υπολογίσετε την μικρότερη διάμετρο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δεχτεί φορτίο $P = 60 \text{ kN}$. Εάν το μήκος της είναι
 α) $L = 750 \text{ mm}$ β) $L = 300 \text{ mm}$.



ΛΥΣΗ

Για την διατομή ράβδου κυκλικής διατομής έχουμε :

$$I = \pi / 4 (r^4) \quad A = \pi r^2 \quad i = \sqrt{I / A} = r / 2$$

α) Για μήκος 750 mm : Αφού η διάμετρος της ράβδου είναι άγνωστη πρέπει να υποθέσουμε την τιμή της λυγηρότητας λ . Υποθέτουμε ότι $\lambda > 55$ έτσι για το φορτίο P θα έχουμε $\sigma = P / F$. ($\sigma_{επ} = 372 \times 10^3 \text{ MPa} / \lambda^2$)

$$\frac{P}{A} = \sigma_{επ} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{\lambda^2} = \frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi r^2} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{[0.750 \text{ m} / (r/2)]^2}$$

$$r^4 = 115.5 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \quad r = 18.44 \text{ mm}$$

Για $r = 18.44 \text{ mm}$ ο βαθμός λυγηρότητας είναι :

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{L}{r/2} = \frac{750 \text{ mm}}{(18.44 \text{ mm}) / 2} = 81.3 > 55$$

Άρα η υπόθεση μας είναι σωστή και για μήκος $L = 750 \text{ mm}$, η απαιτούμενη διάμετρος είναι :

$$d = 2r = 2(18.44)$$

$$d = 36.9 \text{ mm}$$

β) Για μήκος $L = 300 \text{ mm}$: Υποθέτουμε ξανά ότι $\lambda > 55$, δουλεύοντας όπως και προηγούμενος βρίσκουμε ότι το $r = 11.66 \text{ mm}$ και τον βαθμό λυγρότητας $\lambda = 51.5$. Άρα η υπόθεση μας είναι λάθος και ξανά υποθέτουμε για $12 < \lambda < 55$. Έτσι έχουμε : ($\sigma_{επ} = 212 - 1585\lambda \text{ MPa}$).

$$\frac{P}{A} = \sigma_{επ} = 212 - 1585\lambda \text{ MPa}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi r^2} = [212 - 1585 [0.3 \text{ m} / (r/2)]] 10^6 \text{ MPa}$$

$$r = 12.00 \text{ mm}$$

Για $r = 12.00 \text{ mm}$ ο βαθμός λυγρότητας είναι :

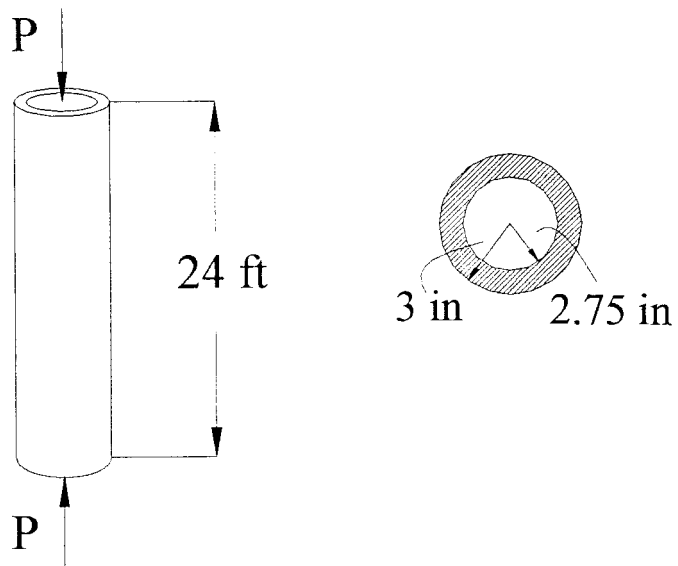
$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{300 \text{ mm}}{(12 \text{ mm}) / 2} = 50$$

Άρα η υπόθεση μας είναι σωστή και η διάμετρος για $L = 300 \text{ mm}$ είναι :

$$d = 2r = 2(12 \text{ mm}) = 24 \text{ mm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.7

Ένας χαλύβδινος σωλήνας μήκους 24 ft θα χρησιμοποιηθεί σαν στήλη με αρθρώσεις. Να υπολογιστεί το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο λυγισμού που μπορεί να δεχτεί η στήλη έτσι ώστε να μην υποστεί λυγισμό. ($\sigma_{επ} = 36 \text{ ksi}$, $E = 29(10^3) \text{ ksi}$).



ΛΥΣΗ

Υπολογισμός κρίσιμου φορτίου :

$$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$
$$= \frac{\pi^2 [29(10^3) \text{ kip / in}^2] (\frac{1}{4} \pi) [(3 \text{ in})^4 - (2.75 \text{ in})^4]}{[24 \text{ ft} (12 \text{ in / ft})]^2} = 64.5 \text{ kip}$$

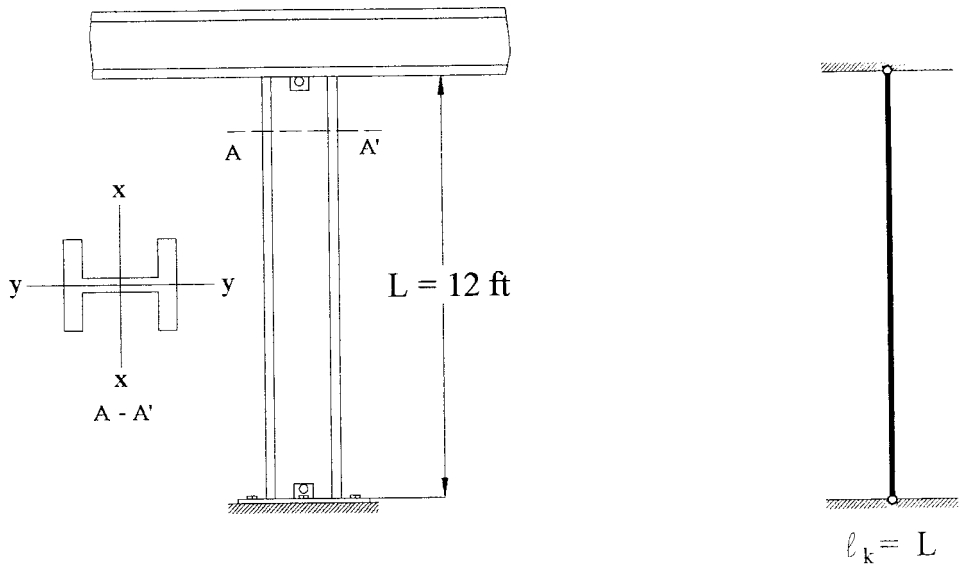
Η κρίσιμη τάση της στήλης για το παραπάνω φορτίο είναι :

$$\sigma_{κρ} = \frac{P_{κρ}}{A} = \frac{64.5 \text{ kip}}{\pi [(3)^2 - (2.75)^2] \text{ in}^2} = 14.3 \text{ ksi}$$

Αφού $\sigma_{κρ} < \sigma_{επ}$, το κρίσιμο φορτίο που βρήκαμε μπορεί να γίνει το μέγιστο επιτρεπόμενο φορτίο.

ΑΣΚΗΣΗ 3.8

Η χαλύβδινη δοκός θα χρησιμοποιηθεί σαν στήλη με άρθρωση. Να υπολογιστεί η μεγαλύτερη αξονική φόρτιση που μπορεί να δεχτεί πριν αρχίσει να λυγίζει ή ο χάλυβας να γίνεται ελαστικός. ($\sigma_{επ} = 36 \text{ ksi}$, $E = 29(10^3) \text{ kip}$, $F = 9.13 \text{ in}^2$, $I_x = 110 \text{ in}^4$, $I_y = 37.1 \text{ in}^4$).



ΛΥΣΗ

Από προσεκτική εξέταση βλέπουμε ότι ο λυγισμός παρουσιάζεται στον άξονα $y - y$. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Euler έχουμε :

$$P_{κρ} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2} = \frac{\pi^2 [29(10^3) \text{ kip/in}^2] (37.1 \text{ in}^4)}{[12 \text{ ft } (12 \text{ in/ft })]^2} = 512 \text{ kip}$$

Στο πλήρες φορτίο η κρίσιμη τάση της στήλης είναι :

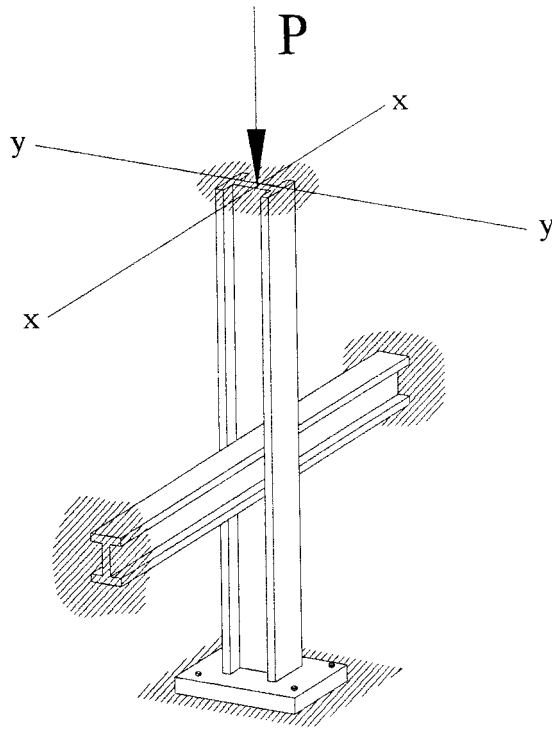
$$\sigma_{κρ} = \frac{P_{κρ}}{A} = \frac{512 \text{ kip}}{9.13 \text{ in}^2} = 56.1 \text{ ksi}$$

Άρα $\sigma_{κρ} < \sigma_{επ}$ δεν ισχύει γιατί $56.1 > 36$ οπότε :

$$36 \text{ ksi} = \frac{P}{9.13 \text{ in}^2} \quad P = 329 \text{ kip}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.9

Μία χαλύβδινη στήλη είναι πακτωμένη και στα δύο της άκρα και έχει ύψος 24 ft. Η ικανότητα της να δέχεται φορτία αυξάνεται στηρίζοντας τον άξονα $y - y$ χρησιμοποιώντας δοκάρια που συνδέονται με άρθρωση στο μέσο της στήλης. Να υπολογίσετε το φορτίο που μπορεί να δεχτεί η στήλη έτσι ώστε να μην λυγίσει η στήλη ή το υλικό να ξεπεράσει την τάση αναλογίας $\sigma_a = 60 \text{ ksi}$. ($I_x = 29.1 \text{ in}^4$, $I_y = 9.32 \text{ in}^4$, $A = 4.43 \text{ in}^2$, $E = 29(10^3) \text{ ksi}$).

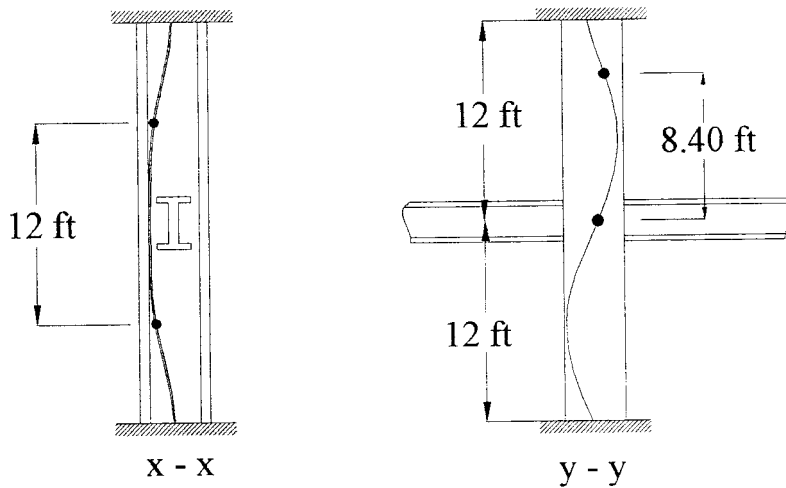


ΛΥΣΗ

Η συμπεριφορά της στήλης προς τον λυγισμό θα είναι διαφορετική στον άξονα x και στον άξονα y λόγω των δοκαριών που στηρίζουν την στήλη για τον άξονα $y - y$. Ο λυγισμός και στις δύο περιπτώσεις φαίνεται στα σχήματα (2) και (3). Το ελεύθερο ή ανηγμένο μήκος λυγισμού για τον άξονα $x - x$ είναι $l_k = 0.5(24 \text{ ft}) = 12 \text{ ft} = 144 \text{ in}$. για τον άξονα $y - y$ είναι : $l_k = 0.7(24 \text{ ft} / 2) = 8.40 \text{ ft} = 100.8 \text{ in}$. Το κρίσιμο φορτίο για τους δύο άξονες είναι :

$$(P_{\text{κρ}})_x = \frac{\pi^2 EI_x}{(l_k)^2} = \frac{\pi^2 [29(10^3) \text{ ksi}] 29.1 \text{ in}^4}{(144 \text{ in})^2} = 401.7 \text{ kip}$$

$$(P_{\text{κρ}})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(l_k)^2} = \frac{\pi^2 [29(10^3) \text{ ksi}] 9.32 \text{ in}^4}{(100.8 \text{ in})^2} = 262.5 \text{ kip}$$



Συγκρίνοντας τα κρίσιμα φορτία ο λυγισμός θα εμφανιστεί στον άξονα $y - y$. Οπότε η τάση που αναλογεί σε αυτό το φορτίο είναι :

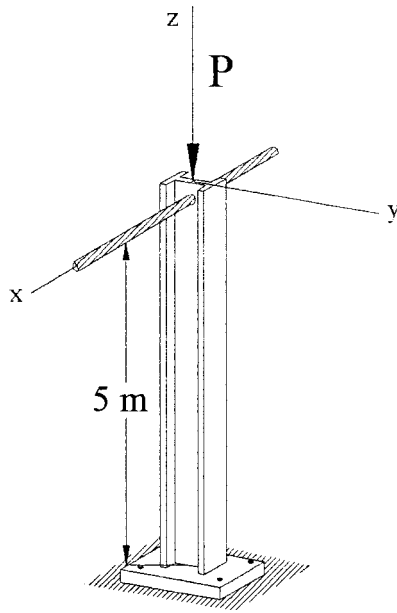
$$\sigma_{κρ} = \frac{P_{κρ}}{A} = \frac{262.5 \text{ kip}}{4.43 \text{ in}^2} = 59.3 \text{ ksi}$$

Αφού η τάση $\sigma_{κρ} < \sigma_a$, ο λυγισμός θα εμφανιστεί πριν το υλικό ξεπεράσει την τάση αναλογίας. Η φόρτιση που μπορεί να αντέξει η στήλη είναι :

$$P_{κρ} = 263 \text{ kip}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.10

Ο αλουμινένιος στύλος είναι πακτωμένος στην βάση του και στηρίζεται στην κορυφή του από συρματόσχοινο για την αποφυγή μετακίνησής του κατά τον άξονα x. Να υπολογίσετε την μέγιστη επιτρεπόμενη δύναμη P που μπορεί να εφαρμοστεί. Ο συντελεστής ασφαλείας είναι : $\nu = 3.0$, η μέγιστη θλιπτική ροπή είναι $\sigma_{\max} = 215$ MPa, $A = 7.5(10^{-3})\text{m}^2$, $I_x = 61.3(10^{-6})\text{m}^4$, $I_y = 23.2(10^{-6})\text{m}^4$, $E = 70$ GPa.



ΛΥΣΗ

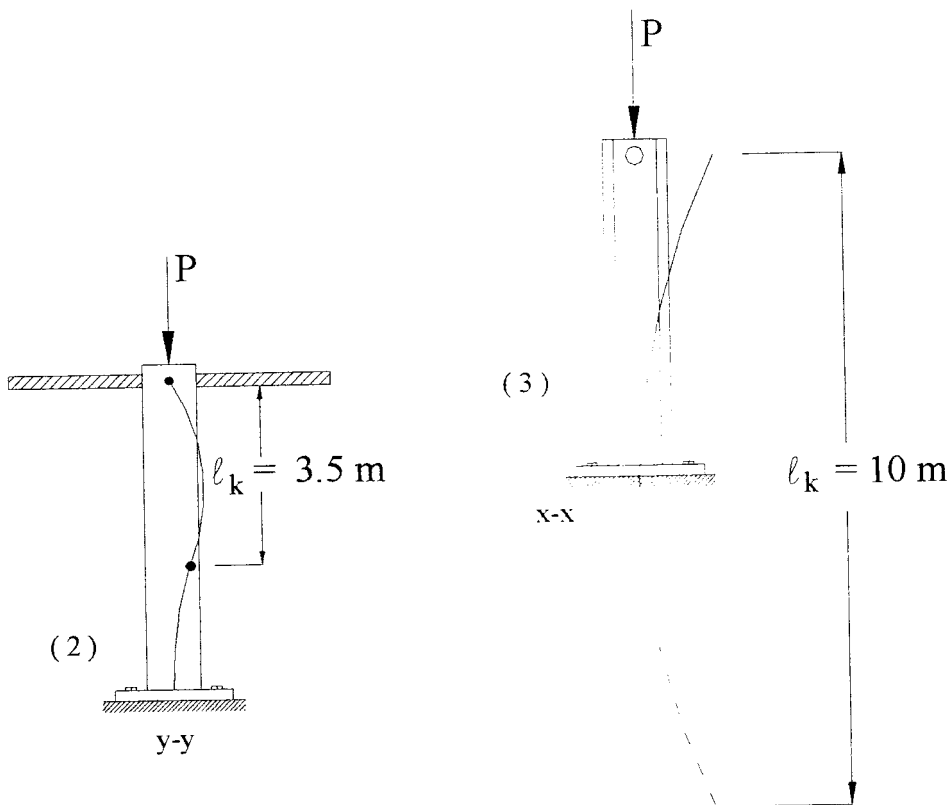
Ο λυγισμός στους άξονες x και y φαίνεται στα σχήματα (2) και (3). Για τον άξονα x – x το $l_k = 2L$, όπου $L_x = 2(5\text{ m}) = 10\text{ m}$. Επίσης για τον άξονα y – y το $l_k = 0.7L$, άρα $L_y = 0.7(5\text{ m}) = 3.5\text{ m}$. Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού και για τους δύο άξονες είναι :

$$(P_{\text{κρ}})_x = \frac{\pi^2 EI_x}{(l_k)_x^2} = \frac{\pi^2 [70(10^9) \text{ N/m}^2] (61.3(10^{-6})\text{m}^4)}{(10\text{ m})^2}$$

$$(P_{\text{κρ}})_x = 424 \text{ kN}$$

$$(P_{\text{κρ}})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(l_k)_y^2} = \frac{\pi^2 [70(10^9) \text{ N/m}^2] (23.2(10^{-6})\text{m}^4)}{(3.5\text{ m})^2}$$

$$(P_{\text{κρ}})_y = 1310 \text{ kN}$$



Συγκρίνοντας τις δύο τιμές βλέπουμε ότι, όσο αυξάνεται η δύναμη P , ο στύλος θα λυγίσει στον άξονα $x-x$. Το επιτρεπόμενο φορτίο είναι τότε :

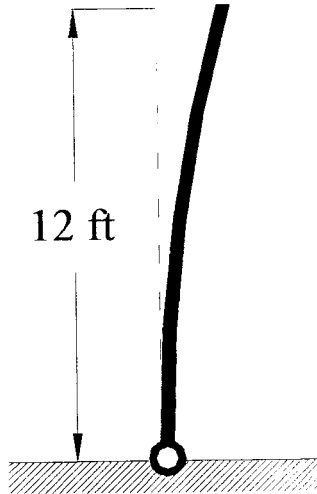
$$P_{επ} = \frac{P_{κρ}}{\nu} = \frac{424}{3.0} = 141 \text{ kN}$$

$$\text{αφού } \sigma_{κρ} = P_{κρ} / A = \frac{424 \text{ kN}}{7.5(10^{-3})} = 56.5 \text{ MPa} < 215 \text{ MPa}$$

Ο τύπος του Euler μπορεί να εφαρμοστεί.

ΑΣΚΗΣΗ 3.11

Υπολογίστε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού για ράβδο με το ένα άκρο της σε άρθρωση. Η ράβδος έχει μήκος 12 ft .($E = 30 \times 10^9 \text{ Pa}$, $I_{\min} = 9.7 \text{ in}^4$).



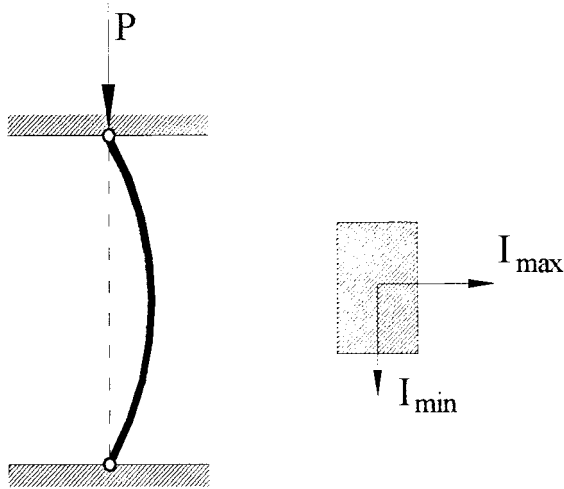
ΛΥΣΗ

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Euler θα βρούμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού :

$$P_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 (30 \times 10^9 \text{ N / m}^2)(9.7 \text{ in}^4)}{144 \text{ in}^4} = 138 \text{ lb}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.12

Μία αμφιαρθρωτή χαλύβδινη ράβδος ορθογωνικής διατομής 40 mm x 50 mm, υποβάλλεται σε αξονική θλίψη. α) Να υπολογίσετε το ελάχιστο μήκος που πρέπει να έχει η ράβδος για το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Euler για τον υπολογισμό του κρίσιμου φορτίου. Το όριο αναλογίας του υλικού είναι $\sigma_a = 230$ MPa. β) Εάν το μήκος της ράβδου είναι $L = 2$ m να υπολογίσετε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και $E = 200$ GPa.



ΛΥΣΗ

α) Η μικρότερη ροπή αδράνειας είναι :

$$I_{min} = 1/12 b^3 h = 1/12 (50)(40)^3 = 2.67 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

Η ακτίνα αδράνειας είναι :

$$i = \sqrt{I/A} = \sqrt{(2.67 \times 10^5) / (40)(50)} = 11.5 \text{ mm}$$

Το ανηγμένο μήκος λυγισμού είναι : $\lambda_k = L$. Έτσι ο βαθμός λυγερότητας ισούται με :

$$\lambda = L / i$$

Οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την κρίσιμη τάση της ράβδου.

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

το ελάχιστο μήκος της ράβδου μπορεί να βρεθεί τοποθετώντας την τιμή της κρίσιμης τάσης στην παραπάνω ισότητα. Έτσι έχουμε :

$$230 \times 10^6 = \frac{\pi^2 (200 \times 10^9)}{(L / 11.5)^2} \quad L = 1.065 \text{ m}$$

β) Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το κρίσιμο φορτίο έχουμε :

$$P_{\text{κρ}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 (200 \times 10^9) (10^{-6}) (2.67 \times 10^5)}{(2 \times 10^3)^2} = 132 \text{ kN}$$

Η τιμή της κρίσιμης τάσης για το παραπάνω φορτίο είναι :

$$\sigma_{\text{κρ}} = \frac{P_{\text{κρ}}}{A} = \frac{132 \times 10^3}{(40)(50)} = 66 \text{ MPa}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Μετατροπές μονάδων στο διεθνές σύστημα

1 in	= $2.5400 \cdot 10^{-2}$ m
1 ft = 12 in	= $3.0480 \cdot 10^{-1}$ m
1 in ²	= $6.4516 \cdot 10^{-4}$ m ²
1 ft ²	= $9.2903 \cdot 10^{-3}$ m ²
1 lb	= $4.5359 \cdot 10^{-1}$ kg
1 lbf(ή kip)	= 4.4482 N
1 ksi = 1 lbf / in ² (ή psi)	= $6.8948 \cdot 10^3$ Pa
1 hp	= $7.4570 \cdot 10^2$ W

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1) FERDINAND P. BEER and E. RUSSELL JOHNSTON, JR : " Mechanics of materials "
- 2) H. W. MORROW : " Statics and strength of materials "
- 3) R. C. HIBBELER : " Mechanics of materials "
- 4) ROY R. CRAIG, JR. : " Mechanics of materials "
- 5) WILLIAM A. NASH : " Theory and problems of strength of the materials "