ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΟΑΣΙΔΟΥ ΣΟΦΙΑ
ΜΑΡΓΑΡΙΤΙΔΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΘΕΜΑ:

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ, ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΜΕ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ***ΚΟΥΪΡΟΥΚΙΔΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ***

Ανώτατο Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Σερρών
Τμήμα Πληροφορικής & Επικοινωνιών

ΚΟΑΣΙΔΟΥ ΣΟΦΙΑ
ΜΑΡΓΑΡΙΤΙΔΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ, ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΜΕ ΤΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ***ΚΟΥΪΡΟΥΚΙΔΗΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ***

ΣΕΡΡΕΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2006

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το αντικείμενο της παρούσας πτυχιακής εργασίας είναι η επίλυση συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων με χρήση της μεθόδου RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF). Η μέθοδος αυτή έχει εσωτερικό έλεγχο του σφάλματος και του βήματος ολοκλήρωσης και η λύση που προκύπτει (στο επιθυμητό διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής) προσεγγίζεται μέσω του βέλτιστου πολυωνύμου, δεδομένου βαθμού. Τέλος τα αποτελέσματα παρουσιάζονται γραφικά.

Η υλοποίηση των παραπάνω μεθόδων γίνεται με την βοήθεια του Μαθηματικού προγράμματος MATLAB ,στο οποίο έχει γραφεί ο αντίστοιχος κώδικας, που είναι διαμορφωμένος έτσι ώστε να εκτελεί μία μία τις υπορουτίνες και να διακόπτει την ροή του προγράμματος , βγάζοντας τα αντίστοιχα μηνύματα για την καλύτερη κατανόηση, κάθε βήματος.

Στο παρόν βιβλίο αναφέρονται τα γενικά χαρακτηριστικά του MATLAB και των Διαφορικών Εξισώσεων. Στη συνέχεια αναλύεται η Αριθμητική μέθοδος RUNGE KUTTA (RK), καθώς και η μέθοδος για τον υπολογισμό σφάλματος RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF). Ακολουθεί η περιγραφή του τρόπου προσεγγίσεως της λύσης μέσω πολυωνύμου δεδομένου βαθμού, χρησιμοποιώντας την L-U decomposition. Στο επιθυμητό διάστημα, στο οποίο ζητάμε να προσεγγίσουμε την λύση μέσω πολυωνύμου, επιλέγονται ισαπέχοντα (ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή) σημεία της λύσης, τα οποία και προσεγγίζονται από το βέλτιστο πολυώνυμο (best-fit polynomial). Κατόπιν παρουσιάζεται ο κώδικας, που έχει δομηθεί για την επίλυση των Διαφορικών Εξισώσεων, συμπεριλαμβανομένων σχολίων για την πλήρη κατανόηση αυτού .Τέλος δίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα, πιστοποιώντας την εγκυρότητα της μεθόδου (Εμφάνιση αποτελεσμάτων και γραφικών παραστάσεων).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{O}

1.1 MATLAB

Στην εργασία αυτή αναπτύσσεται κώδικας για την επίλυση συστήματος διαφορικών εξισώσεων με την χρήση της γλώσσας προγραμματισμού MATLAB (το όνομα προήλθε από τις λέξεις Matrix Laboratory) καθώς επίσης και την προσαρμογή της αριθμητικής λύσης μ' ένα πολυώνυμο n-βαθμού που καλείται βέλτιστο πολυώνυμο (best-fit polynomial).

Η ευρεία χρήση του MATLAB οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην επεκτασιμότητά του, μέσω των διαφόρων εργαλειοθηκών, κάθε μια από τις οποίες περιέχει ένα αριθμό συναρτήσεων για ένα συγκεκριμένο αντικείμενο-εφαρμογή.

Το MATLAB (Math Works Inc.) παρέχει ένα δυναμικό, εύχρηστο και ανοικτό υπολογιστικό περιβάλλον για υλοποίηση επιστημονικών εφαρμογών σε ένα μεγάλο φάσμα πεδίων, όπως στη Γραμμική Άλγεβρα, Στατιστική, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Επεξεργασία Σημάτων και Εικόνας, Θεωρία Ελέγχου, Θεωρία Βελτιστοποίησης, Γραφικά, Αριθμητική Ανάλυση-Επιστημονικό Υπολογισμό (όπου θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στη συνέχεια).

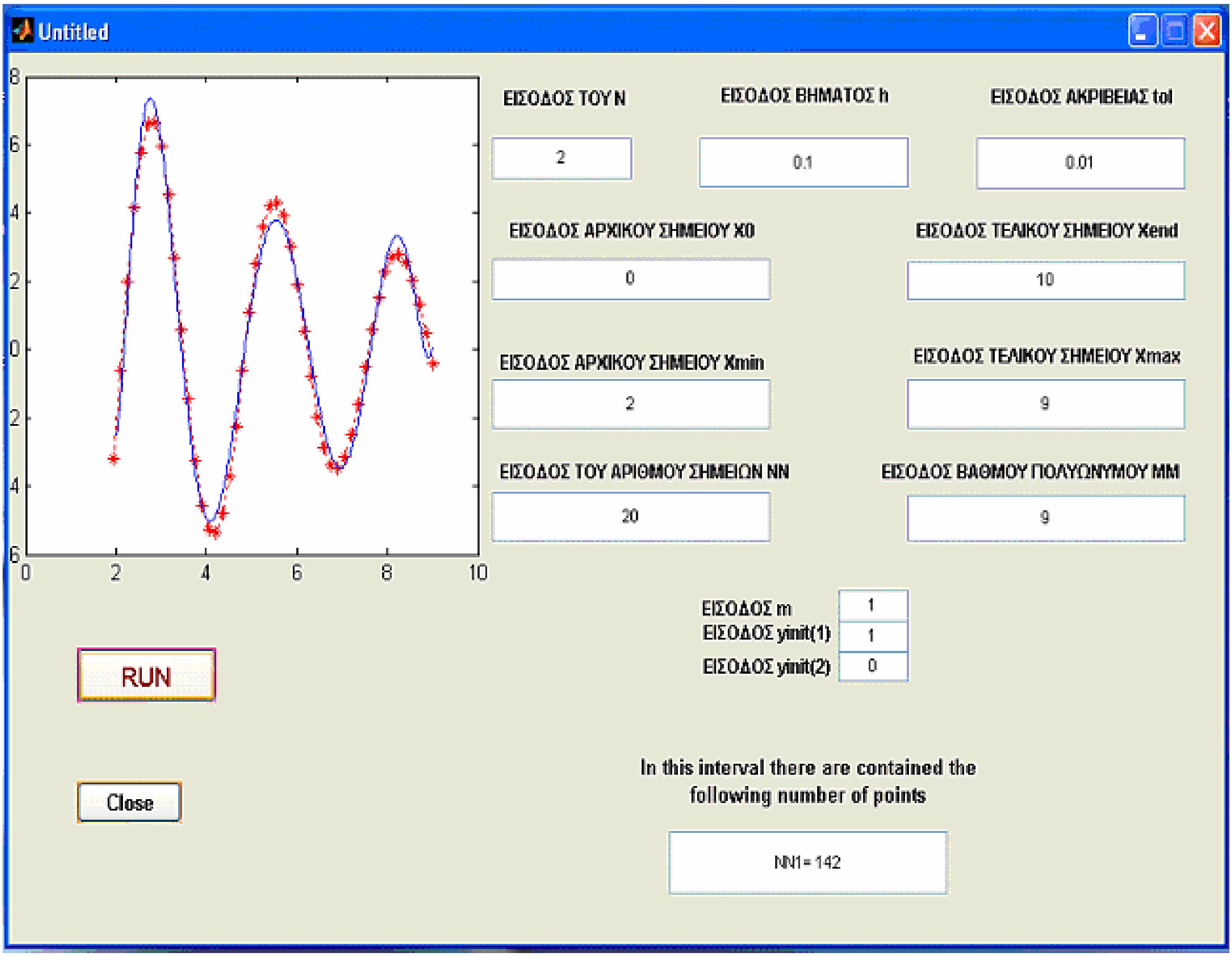
Το MATLAB εκτελεί από απλούς μαθηματικούς υπολογισμούς μέχρι και προγράμματα με εντολές παρόμοιες με αυτές που υποστηρίζει μια γλώσσα υψηλού επιπέδου. Συγκεκριμένα εκτελεί απλές μαθηματικές πράξεις, αλλά εξίσου εύκολα χειρίζεται μιγαδικούς αριθμούς, δυνάμεις, ειδικές μαθηματικές συναρτήσεις, πίνακες, διανύσματα και **πολυώνυμα**. Μπορεί επίσης να αποθηκεύει και να ανακαλεί δεδομένα, να δημιουργεί και να εκτελεί ακολουθίες εντολών που αυτοματοποιούν διάφορους υπολογισμούς και να σχεδιάζει **γραφικά.**

Το περιβάλλον του MATLAB υποστηρίζει ένα μεγάλο αριθμό ενδογενών λειτουργιών και συναρτήσεων καθώς και εξωτερικές βιβλιοθήκες (Toolboxes) για εξειδικευμένες περιοχές εφαρμογών. Υποστηρίζει επίσης μια ευέλικτη,απλή και δομημένη γλώσσα προγραμματισμού (script language) με πολλές ομοιότητες με την Pascal και παρέχει δυνατότητες εύκολης δημιουργίας, διασύνδεσης και χρήσης βιβλιοθηκών σε κώδικα γραμμένο στη γλώσσα αυτή (M files).

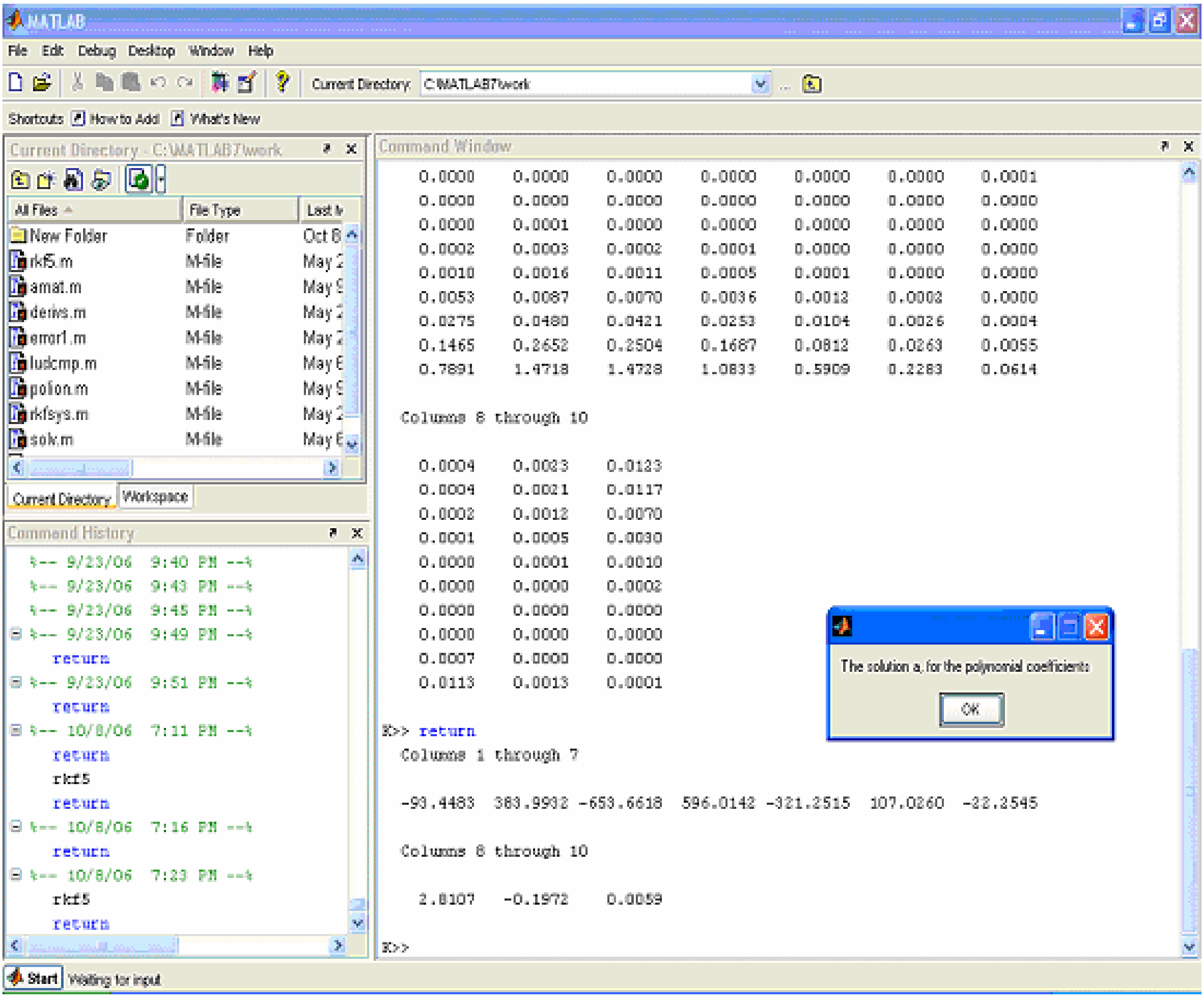
Το MATLAB λειτουργεί ως διερμηνέας εντολών (Command Interpreter), οι οποίες δίνονται μέσω του παραθύρου εντολών της (MATLAB command window) .

Οι εντολές αυτές μπορεί ναι είναι:

1. Ορισμοί μεταβλητών και πράξεις.
2. Κλήση ενσωματωμένων συναρτήσεων της MATLAB και των εγκατεστημένων εργαλειοθηκών της (toolboxes).
3. Κλήση συναρτήσεων (functions) ή αρχείων εντολών MATLAB (scripts) που κατασκευάζονται από τους χρήστες με την μορφή m-file.



Interface σε περιβάλλον MATLAB 7



Το περιβάλλον του MATLAB 7.

1.2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Οι περισσότεροι επιστημονικοί νόμοι σε διάφορες επιστήμες εκφράζονται με τη μορφή διαφορικών εξισώσεων. Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (Δ.Ε.) αποτελούν σημαντικό κεφάλαιο των μαθηματικών και υπάρχει πλειάδα μεθόδων για την αναλυτική επίλυσή τους. Εν τούτοις, στην πράξη, ένας μεγάλος αριθμός από χρήσιμες διαφορικές εξισώσεις δεν επιλύονται αναλυτικά και απαιτείται η αριθμητική τους επίλυση. Δυστυχώς μάλιστα, ακόμη και πολύ απλά φυσικά μοντέλα, που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη της εξέλιξης ενός φαινομένου, δεν επιλύονται αναλυτικά.

Ένα παράδειγμα για τη σχέση διαφορικών εξισώσεων με φυσικά φαινόμενα αποτελεί το μοντέλο «κυνηγού-θηράματος». Έστω ότι $x(t)$ είναι ο αριθμός των κυνηγών και $y(t)$ ο αριθμός των θηραμάτων σε μια χρονική στιγμή. Τότε, κάτω από κατάλληλες (και απλουστευτικές) συνθήκες, η εξέλιξη των δυο πληθυσμών θα δίνεται από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx}{dt} = a(y+b)x$$

$$\frac{dy}{dt} = c(x+d)y$$

όπου τα a,b,c,d είναι σταθερές, που δίνονται από το μελετητή του συστήματος.

Συνεπώς η ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση συστημάτων Σ.Δ.Ε. με δεδομένες αρχικές συνθήκες είναι αναγκαία και πολύ χρήσιμη στην κατανόηση των φαινομένων που περιγράφουν. Στο τελευταίο βοηθάει και η γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων. Στην παρούσα πτυχιακή αναπτύσσεται κώδικας μέσω της χρήση του MATLAB, για την ολοκληρωμένη απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Η αριθμητική Ανάλυση είναι ο κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών που ασχολείται με τη διακριτοποίηση «συνεχών» προβλημάτων των Μαθηματικών, των οποίων τη λύση θέλουμε να προσεγγίσουμε. Τέτοια προβλήματα είναι η επίλυση γραμμικών εξισώσεων, η προσέγγιση συναρτήσεων, η ολοκλήρωση και η παραγώγιση, η επίλυση διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων, ο προσδιορισμός των ακρότατων μιας συνάρτησης κ.α.. Τα διακριτά σχήματα, δηλαδή τις αριθμητικές μεθόδους που προκύπτουν, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε κατ' αρχήν ως προς την ακρίβεια και την ευστάθειά τους, και κατόπιν, αφού τις διατυπώσουμε με μορφή αλγορίθμου (δηλαδή ως μια πεπερασμένη, λογικά πλήρη ακολουθία καλώς ορισμένων αριθμητικών πράξεων και λογικών εκφράσεων), να τις υλοποιήσουμε κατά οικονομικό τρόπο (από υπολογιστική άποψη) μέσω προγραμμάτων στον υπολογιστή. Έτσι, η Αριθμητική Ανάλυση, ενδιαφέρει ιδιαίτερα τους χρήστες των Μαθηματικών, σ' όλες τις εφαρμογές τους στις επιστήμες και την τεχνολογία.

Το θεωρητικό μέρος της Αριθμητικής Ανάλυσης περιλαμβάνει την κατασκευή αριθμητικών μεθόδων και τη μελέτη της ακρίβειας και της ευστάθειάς τους, δηλαδή της ανάλυση των σφαλμάτων τους. Τα τελευταία τα διακρίνουμε σε σφάλματα «διακριτοποίησης» ή «προσέγγισης» και σε σφάλματα «στρογγύλευσης». Το πρακτικό μέρος αφορά την υλοποίηση των αλγορίθμων στον υπολογιστή με οικονομικό τρόπο από άποψη ταχύτητας και απαιτούμενου χώρου μνήμης, Ως συνήθως το πρακτικό και το θεωρητικό μέρος είναι αλληλένδετα.

2.1 RUNGE KUTTA

Η μέθοδος RUNGE KUTTA (R.K.) αποτελεί σημαντική συνεισφορά στην προσπάθεια ακριβούς ολοκλήρωσης ενός συστήματος NXN πρώτης τάξης συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Ως συνήθης χαρακτηρίζονται οι διαφορικές εξισώσεις που έχουν μία μεταβλητή, ενώ ως μερικές διαφορικές εξισώσεις αυτές που έχουν περισσότερες της μία μεταβλητές.

Παραδείγματος χάριν:

N – Συναρτήσεις $y_1(x),\ldots,y_N(x)$

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = F_1(x, y_k) \qquad k = 1,2,\ldots, N$$

$$\frac{dy_N(x)}{dx} = F_N(x, y_k)$$

Στη γενική μορφή εξετάζουμε την μέθοδο (R.K.) «δεύτερης τάξης».

Αν έχουμε την Διαφορική Εξίσωση $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ τότε αυξάνοντας το x (ανεξάρτητη μεταβλητή) κατά h, θεωρούμε ότι το y αυξάνει κατά Δy που είναι ένας «μέσος όρος» δύο διαφορετικών «εκτιμήσεων» για το Δy, των k_1, k_2

Γράφουμε :

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2$$

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + Ah, y_n + Bk_1\right) \qquad \textbf{(Σ1)}$$

Τα $k_1 k_2$ είναι εκτιμήσεις του πόσο αυξάνει το y ,(δηλαδή του Δy) διότι είναι γινόμενα του βήματος ως προς x (δηλαδή του h) με την τιμή της κλίσης (πρώτης παραγώγου) λόγω της Διαφορικής Εξίσωσης.

Οι μέθοδοι R.K. ως πρώτη εκτίμηση k_1 λαμβάνουν συνήθη εκτίμηση που προκύπτει από την μέθοδο Euler.

Σαν δεύτερη εκτίμηση k_2 λαμβάνουμε αυτήν για την οποία η κλίση $\left(\frac{dy}{dx} = f(x, y)\right)$ υπολογίζεται από αύξηση των ορισμάτων (x, y) κατά κλάσματα των (h, k_1) αντίστοιχα. Οι συντελεστές A,B καθώς και οι a,b πρέπει να προσδιοριστούν ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν καλύτερη συμφωνία με το ανάπτυγμα Taylor.

Θα έχουμε:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \left(\frac{h^2}{2}\right) f'(x_n, y_n) + \ldots.$$

Ο τόνος στο f σημαίνει ολική παράγωγο ως προς x , και έχουμε

$$\frac{df}{dx} = fx + fy\frac{dy}{dx} = fx + fyf$$

όπου οι δείκτες σημαίνουν μερική παραγώγιση ως προς της αντίστοιχη μεταβλητή (x ή y).

Άρα έχουμε :

$$y_{n+1} = y_n + hf_n + \left(\frac{h^2}{2}\right)\left(f_x + f_y f\right)_n \qquad \textbf{(E1)}$$

όπου ο δείκτης (n), σημαίνει ότι οι ποσότητες υπολογίζονται στο σημείο (x_n, y_n)

Ξαναγράφουμε την σχέση (Ε1) ως:

$$y_{n+1} = y_n + ahf\,(x_n, y_n) + bhf\,[x_n + Ah, y_n + Bhf\,(x_n, y_n)]$$

(Ε2)

Για να κάνουμε σύγκριση των δύο σχέσεων (Ε1) και (Ε2) αναπτύσσουμε κατά Taylor τον τελευταίο όρο της (Ε2), κρατώντας μόνον όρους με πρώτης τάξης μερικές παραγώγους.

$$f\left[x_n + Ah, y_n + Bhf\left(x_n, y_n\right)\right] = \left(f + Ahf_x + Bhff_y\right)_n$$

Αντικαθιστώντας στην (Ε2), μετά από πράξεις έχουμε

$$y_{n+1} = y_n + (a+b)hf_n + h^2\left[Abf_x + Bbff_y\right]_n \qquad \textbf{(E3)}$$

Συγκρίνοντας την (Ε1) με την (Ε2) έχουμε:

$$a + b = 1\,, \quad ab = \frac{1}{2}\,, \quad Bb = \frac{1}{2}$$

Έχουμε τρεις εξισώσεις με τέσσερις αγνώστους. Μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα την μια σταθερά και να προσδιορίσουμε τις άλλες τρεις.

Αν $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $A = B = 1$ και προκύπτει η τροποποιημένη μέθοδος Euler, δηλαδή

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right)$$
$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \qquad \textbf{(Σ2)}$$

Το σφάλμα (τοπικό!) της μεθόδου αυτής είναι $0\left(h^3\right)$. Αυτό σημαίνει ότι, για παράδειγμα με $h = 0{,}1$ το σφάλμα είναι της τάξης του 10^{-3}. Υπάρχουν και ανώτερης τάξης μέθοδοι, όπου το σφάλμα είναι υψηλότερης τάξης ως προς (h), (δηλαδή πολύ μικρότερο!)

Η πιο βασική είναι η μέθοδος (RK) τέταρτης τάξης,Σ' αυτήν συγκρίνουμε όρους μέχρι και τέταρτης τάξης στο ανάπτυγμα Taylor, $0\left(h^4\right)$. Η πλέον γνωστή είναι η (RK) – τέταρτης τάξης όπου:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right)$$
$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right) \qquad \textbf{(Σ3)}$$

και το τοπικό σφάλμα είναι $0(h^5)$. Είναι πιο συμφέρουσα, από υπολογιστική άποψη, σε σχέση με την προηγούμενη μέθοδο διότι μπορούμε να πετύχουμε την ίδια ακρίβεια με μεγαλύτερο βήμα (h)

2.2 RUNGE KUTTA FEHLBERG (RKF)

Για να κάνουμε εκτίμηση του σφάλματος στην περίπτωση μιας μεθόδου (RK), όταν κάνουμε ένα βήμα ολοκλήρωσης, και πάμε από το (x_n) στο $(x_{n+1}) = x_n + h$ μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω μέθοδο: Υπολογίζουμε την τιμή του y αν ελαττώσουμε το βήμα στο μισό, δηλαδή $\left(\frac{h}{2}\right)$. Αν τώρα η διαφορά είναι μεγαλύτερη από κάποια ανεκτική τιμή σφάλματος, τότε θεωρούμε σαν καινούριο y, το τελευταίο. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μέχρις ότου το σφάλμα γίνει μικρότερο από την ανεκτή τιμή του σφάλματος.

Αυτό όμως είναι εξαιρετικά δαπανηρό σε ότι αφορά το υπολογιστικό κόστος, διότι αυξάνει από τέσσερις (4) , σε τέσσερις συν επτά (δηλαδή έντεκα -11) τους απαιτούμενους υπολογισμούς ανά βήμα, για να προχωρήσει η μέθοδος.

Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι για να συμπιεστεί το υπολογιστικό κόστος ανά βήμα ολοκλήρωσης έτσι ώστε να έχουμε και υπολογισμό του σφάλματος Ε.

Η μέθοδος που έχει επικρατήσει περισσότερο από όλες είναι η Runge Kutta Fehlberg (RKF). Είναι πέμπτης τάξης ως προς το τοπικό σφάλμα $0(h^5)$ και επιπλέον με έξι (6) υπολογισμούς συναρτήσεων ανά βήμα, έχουμε και εκτίμηση του σφάλματος.

Η μέθοδος δίνεται ακολούθως:

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{439k_1}{216} - \frac{8k_2}{1} + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right)$$

$$k_6 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right)$$

Η βάση του σχήματος RKF είναι ότι αντί να υπολογιστεί η τιμή y του επόμενου βήματος (δηλαδή y_{n+1}) στα σημεία (h) και $\left(\frac{h}{2}\right)$, υπολογίζουμε δύο εκτιμήσεις y_{n+1} , $\widehat{y}_{n+1}$ του τύπου (RK) στο τέλος του διαστήματος (h) αλλά με διαφορετική ακρίβεια.

Η εκτίμηση τέταρτης τάξης $0\left(h^4\right)$ είναι η

$$\widehat{y}_{n+1} = y_n + \left(\frac{25\,k_1}{216} + \frac{1408\,k_3}{2565} + \frac{2197\,k_4}{4104} - \frac{k_5}{4}\right)$$

και η εκτίμηση πέμπτης τάξης $0\left(h^5\right)$ είναι η

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6656\,k_3}{12825} + \frac{28561\,k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\right)$$

Το σφάλμα υπολογίζεται από την διαφορά $\left(y_{n+1} - \widehat{y}_{n+1}\right)$ και είναι

$$E = \left(\frac{k_1}{360} - \frac{128\,k_3}{4275} - \frac{2197\,k_4}{75240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2k_6}{55} \right)$$

Τελικά το επόμενο βήμα (y_{n+1}) υπολογίζεται από τον όρο πέμπτης τάξης $0\left(h^5\right)$.

Συνεπώς υπολογίζουμε μόνο έξι (6) συναρτήσεις $k_1 \to k_6$, και έχουμε υπολογισμό και του σφάλματος.

Στην υλοποίηση μπορούμε και στο κάθε βήμα ολοκλήρωσης να υπολογίζουμε το σφάλμα και ανάλογα αν είναι μεγάλο να υποδιπλασιάζουμε το βήμα $\left(h \to \left(\frac{h}{2}\right)\right)$, ή αν είναι υπερβολικά μικρό να το διπλασιάζουμε $\left(h \to 2h\right)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

3.1 ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Η μορφή των αριθμητικών λύσεων μιας Σ.Δ.Ε. $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y)$ είναι γενικά ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο X0Y της μορφής $\Lambda = \{(x_k, y_k) | k = 1,2,...N\}$. Ζητάμε λοιπόν να προσαρμόσουμε την αριθμητική λύση σε κάποιο πολυώνυμο βαθμού n, δηλαδή

$$Y = P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Ο βαθμός του πολυωνύμου n και οι συντελεστές (a_k) θα πρέπει να προσδιοριστούν κατά κάποιο βέλτιστο τρόπο, και αυτός δεν είναι άλλος από την απαίτηση να ελαχιστοποιείται το τετραγωνικό (squared) σφάλμα.

Πράγματι αν θεωρήσουμε την παραπάνω πολυωνυμική σχέση και υποθέσουμε ότι περιγράφει το σύνολο Λ, των δεδομένων τότε το σφάλμα σε κάθε σημείο $P_k(x_k, y_k)$ θα είναι $(k = 1,2,....,N)$

$$e_k = (y_k - a_0 - a_1 x_k - .... - a_n x_k^n) = \left(y_k - \sum_{m=0}^{n} a_m x_k^m \right)$$

Το κριτήριο που ζητάμε να ικανοποιείται είναι, το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων να γίνεται ελάχιστο, δηλαδή

$$S = \sum_{k=1}^{N} e_k^2 = \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - \sum_{n=0}^{n} a_n x_k^n \right)^2 = \mathrm{MIN}$$

Θεωρούμε ότι το $S = S(a_0, a_1, ..., a_n)$ είναι συνάρτηση των συντελεστών του πολυωνύμου και ζητάμε να ελαχιστοποιηθεί ως προς αυτές.

Άρα πρέπει $\dfrac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 0,1,.....,n)$

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους έχουμε:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 = \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - a_0 - a_1 x_u - .... - a_n x_i^n)(-1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 = \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i - .... - a_n x_i^n)(-x_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_n} = 0 = \sum_{i=1}^{N} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i - ..... - a_n x_i^n)(-x_i^n)$$

Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα $(n + 1) * (n + 1)$ ως προς τους αγνώστους $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ που ζητάμε να προσδιορίσουμε.

Το σύστημα αυτό μπορούμε να το αναδιατάξουμε και να το γράψουμε στην παρακάτω μορφή.

$$a_0N + a_1\sum x_i + ... + a_n\sum x_i^n = \sum y_i$$
$$a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2 + ... + a_n\sum x_i^{n+1} = \sum x_i y_i$$

$$a_0\sum x_i^n + a_1\sum x_i^{n+1} + ... + a_n\sum x_i^{2n} = \sum x_i^n y_i$$

ή σε μορφή πινάκων, ως ακολούθως:

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^n \\ \sum x_i & ... & ... & \\ \sum x_i^2 & ... & ... & \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{n+1} & ... & \sum x_i^{2n} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ... \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ ... \\ \sum x_i^n y_i \end{bmatrix}$$

ή B * a = C

Για να επιλυθούν τέτοιο είδους συστήματα, όπου το (n) (δηλαδή ο βαθμός του πολυωνύμου) μπορεί να είναι μεγάλος, απαιτούνται ειδικές τεχνικές. Επιπλέον πρόβλημα αποτελούν και οι αστάθειες που προκύπτουν λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης και μεγεθύνονται έτσι ώστε να έχουμε λανθασμένη λύση.

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η διάσπαση L-U (L-U decomposition).

Αφού λυθεί το σύστημα, προσδιορίζουμε το ζητούμενο συμπτωτικό πολυώνυμο.

$$y = P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Παρατηρούμε τέλος ότι ο πίνακας B μπορεί να γραφεί ως

$$B = AA^T$$

όπου $$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & .... & 1 \\ x_1 & x_2 & .... & x_N \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1^n & x_2^n & ... & x_N^n \end{vmatrix} = A_{(n+1)xN}$$

και A^T = ανάστροφος του A

επίσης ο πίνακας $C = Ay$ όπου $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_N \end{bmatrix}$

Τέλος ο πίνακας $B = B^T$ είναι συμμετρικός. Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι ποια είναι η τιμή του (n) (δηλαδή του βαθμού του πολυωνύμου) που θα χρησιμοποιήσουμε. Η απάντηση στο ερώτημα αυτί κάνει χρήση της Στατιστικής. Το (n) προσδιορίζεται ζητώντας να ελαχιστοποιείται η διακύμανση,

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N} e_k^2}{N - n - 1}$$

Συνήθως αυξάνοντας το (n) παρατηρούμε ότι η τιμή του σ^2 λαμβάνει μια ελάχιστη τιμή και μετά αυξάνει και πάλι. Σε κάθε περίπτωση οι τιμές του (n) που θα υιοθετούμε (για λόγους πρακτικούς) είναι στο διάστημα $1 \le n \le 9$

3.2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ L-U ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Για να επιλύσουμε ένα σύστημα γραμμικό, της μορφής $Ax = b$

Όπου $A = A(nxn)$ είναι τετραγωνικός πίνακας (nxn) , $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ ο πίνακας $(nx\,1)$ των αγνώστων, και $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ ο πίνακας των συντελεστών του δεξιού μέλους, πολλές φορές χρησιμοποιούμε την μέθοδο L-U. Αυτή είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη για υπολογιστικές εφαρμογές με πίνακες A μεγάλων διαστάσεων.

Η ουσία της μεθόδου συνίσταται στο να γραφεί ο πίνακας A σαν γινόμενο δυο άλλων πινάκων A=L*U όπου

Ο $L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{ij} & \dots & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$ είναι κάτω τριγωνικός πίνακας και

Ο $U = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & u_{ij} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ είναι άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο.

Ας κάνουμε επίδειξη της μεθόδου για A, L, U (4x4)-πίνακες

Θέλουμε:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις γραμμές του L με την πρώτη στήλη του U , έχουμε $l_{11} = a_{11}$, $l_{21} = a_{21}$, $l_{31} = a_{31}$, $l_{41} = a_{41}$

Έτσι προσδιορίζουμε την πρώτη στήλη του L μέσω $l_{ij} = a_{ij} \quad (i = 1,2,3,4)$

Μετά πολλαπλασιάζουμε την πρώτη στήλη του L με τις στήλες του U.Προκύπτει $u_{12} = \dfrac{a_{12}}{l_{11}}, u_{13} = \dfrac{a_{13}}{l_{11}}, u_{14} = \dfrac{a_{14}}{l_{11}}$ και έτσι προσδιορίζεται και η πρώτη σειρά του U. Η μέθοδος προχωράει προσδιορίζοντας λοιπόν μια στήλη του L, ακολούθως μια γραμμή του U και εναλλάξ.

Έτσι πολλαπλασιάζοντας τις γραμμές του L με την δεύτερη στήλη του U έχουμε:

$$\begin{array}{l} l_{21}u_{12} + l_{22} = a_{22} \\ l_{31}u_{12} + l_{32} = a_{32} \\ l_{41}u_{12} + l_{42} = a_{42} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} \\ l_{42} = a_{42} - l_{41}u_{12} \end{array}$$

Πολλαπλασιάζοντας ομοίως την δεύτερη γραμμή του L με τις στήλες του U έχουμε:

$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = a_{23} \Leftrightarrow u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}}$$

$$l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} = a_{24} \Leftrightarrow u_{24} = \frac{a_{24} - l_{21}u_{14}}{l_{22}}$$

Ο γενικός λοιπόν τύπος – αλγόριθμος που προσδιορίζει τα στοιχεία των L , U είναι:

$$l_{i1} = a_{i1}$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$$

FOR J=2 TO N STEP 1 DO

$$e_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \qquad i = j, j+1,.....,n$$

$$u_{jj} = 1$$

$$u_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk} u_{ki}}{\overline{e}_{jj}} \qquad i = j+1,...,n$$

END DO

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{O}

ΚΩΔΙΚΑΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ RKF5 ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΔΗΛΩΣΗ ΑΡΧΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

N=2; ⇦ *Το N είναι ο αριθμός ανεξάρτητων Διαφορικών Εξισώσεων $1^{ης}$ τάξης, που μας δείχνει τη διάσταση του συστήματος.*

h=0.1; ⇦ *Το h είναι το βήμα.*

tol=0.01; ⇦ *Το tol είναι η ακρίβεια.*

x(1)=0.0; ⇦ *Η μικρότερη τιμή που παίρνει η ανεξάρτητη μεταβλητή.*
y1(1)=1.0; ⇦ *Η $1^{η}$ παράγωγος του y*
y2(1)=0.0; ⇦ *Η $2^{η}$ παράγωγος του y*
x0=x(1);
y0(1)=y1(1);
y0(2)=y2(1);

xend=7.0; ⇦ *Η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει η ανεξάρτητη μεταβλητή.*

m=1; ⇦ *Με το m επιλέγουμε ποια γραφική θα μας εμφανίσει.*

ΚΑΛΟΥΝΤΑΙ ΟΙ ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΕΣ error1 ΚΑΙ rkfsys ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ h ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΗ ΕΠΟΜΕΝΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ.

```
i=1;
while (x0<xend)
  error=error1(y0,x0,h,N);
    if (error>tol)
```

```
      h=h/2.0;
    elseif (error<tol/100.0)
      h=2.0*h;
    else
    y1(i+1)=rkfsys(y0,x0,h,N,1);
    y2(i+1)=rkfsys(y0,x0,h,N,2);
    x(i+1)=x(i)+h;

    y0(1)=y1(i+1);
    y0(2)=y2(i+1);
    x0=x(i+1);
    i=i+1;
  end

 end
plot(x,y1,'r')
```

⇦ *Γραφική απεικόνιση της συνήθης διαφορικής εξίσωσης ή του συστήματος διαφορικών εξισώσεων*

```
keyboard
```

ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ 20 ΣΗΜΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΛΥΣΗ ΜΙΑΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ Ή ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ (Xmin, Xmax) ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥΣ ΑΠΟ ΕΝΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΜΜ ΒΑΘΜΟΥ

```
xmin=1.0;
xmax=6.0;
```

⇦ *Είναι το αρχικό και το τελικό σημείο που θέλουμε να κάνουμε την προσέγγιση στο πολυώνυμο*

ΕΥΡΕΣΗ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ (Xmin, Xmax)

```
NN=20;
```

⇦ *Ο μέγιστος αριθμός σημείων που θέλουμε να εμφανιστούν στη γραφική παράσταση.*

```
MM=9;
```

⇦ *Ο βαθμός του πολυωνύμου*

```
jj=1;
while (x(jj)<=xmin)
  jj=jj+1;
end
jmin=jj-1;
jj=1;
while (x(jj)<xmax)
  jj=jj+1;
end
jmax=jj;
```

NN1=jmax-jmin; ⇦ *Βάλαμε μια μεταβλητή (NN1) για να δείχνει τον αριθμό των σημείων που υπάρχουν στο διάστημα.*

msgbox('In this interval there are contained the following number of points')
disp(NN1) ⇦ *Εμφάνιση των σημείων που υπάρχουν στο δοθέν διάστημα*
keyboard
if (NN1<NN) ⇦ *Κάνουμε έλεγχο εάν το NN1 είναι μικρότερο του NN τότε*
jstep=1; *επιλέγονται όλα τα σημεία. Αλλιώς χρησιμοποιούμε ένα*
else *μεγαλύτερο βήμα (step) για την επιλογή των σημείων .*
jstep=3;
end

```
kk=jmin;
ii=1;
while (kk<=jmax)
  xin(ii)=x(kk);
  yin(ii)=y1(kk);
  kk=kk+jstep;
  ii=ii+1;
end
```

tre3lu2(xin,yin,ii-1,MM,xmin,xmax) ⇦ *Καλείται η υπορουτίνα tr3lu2*

<u>ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΕΠΟΜΕΝΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ</u>

function yendf=rkfsys(y0,x0,h,N,i)

<u>ΚΑΛΕΙΤΑΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ derivs ΠΟΥ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΟ ΣΕΤ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΟΥ ΔΙΕΚΠΕΡΑΙΩΝΟΝΤΑΙ ΓΙΑ ΤΟ ΒΗΜΑ h.</u>

for j=1:N ⇦ *Για τιμές του j από 1 έως N*
kp1(j)=h*derivs(y0,x0,j); ⇦ *Υπολογισμός των εκτιμήσεων K(j)*
yend1(j)=y0(j)+kp1(j)/4.0; ⇦ *K(1)*
end

for j=1:N
kp2(j)=h*derivs(yend1,x0+h/4.0,j); ⇦ *K(2)*
yend2(j)=y0(j)+(3.0*kp1(j)+9.0*kp2(j))/32.0;
end

```
for j=1:N
kp3(j)=h*derivs(yend2,x0+3.0*h/8.0,j);           ⇦ K(3)
yend3(j)=y0(j)+1932.0*kp1(j)/2197.0;
yend3(j)=yend3(j)-7200.0*kp2(j)/2197.0;
yend3(j)=yend3(j)+7296.0*kp3(j)/2197.0;
end


for j=1:N
kp4(j)=h*derivs(yend3,x0+12.0*h/13.0,j);         ⇦ K(4)
yend4(j)=y0(j)+439.0*kp1(j)/216.0;
yend4(j)=yend4(j)-8.0*kp2(j)/513.0;
yend4(j)=yend4(j)+3680.0*kp3(j)/513.0;
yend4(j)=yend4(j)-845.0*kp4(j)/4104.0;
end

for j=1:N
kp5(j)=h*derivs(yend4,x0+h,j);                   ⇦ K(5)
yend5(j)=y0(j)-8.0*kp1(j)/27.0;
yend5(j)=yend5(j)+2.0*kp2(j);
yend5(j)=yend5(j)-3544.0*kp3(j)/2565.0;
yend5(j)=yend5(j)+1859.0*kp4(j)/4104.0;
yend5(j)=yend5(j)-11.0*kp5(j)/40.0;
end

for j=1:N
kp6(j)=h*derivs(yend5,x0+h/2.0,j);               ⇦ K(6)
end

for j=1:N
yend(j)=y0(j)+16.0*kp1(j)/135.0;
yend(j)=yend(j)+6656.0*kp3(j)/12825.0;
yend(j)=yend(j)+28561.0*kp4(j)/56430.0;
yend(j)=yend(j)-9.0*kp5(j)/50.0;
yend(j)=yend(j)+2.0*kp6(j)/55.0;
end

yendf=yend(i);
```

<u>ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ</u>

```
function err=error1(y0,x0,h,N)

sum=0.0;            ⇦ Αρχικοποιούμε το sum δίνοντάς το την τιμή 0.0
err1=0.0;           ⇦ Αρχικοποιούμε το err1 δίνοντάς το την τιμή 0.0

for j=1:N           ⇦ Για τιμές του j από 1 έως N
```

```
kp1(j)=h*derivs(y0,x0,j);          ⇦ Υπολογίζονται τα K(j)
yend1(j)=y0(j)+kp1(j)/4.0;                      ⇦ K(1)
end

for j=1:N
kp2(j)=h*derivs(yend1,x0+h/4.0,j);              ⇦ K(2)
yend2(j)=y0(j)+(3.0*kp1(j)+9.0*kp2(j))/32.0;
end
for j=1:N
kp3(j)=h*derivs(yend2,x0+3.0*h/8.0,j);          ⇦ K(3)
yend3(j)=y0(j)+1932.0*kp1(j)/2197.0;
yend3(j)=yend3(j)-7200.0*kp2(j)/2197.0;
yend3(j)=yend3(j)+7296.0*kp3(j)/2197.0;
end

for j=1:N
kp4(j)=h*derivs(yend3,x0+12.0*h/13.0,j);        ⇦ K(4)
yend4(j)=y0(j)+439.0*kp1(j)/216.0;
yend4(j)=yend4(j)-8.0*kp2(j)/513.0;
yend4(j)=yend4(j)+3680.0*kp3(j)/513.0;
yend4(j)=yend4(j)-845.0*kp4(j)/4104.0;
end

for j=1:N
kp5(j)=h*derivs(yend4,x0+h,j);                  ⇦ K(5)
yend5(j)=y0(j)-8.0*kp1(j)/27.0;
yend5(j)=yend5(j)+2.0*kp2(j);
yend5(j)=yend5(j)-3544.0*kp3(j)/2565.0;
yend5(j)=yend5(j)+1859.0*kp4(j)/4104.0;
yend5(j)=yend5(j)-11.0*kp5(j)/40.0;
end

for j=1:N
kp6(j)=h*derivs(yend5,x0+h/2.0,j);              ⇦ K(6)
end


for j=1:N
sum1=0.0;                         ⇦ Υπολογίζουμε το άθροισμα sum1 που του
sum1=sum1+kp1(j)/360.0;             δίνουμε αρχική τιμή 0.0. Το sum1 είναι το
sum1=sum1-128.0*kp3(j)/4275.0;      σφάλμα το οποίο ισούται με την διαφορά
sum1=sum1-2197.0*kp4(j)/75240.0;                       (y_{n+1} − ȳ_{n+1})
sum1=sum1+kp5(j)/50.0;
sum1=sum1+2.0*kp6(j)/55.0;
sum=abs(sum1);                  ⇦ Βάζουμε την απόλυτη τιμή του sum1 στο sum
if (err1<sum)                   ⇦ Αν η τιμή του σφάλματος είναι μικρότερη από
  err1=sum;                       το sum τότε η τιμή του sum γίνετε ίση με του
end                               err1
end
```

err=err1; ⇦ *Θέτουμε το err1 ίσο με την έξοδο που μας δείχνει το σφάλμα,η οποία αντιστοιχεί στο σύμβολο err.*

<u>ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ ΠΟΥ ΔΗΛΩΝΟΝΤΑΙ ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ</u>

```
function drv=derivs(y,x,j)
```

<u>ΔΗΛΩΝΟΥΜΕ ΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΘΑ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΟΥΝ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΤΡΙΒΗ)</u>

```
ff(1)=y(2);
ff(2)=-1.0*y(2)-5.0*y(1);
```

drv=ff(j); ⇦ *Η έξοδος παίρνει τις τιμές των Διαφορικών*

<u>ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΠΙΝΑΚΑ Α</u>

```
function pineis=amat(x,N,M)


for i=1:N
  xn(i)=1.0;
end

for i=1:M+1
  pineis(i,1)=0.0;
  for j=1:N
    pineis(i,1)=pineis(i,1)+xn(j);
    xn(j)=xn(j)*x(j);
  end
end

for i=2:M+1
  pineis(M+1,i)=0.0;
  for j=1:N
    pineis(M+1,i)=pineis(M+1,i)+xn(j);
    xn(j)=xn(j)*x(j);
```

```
  end
end

for j=2:M+1
  for i=1:M
    pineis(i,j)=pineis(i+1,j-1);
  end
end
```

<u>ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ ΠΟΥ ΠΑΡΑΓΕΙ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ LU</u>

```
function pin=ludcmp(a,N)

flag=0;
for i=1:N
  for j=2:N
    sum=0.0;
    if (j<=i)
      jm1=j-1;
      for k=1:jm1
        sum=sum+a(i,k)*a(k,j);
      end
      a(i,j)=a(i,j)-sum;
    else
      im1=i-1;
      if (im1~=0)
        for k=1:im1
          sum=sum+a(i,k)*a(k,j);
        end
      end
      if (abs(a(i,i))<1e-10)
        flag=1;
      else
        a(i,j)=(a(i,j)-sum)/a(i,i);
      end
    end
    if (flag==1)
      msgbox('Almost Zero Diagonal Element')
      keyboard
      break;
    end
  end
  if (flag==1)
    msgbox('Almost Zero Diagonal Element')
    keyboard
    break;
  end
end
```

```
pin=a;
```

ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ x ΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

```
function xunkn=solv(a,b,N)


bint(1)=b(1)/a(1,1);
for i=2:N
  im1=i-1;
  sum=0.0;
  for k=1:im1
    sum=sum+a(i,k)*bint(k);
  end
  bint(i)=(b(i)-sum)/a(i,i);
end
xunkn(N)=bint(N);
for j=2:N
  nmjp2=N-j+2;
  nmjp1=N-j+1;
  sum=0.0;
  for k=nmjp2:N
    sum=sum+a(nmjp1,k)*xunkn(k);
  end
  xunkn(nmjp1)=bint(nmjp1)-sum;
end
```

ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ

```
function exod=polion(aa,M,xmin,xmax,jj)


hh=0.02;
xx=xmin;
j=1;
while (xx<=xmax)
  yy=0;
  xn=1.0;
  for i=1:M+1
    yy=yy+aa(i)*xn;
    xn=xn*xx;
  end
  x2(j)=xx;
```

```
  y2(j)=yy;
  xx=xx+hh;
  j=j+1;
end
if (jj==1)
  exod=x2;
elseif (jj==2)
  exod=y2;
else
end
```

<u>ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑ Η ΟΠΟΙΑ ΚΑΛΕΙ ΤΙΣ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΕΣ</u>

```
function exod=tre3lu2(x,y,N,M,xmin,xmax)
```

<u>ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΑΣ tr3lu2 ΕΚΤΕΛΟΥΝΤΑΙ ΟΛΕΣ ΟΙ ΥΠΟΡΟΥΤΙΝΕΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΔΟΜΗΘΕΙ ΣΤΟΝ ΚΩΔΙΚΑ.</u>

```
a1=amat(x,N,M);          ⇦ Καλείται η υπορουτίνα amat

msgbox('The matrix A multiplying the polynomial coefficients. Type
"return" and press ENTER')
disp(a1)                 ⇦ Εξαγωγή του πίνακα A ο οποίος πολλαπλασιάζεται
                            με τους συντελεστές του πολυωνύμου
keyboard


for i=1:N
   xn(i)=1.0;
end


for i=1:M+1
  b(i)=0.0;
  for j=1:N
    b(i)=b(i)+y(j)*xn(j);
    xn(j)=xn(j)*x(j);
  end
end
msgbox('The column b, inhomogeneous term ')
disp(b)                  ⇦ Εξάγεται η στήλη b
keyboard


a=ludcmp(a1,M+1);        ⇦ Καλείται η υπορουτίνα ludcmp
msgbox('The matrix A, LU-decomposed')
```

```
disp(a)                    ⇦ Εξάγεται ο πίνακας LU
keyboard


x1=solv(a,b,M+1);          ⇦  Καλείται η υπορουτίνα solv
msgbox('The solution a, for the polynomial coefficients')
disp(x1)                   ⇦ Εξάγονται οι τιμές x που είναι οι συντελεστές του
                              πολυωνύμου
keyboard



beta=0.0;
for np=1:N
  suma=0.0;
  for jj=1:M
    kk=M-jj+2;
    suma=(suma+x1(kk))*x(np);
  end
  suma=suma+x1(1);
  beta=beta+(y(np)-suma)*(y(np)-suma);
end
beta=beta/(N-M+1);
msgbox('The index "sigma2" is')
disp(beta)                    ⇦Εξάγει το σφάλμα
keyboard


x3=polion(x1,M,xmin,xmax,1);
y3=polion(x1,M,xmin,xmax,2);


exod=plot(x,y,'r*:',x3,y3,'b')       ⇦ Γραφική αναπαράσταση του βέλτιστου
                                        πολυωνύμου
```

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{O}

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης και οι γραφικές παραστάσεις τυχαία επιλεγμένων Διαφορικών Εξισώσεων όπως αυτά εξάγονται από το πρόγραμμα. Εδώ με X_0 , X_{end} , συμβολίζουμε το αρχικό και τελικό σημείο (της ανεξάρτητης μεταβλητής) για την ολοκλήρωση και με X_{min} , X_{max} τα όρια του διαστήματος της λύσης στο οποίο την προσεγγίζουμε με το βέλτιστο πολυώνυμο.

5.1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ: $y'' + y' + 5y = 0$

(ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΜΕ ΤΡΙΒΗ)

Αρχικές συνθήκες:

ΑΡΧΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ	: X_0	= 0
ΤΕΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ	: X_{end}	= 9
1^{H} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y	: $y1(x_0)$	= 1
2^{H} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y	: $y2(x_0)$	= 0
ΒΗΜΑ	: (h)	= 0.1
ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ	: X_{min}	= 1
ΑΝΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ	: X_{max}	= 6

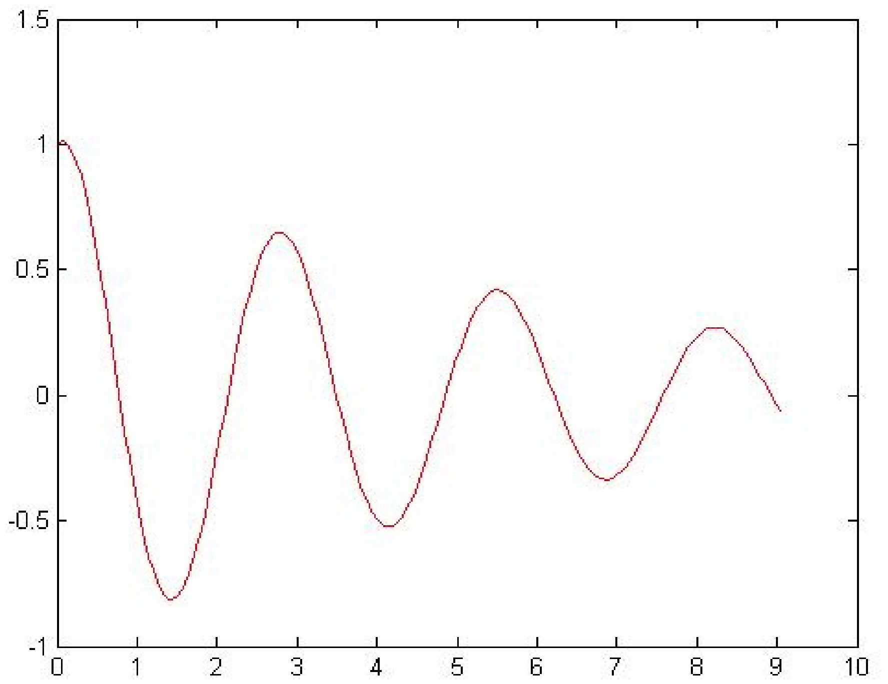
Αποτελέσματα:

In this interval there are contained the following number of points:

Στο δοθέν διάστημα υπάρχουν τα ακόλουθα σημεία:

102

ΓΡΑΦΙΚΗ:



The matrix A multiplying the polynomial coefficients:
Ο πίνακας Α που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου:

1.0e+016 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0054

Columns 9 through 11

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0002	0.0009
0.0002	0.0009	0.0054
0.0009	0.0054	0.0314
0.0054	0.0314	0.1823
0.0314	0.1823	1.0626

The column b, inhomogeneous term:
Η στήλη b του ανομοιογενούς όρου:

1.0e+007 *

Columns 1 through 8

-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0057	0.0339

Columns 9 through 11

0.1988	1.1568	6.6963

The matrix A, L-U decomposed:
Ο πίνακας A, που έχει διασπαστεί κατά L-U:

1.0e+008 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0001	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0006	0.0010	0.0008	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000

0.0031	0.0057	0.0050	0.0026	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000
0.0165	0.0320	0.0304	0.0188	0.0077	0.0020	0.0003	0.0000
0.0897	0.1803	0.1839	0.1270	0.0615	0.0206	0.0046	0.0006
0.4943	1.0209	1.1010	0.8296	0.4554	0.1817	0.0513	0.0097
2.7510	5.8087	6.5530	5.2953	3.2082	1.4633	0.4952	0.1204

Columns 9 through 11

0.0026	0.0141	0.0786
0.0022	0.0127	0.0723
0.0013	0.0075	0.0445
0.0005	0.0032	0.0205
0.0001	0.0010	0.0072
0.0000	0.0002	0.0019
0.0000	0.0000	0.0004
0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000
0.0011	0.0001	0.0000
0.0198	0.0020	0.0001

The solution a, for the polynomial coefficients:

Η λύση a, για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

Columns 1 through 8

9.0188	-36.2853	69.3375	-80.0917	56.3964	-24.4191	6.5937	-1.1092

Columns 9 through 11

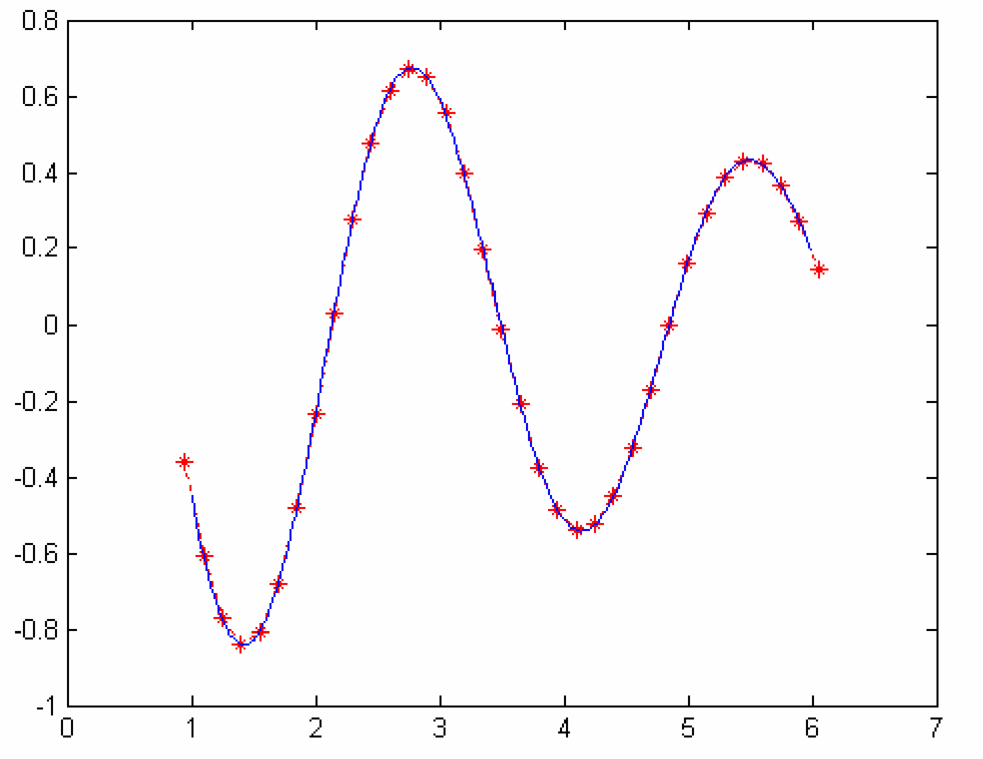
0.1126	-0.0063	0.0001

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 9.0188 - 36.2853\,x + 69.3375\,x^2 - 80.0917\,x^3 + ... + 0.0001\,x^9$$

The index “sigma2” is:

Η τιμή του σφάλματος “sigma2” είναι :

2.6123e-006



5.2 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x} = 0$

Αρχικές συνθήκες:

ΑΡΧΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : χ_0 = 1

ΤΕΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : χ_{end} = 7

1^{Η} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : $y1(x_0)$ = 1

2^{Η} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : $y2(x_0)$ = 0

ΒΗΜΑ : (h) = 0.1

ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ : χ_{min} = 1

ΑΝΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ : χ_{max} = 6

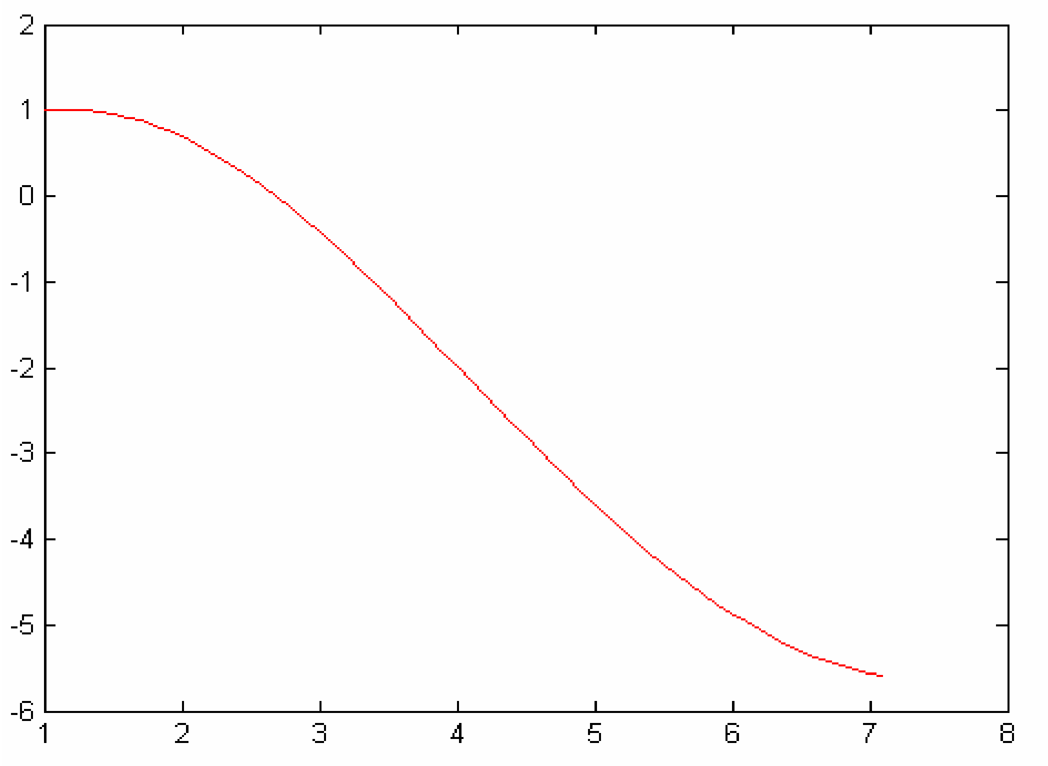
Αποτελέσματα:

In this interval there are contained the following number of points:

Στο δοθέν διάστημα υπάρχουν τα ακόλουθα σημεία:

51

ΓΡΑΦΙΚΗ:



The matrix A multiplying the polynomial coefficients:

Ο πίνακας Α που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου:

1.0e+015 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0065
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0065	0.0381

Columns 9 through 11

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0002	0.0011
0.0002	0.0011	0.0065
0.0011	0.0065	0.0381
0.0065	0.0381	0.2247
0.0381	0.2247	1.3294
0.2247	1.3294	7.8828

The column b, inhomogeneous term:

Η στήλη b του ανομοιογενούς όρου:

1.0e+008 *

Columns 1 through 8

-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0002	-0.0013	-0.0073	-0.0412

Columns 9 through 11

-0.2339	-1.3360	-7.6817

The matrix A, L-U decomposed:

Ο πίνακας A, που έχει διασπαστεί κατά L-U:

1.0e+008 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0003	0.0006	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0018	0.0034	0.0030	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
0.0096	0.0193	0.0188	0.0118	0.0048	0.0013	0.0002	0.0000
0.0535	0.1105	0.1154	0.0808	0.0392	0.0129	0.0027	0.0003
0.3006	0.6375	0.7026	0.5363	0.2942	0.1150	0.0310	0.0054
1.7044	3.6936	4.2543	3.4783	2.1031	0.9391	0.3032	0.0680

Columns 9 through 11

0.0030	0.0167	0.0947
0.0025	0.0146	0.0847
0.0014	0.0084	0.0508
0.0005	0.0035	0.0228
0.0001	0.0011	0.0078
0.0000	0.0003	0.0021
0.0000	0.0000	0.0004
0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000
0.0005	0.0000	0.0000
0.0099	0.0008	0.0000

The solution a, for the polynomial coefficients:

Η λύση a, για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

Columns 1 through 8

0.5392	0.6235	0.0680	-0.3136	0.0975	-0.0162	0.0018	-0.0001

Columns 9 through 11

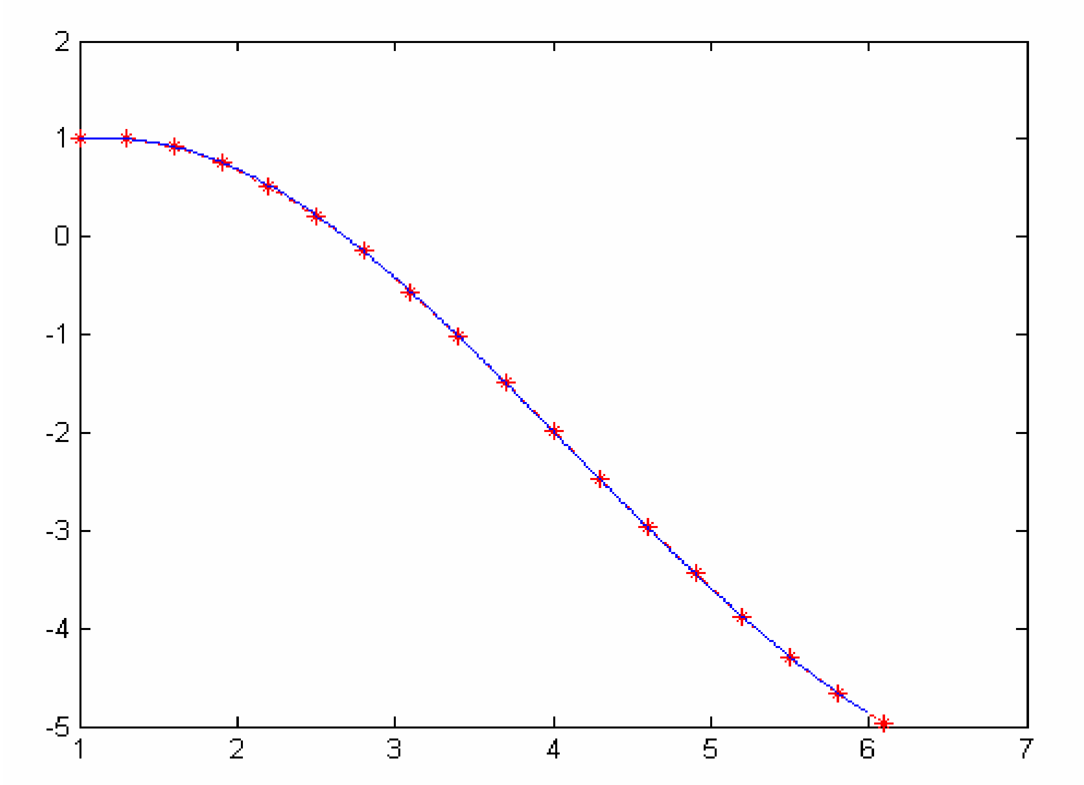
-0.0000	0.0000	-0.0000

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0.5392 + 0.6235x + 0.0680x^2 - 0.3136x^3 + ... - 0.0000x^9$$

The index “sigma2” is:

Η τιμή του σφάλματος “sigma2” είναι :

2.6191e-012



5.3 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ $y'' - \sin(x)y' + \cos(x)y = 0$

Αρχικές συνθήκες:

ΑΡΧΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : x_0 = 0

ΤΕΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : x_{end} = 7

1^{Η} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : $y1(x_0)$ = 1

2^{Η} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : $y2(x_0)$ = 0

ΒΗΜΑ : (h) = 0.1

ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ : χ_{min} = 1

ΑΝΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ : χ_{max} = 6

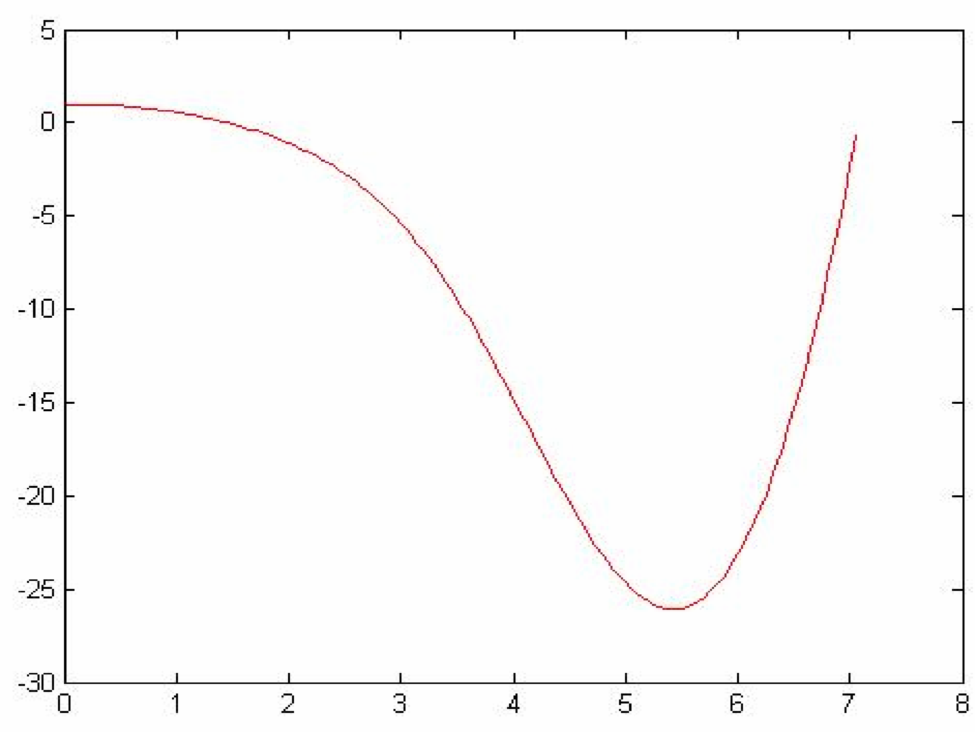
Αποτελέσματα:

In this interval there are contained the following number of points:

Στο δοθέν διάστημα υπάρχουν τα ακόλουθα σημεία:

64

ΓΡΑΦΙΚΗ:



The matrix A multiplying the polynomial coefficients:

Ο πίνακας Α που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου:

1.0e+015 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0081
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0081	0.0464

Columns 9 through 11

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0002	0.0014
0.0002	0.0014	0.0081
0.0014	0.0081	0.0464
0.0081	0.0464	0.2673
0.0464	0.2673	1.5427
0.2673	1.5427	8.9227

The column b, inhomogeneous term:

Η στήλη b του ανομοιογενούς όρου:

1.0e+009 *

Columns 1 through 8

-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0002	-0.0009	-0.0051	-0.0278

Columns 9 through 11

-0.1532	-0.8499	-4.7423

The matrix A, L-U decomposed:

Ο πίνακας Α, που έχει διασπαστεί κατά L-U:

1.0e+008 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0005	0.0007	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0027	0.0042	0.0031	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
0.0144	0.0234	0.0190	0.0120	0.0047	0.0011	0.0002	0.0000
0.0792	0.1319	0.1156	0.0815	0.0373	0.0116	0.0025	0.0003
0.4377	0.7469	0.6945	0.5353	0.2770	0.1022	0.0281	0.0049
2.4382	4.2442	4.1442	3.4303	1.9547	0.8258	0.2725	0.0606

Columns 9 through 11

0.0036	0.0199	0.1108
0.0025	0.0139	0.0791
0.0013	0.0079	0.0473
0.0005	0.0034	0.0217
0.0001	0.0010	0.0074
0.0000	0.0002	0.0020
0.0000	0.0000	0.0004
0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000
0.0005	0.0000	0.0000
0.0089	0.0008	-0.0000

The solution a, for the polynomial coefficients:

Η λύση a, για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

Columns 1 through 8

6.2795	-21.4923	37.7392	-38.5217	24.6137	-10.4979	3.0481	-0.5995

Columns 9 through 11

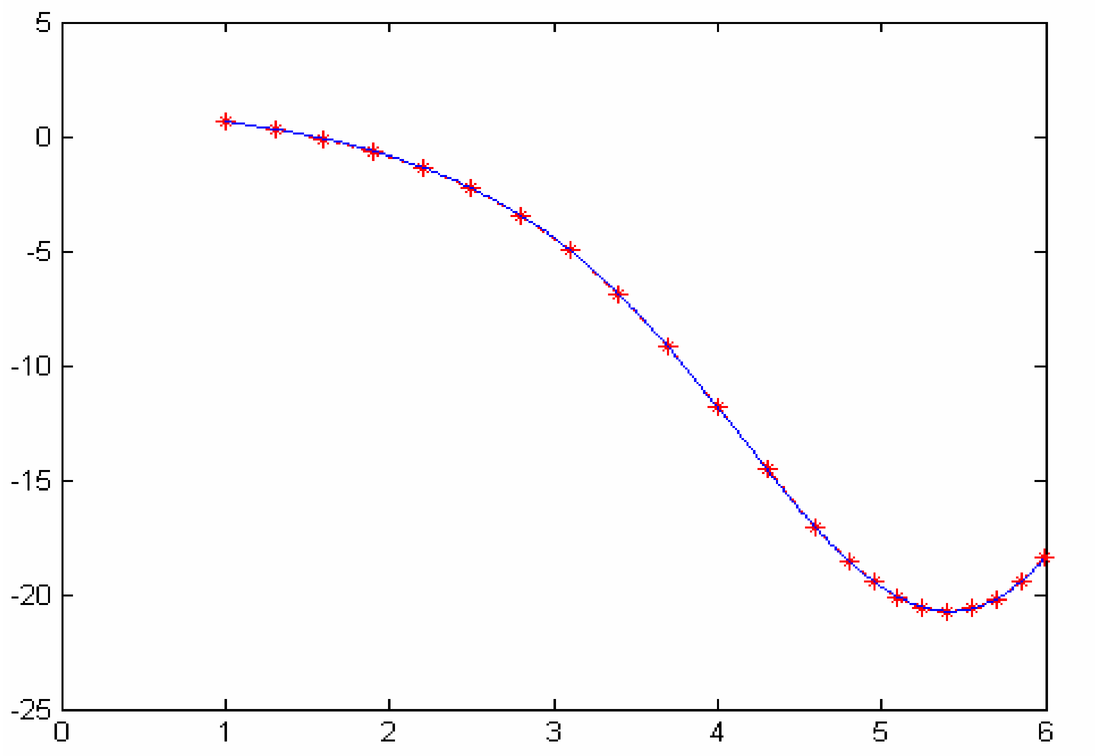
0.0763 -0.0056 0.0002

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 6.2795 - 21.4923\, x + 37.7392\, x^2 - 38.5217\, x^3 + ... + 0.0002\, x^9$$

The index “sigma2” is:

Η τιμή του σφάλματος “sigma2” είναι :

6.5072e-005



5.4 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ $y'' - y' + y - x = 0$

<u>Αρχικές συνθήκες:</u>

ΑΡΧΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : χ_0 = 1

ΤΕΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : χ_{end} = 7

1^{Η} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : $y1(x_0)$ = 0

2^{Η} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : $y2(x_0)$ = 0

ΒΗΜΑ	: (h)	= 0.1
ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ	: χ_{min}	= 1
ΑΝΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ	: χ_{max}	= 6

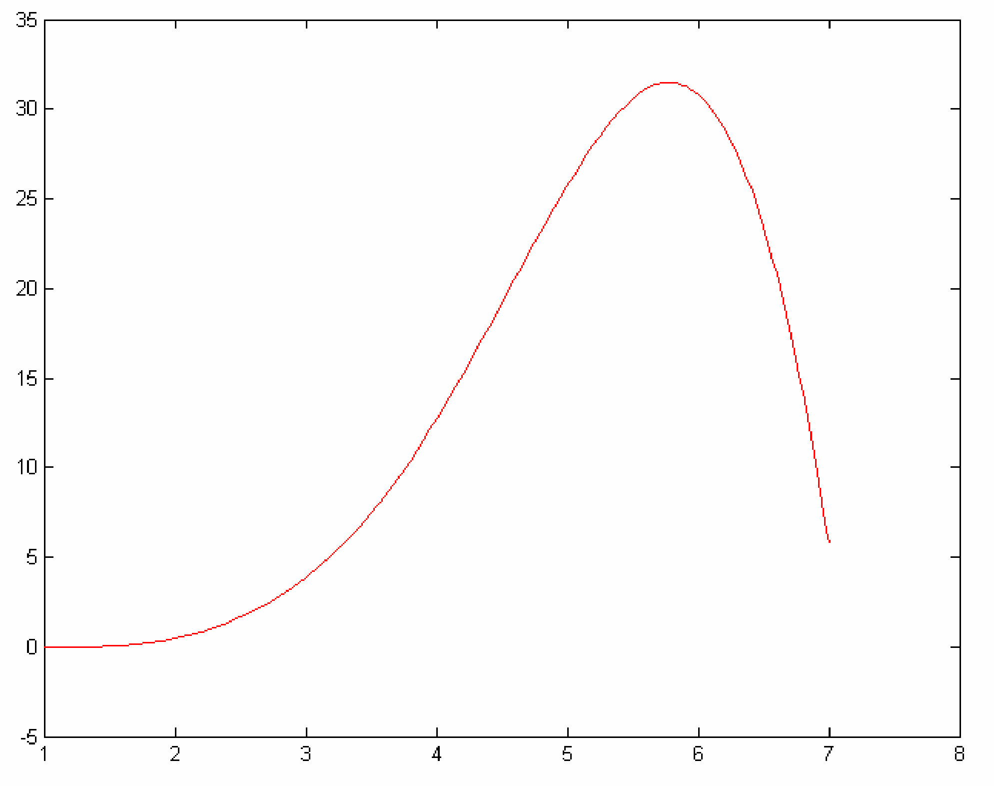
<u>Αποτελέσματα:</u>

In this interval there are contained the following number of points:

Στο δοθέν διάστημα υπάρχουν τα ακόλουθα σημεία:

81

ΓΡΑΦΙΚΗ:



The matrix A multiplying the polynomial coefficients:

Ο πίνακας Α που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου:

1.0e+016 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0075

Columns 9 through 11

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0002	0.0013
0.0002	0.0013	0.0075
0.0013	0.0075	0.0432
0.0075	0.0432	0.2501
0.0432	0.2501	1.4495

The column b, inhomogeneous term:
Η στήλη b του ανομοιογενούς όρου:

1.0e+010 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0063

Columns 9 through 11

0.0355	0.1999	1.1317

The matrix A, L-U decomposed:
Ο πίνακας A, που έχει διασπαστεί κατά L-U:

1.0e+008 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0001	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0007	0.0010	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.0040	0.0054	0.0043	0.0020	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
0.0217	0.0309	0.0268	0.0141	0.0054	0.0014	0.0002	0.0000
0.1203	0.1767	0.1639	0.0959	0.0434	0.0141	0.0029	0.0004
0.6711	1.0112	0.9894	0.6290	0.3232	0.1251	0.0332	0.0059
3.7693	5.7994	5.9233	4.0265	2.2907	1.0137	0.3233	0.0733

Columns 9 through 11

0.0043	0.0240	0.1346
0.0028	0.0159	0.0911
0.0014	0.0086	0.0518
0.0005	0.0034	0.0217
0.0001	0.0011	0.0076
0.0000	0.0002	0.0020
0.0000	0.0000	0.0004
0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000
0.0006	0.0000	0.0000
0.0106	0.0009	0.0000

The solution a, for the polynomial coefficients:

Η λύση a, για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

1.0e+003 *

Columns 1 through 8

0.2333	-0.9294	1.5844	-1.5255	0.9211	-0.3655	0.0968	-0.0170

Columns 9 through 11

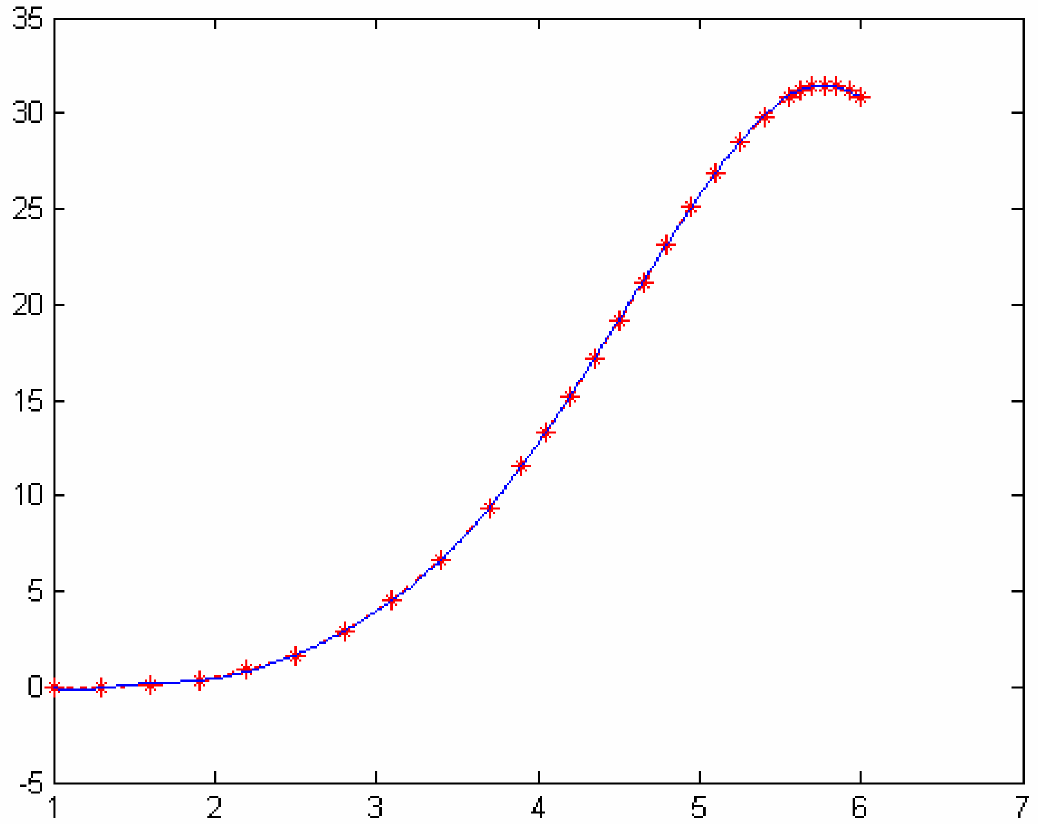
0.0019	-0.0001	0.0000

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 4.8315 - 17.8156x + 28.3214x^2 - 25.4942x^3 + ... + 0.0004x^9$$

The index "sigma2" is:

Η τιμή του σφάλματος "sigma2" είναι :

0.0013



5.5 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ $y'' - (\frac{\sin x}{x}) y = 0$

<u>Αρχικές συνθήκες:</u>

ΑΡΧΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : x_0 = 1

ΤΕΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : x_{end} = 7

1^{H} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : y1(x_0) =1

2^{H} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : y2(x_0) =0

ΒΗΜΑ : (h) = 0.1

ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ : χ_{min} = 1

ΑΝΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ : χ_{max} = 6

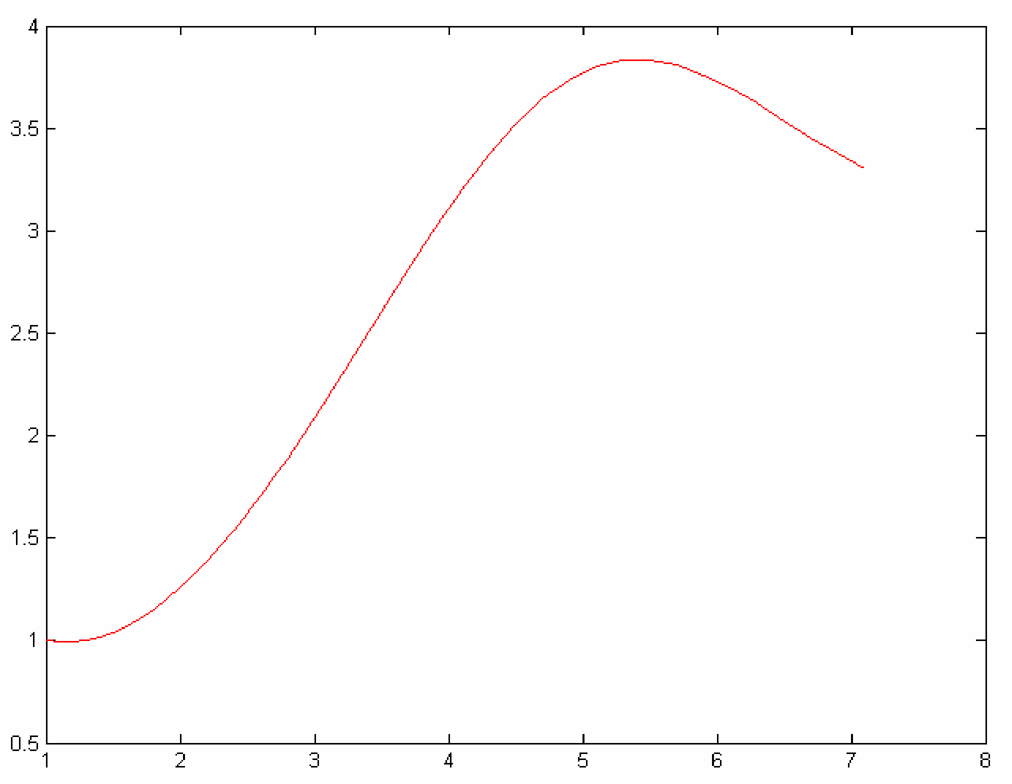
Αποτελέσματα:

In this interval there are contained the following number of points:

Στο δοθέν διάστημα υπάρχουν τα ακόλουθα σημεία:

36

ΓΡΑΦΙΚΗ:



The matrix A multiplying the polynomial coefficients.:

Ο πίνακας Α που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου:

1.0e+015 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0045
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0045	0.0269

Columns 9 through 11

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0001	0.0008
0.0001	0.0008	0.0045
0.0008	0.0045	0.0269
0.0045	0.0269	0.1609
0.0269	0.1609	0.9650
0.1609	0.9650	5.7987

The column b, inhomogeneous term:
Η στήλη b του ανομοιογενούς όρου:

1.0e+008 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0038	0.0213

Columns 9 through 11

0.1206	0.6911	3.9948

The matrix A, L-U decomposed:

Ο πίνακας Α, που έχει διασπαστεί κατά L-U:

1.0e+008 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0002	0.0004	0.0003	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0010	0.0025	0.0022	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
0.0058	0.0144	0.0138	0.0092	0.0035	0.0009	0.0001	0.0000
0.0325	0.0837	0.0852	0.0635	0.0284	0.0092	0.0016	0.0002
0.1860	0.4888	0.5230	0.4226	0.2123	0.0809	0.0179	0.0027
1.0741	2.8706	3.1936	2.7513	1.5142	0.6540	0.1723	0.0325

Columns 9 through 11

0.0025	0.0143	0.0826
0.0026	0.0151	0.0887
0.0013	0.0083	0.0505
0.0005	0.0035	0.0227
0.0001	0.0011	0.0076
0.0000	0.0002	0.0019
0.0000	0.0000	0.0004
0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000
0.0002	0.0000	0.0000
0.0031	0.0002	0.0000

The solution a, for the polynomial coefficients:

Η λύση a, για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

Columns 1 through 8

2.1409	-2.9615	3.0027	-1.5616	0.3308	0.1319	-0.1129	0.0349

Columns 9 through 11

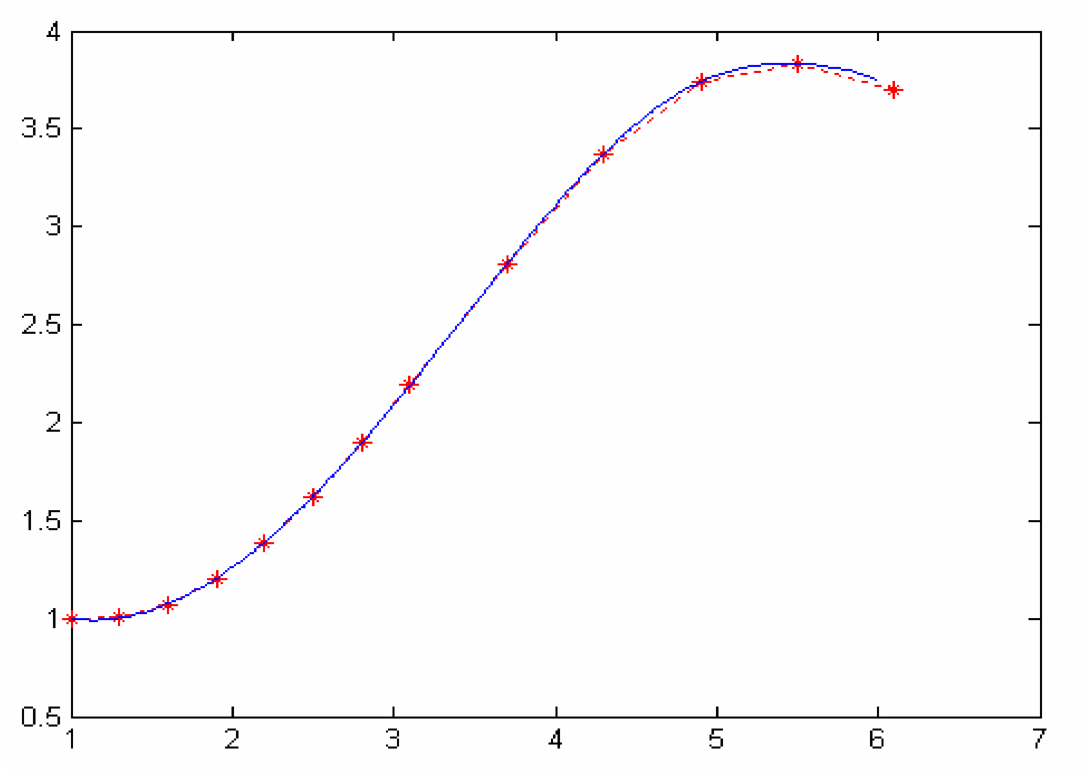
-0.0057   0.0005   -0.0000

$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 2.1409 - 2.9615\,x + 3.0027\,x^2 - 1.5616\,x^3 + ... - 0.0000\,x^9$

The index “sigma2” is:

Η τιμή του σφάλματος “sigma2” είναι :

4.5491e-008



5.6 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ $y'' - (1 + 0.01x)y + (1 + 0.01x)y = 0$

<u>**Αρχικές συνθήκες:**</u>

ΑΡΧΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : χ_0 = 0

ΤΕΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : χ_{end} = 7

1^{Η} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : $y1(x_0)$ = 1

2^{Η} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : $y2(x_0)$ = 0

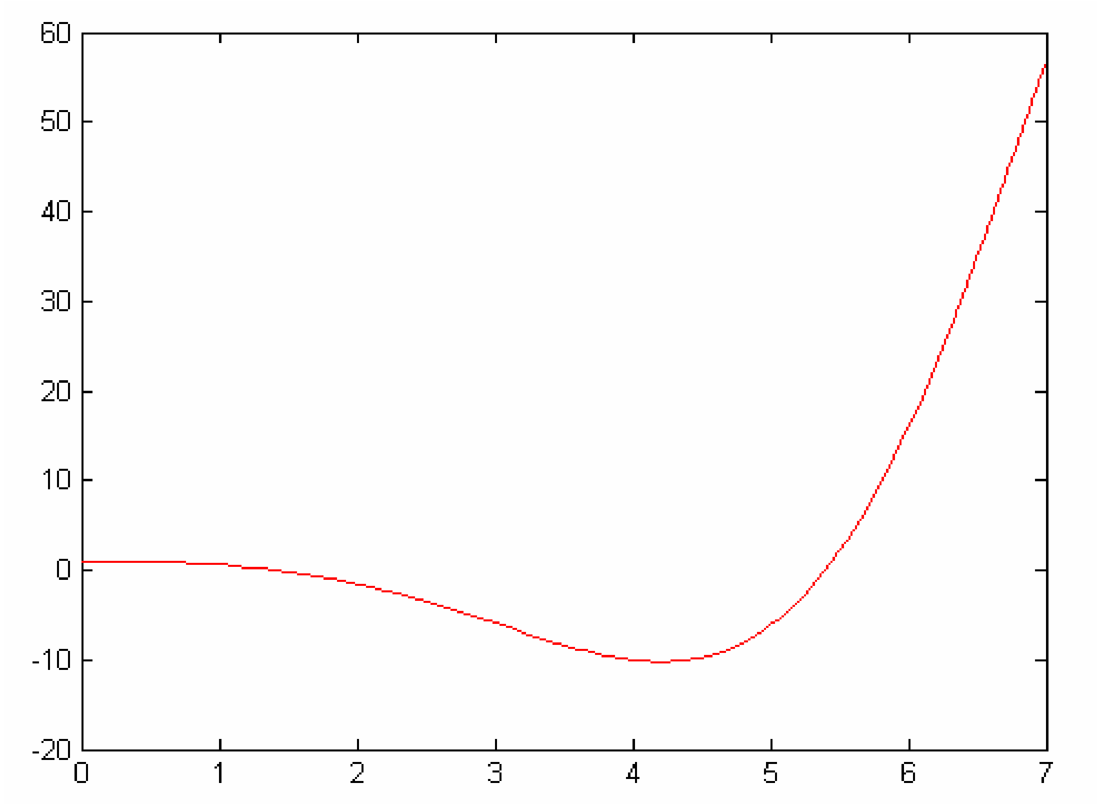
ΒΗΜΑ	:	(h)	= 0.1
ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ	:	χ_{min}	= 1
ΑΝΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ	:	χ_{max}	= 6

Αποτελέσματα:

In this interval there are contained the following number of points:
Στο δοθέν διάστημα υπάρχουν τα ακόλουθα σημεία:

80

ΓΡΑΦΙΚΗ:



The matrix A multiplying the polynomial coefficients.:
Ο πίνακας Α που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου:

1.0e+015 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0071
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0071	0.0402

Columns 9 through 11

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0002	0.0012
0.0002	0.0012	0.0071
0.0012	0.0071	0.0402
0.0071	0.0402	0.2294
0.0402	0.2294	1.3115
0.2294	1.3115	7.5176

The column b, inhomogeneous term:

Η στήλη b του ανομοιογενούς όρου:

1.0e+009 *

Columns 1 through 8

-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0004	0.0036

Columns 9 through 11

0.0253	0.1678	1.0715

The matrix A, L-U decomposed:
Ο πίνακας Α, που έχει διασπαστεί κατά L-U:

1.0e+008 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0005	0.0007	0.0006	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0027	0.0039	0.0035	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
0.0144	0.0218	0.0216	0.0119	0.0049	0.0012	0.0002	0.0000
0.0773	0.1220	0.1297	0.0798	0.0386	0.0118	0.0025	0.0003
0.4190	0.6836	0.7685	0.5180	0.2834	0.1035	0.0278	0.0048
2.2944	3.8459	4.5230	3.2804	1.9797	0.8288	0.2664	0.0590

Columns 9 through 11

0.0029	0.0155	0.0850
0.0023	0.0128	0.0723
0.0012	0.0074	0.0436
0.0005	0.0032	0.0202
0.0001	0.0010	0.0070
0.0000	0.0002	0.0019
0.0000	0.0000	0.0004
0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000
0.0005	0.0000	0.0000
0.0086	0.0008	0.0000

The solution a, for the polynomial coefficients:

Η λύση a, για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

Columns 1 through 8

25.7353	-100.8479	176.1929	-174.4411	107.7321	-43.6771	11.7897	-2.0984

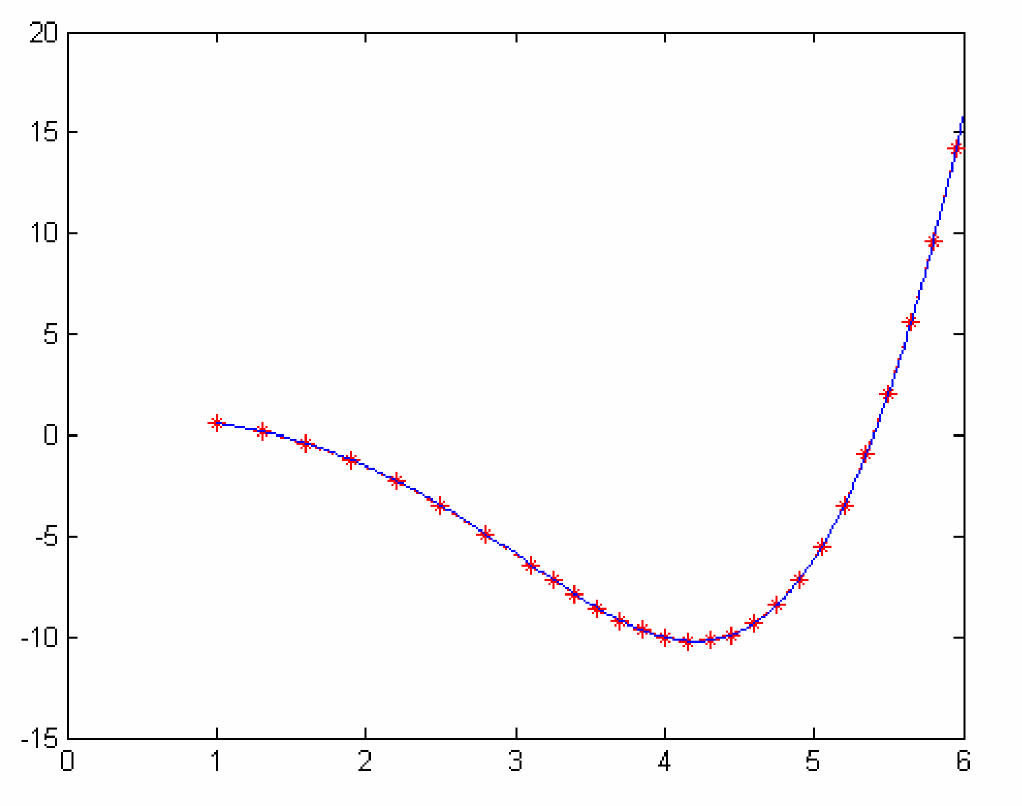
Columns 9 through 11

0.2367 -0.0153 0.0004

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 25.7353 - 100.8479x + 176.1929x^2 - 174.4411x^3 + ... + 0.0004x^9$$

The index "sigma2" is:
Η τιμή του σφάλματος "sigma2" είναι :

1.2783e-005



5.7 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ Bessel: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

(ΤΑΞΕΩΣ n=0)

Αρχικές συνθήκες:

ΑΡΧΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : χ_0 = 0.01
ΤΕΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : χ_{end} = 10

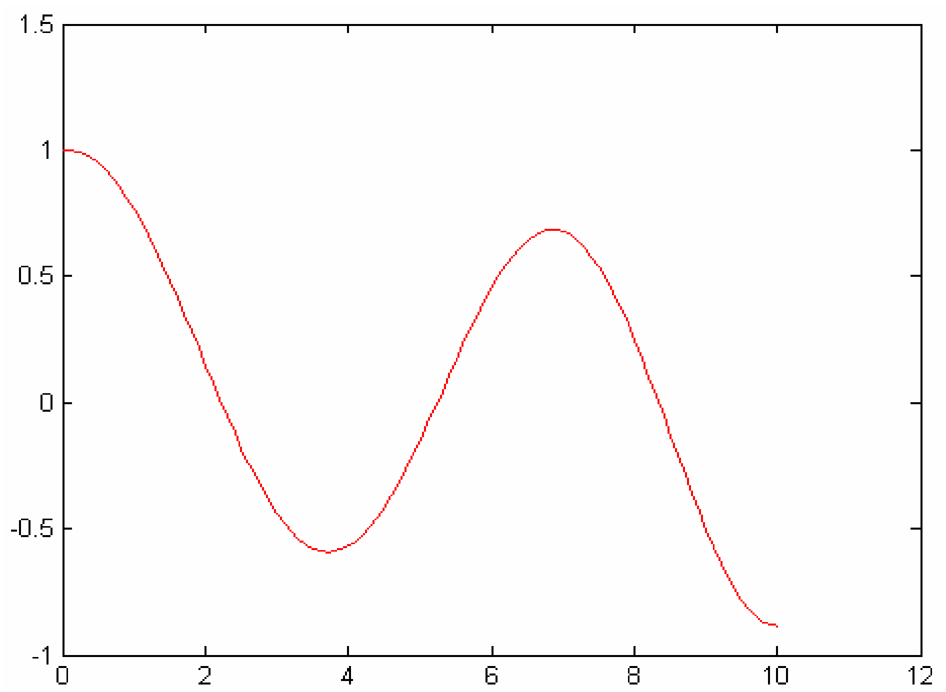
1^{H} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y	:	$y(x0) = 1.0$	
2^{H} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y	:	$y'(x0) = 0.0$	
ΒΗΜΑ	:	(h)	= 0.01
ΑΚΡΙΒΕΙΑ	:	(tol)	= 0.01
ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	:	MM	= 10
ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ	:	xmin	= 1.0
ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ	:	xmax	= 5.0
ΒΗΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	:	jstep	= 3

<u>Αποτελέσματα:</u>

In this interval there are contained the following number of points:
Στο δοθέν διάστημα υπάρχουν τα ακόλουθα σημεία:

41

ΓΡΑΦΙΚΗ:



The matrix A multiplying the polynomial coefficients:

Ο πίνακας A που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου:

1.0e+013 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0027
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0027	0.0125
0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0027	0.0125	0.0584

Columns 9 through 11

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0001	0.0006
0.0001	0.0006	0.0027
0.0006	0.0027	0.0125
0.0027	0.0125	0.0584
0.0125	0.0584	0.2727
0.0584	0.2727	1.2777
0.2727	1.2777	5.9992

The column b, inhomogeneous term:

Η στήλη b του ανομοιογενούς όρου:

1.0e+006 *

Columns 1 through 8

-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0002	-0.0008	-0.0034	-0.0142	-0.0600

Columns 9 through 11

-0.2578	-1.1198	-4.9153

The matrix A, L-U decomposed:

Ο πίνακας A, που έχει διασπαστεί κατά L-U:

1.0e+007 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0011
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0011
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007
0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
0.0002	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0008	0.0011	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0035	0.0051	0.0035	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
0.0151	0.0233	0.0172	0.0081	0.0024	0.0005	0.0000	0.0000
0.0666	0.1059	0.0842	0.0443	0.0158	0.0037	0.0005	0.0000
0.2963	0.4846	0.4072	0.2335	0.0944	0.0265	0.0050	0.0006
1.3320	2.2263	1.9562	1.2026	0.5366	0.1726	0.0389	0.0058

Columns 9 through 11

0.0048	0.0212	0.0951
0.0052	0.0237	0.1087
0.0036	0.0173	0.0829
0.0017	0.0091	0.0471
0.0006	0.0036	0.0204
0.0001	0.0010	0.0068
0.0000	0.0002	0.0017
0.0000	0.0000	0.0003
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0005	0.0000	-0.0000

The solution a, for the polynomial coefficients:

Η λύση a, για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

Columns 1 through 8

0.9992 0.0338 -0.2793 0.0091 -0.0015 0.0088 -0.0027 0.0004

Columns 9 through 11

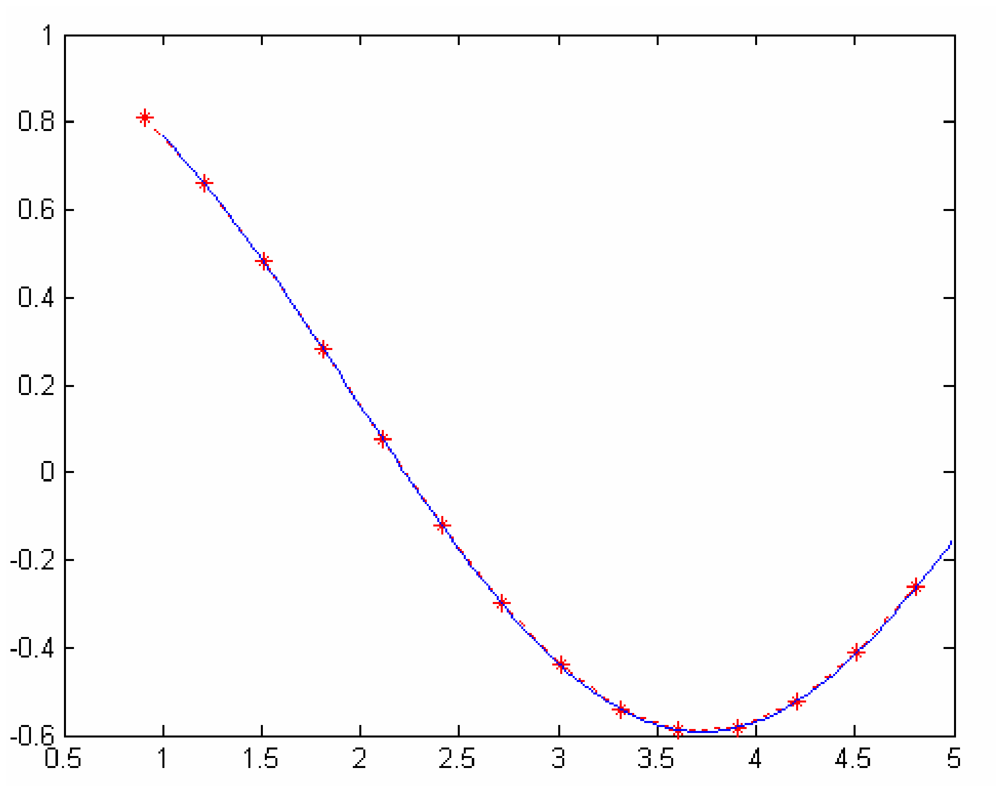
-0.0001 0.0000 -0.0000

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 0.9992 + 0.0338\,x - 0.2793\,x^2 + 0.0091\,x^3 + ... - 0.0000\,x^9$$

The index “sigma2” is:

Η τιμή του σφάλματος “sigma2” είναι :

4.6642e-014



5.8 ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ Bessel: $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right)y = 0$

(ΤΑΞΕΩΣ n=1)

<u>Αρχικές συνθήκες:</u>

ΑΡΧΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ	:	x_0	=	0.05
ΤΕΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ	:	x_{end}	=	10
1^{H} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y	:	$y(x0)$	=	0.0
2^{H} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y	:	$y'(x0)$	=	0.5
ΒΗΜΑ	:	(h)	=	0.01
ΑΚΡΙΒΕΙΑ	:	(tol)	=	0.001
ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	:	MM	=	10
ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ	:	xmin	=	1.0
ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ	:	xmax	=	5.0
ΒΗΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΑΠΟ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ ΣΤΟ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	:	jstep	=	3

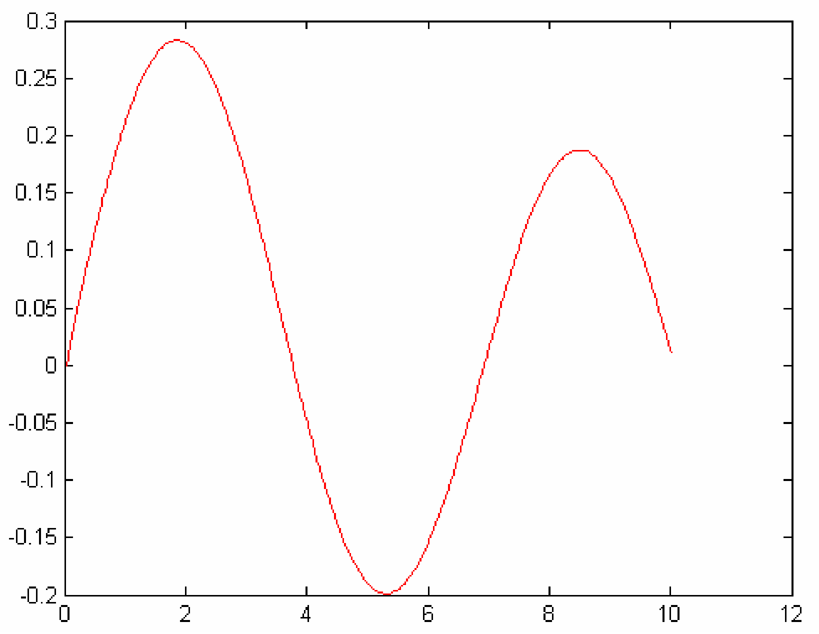
<u>Αποτελέσματα:</u>

In this interval there are contained the following number of points:

Στο δοθέν διάστημα υπάρχουν τα ακόλουθα σημεία:

101

ΓΡΑΦΙΚΗ:



The matrix A multiplying the polynomial coefficients:

Ο πίνακας A που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου:

1.0e+014 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0037
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0037	0.0172

Columns 9 through 11

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0002	0.0008
0.0002	0.0008	0.0037
0.0008	0.0037	0.0172
0.0037	0.0172	0.0814
0.0172	0.0814	0.3860
0.0814	0.3860	1.8343

The column b, inhomogeneous term:

Η στήλη b του ανομοιογενούς όρου:

1.0e+006 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0003	-0.0019	-0.0095	-0.0464

Columns 9 through 11

-0.2228	-1.0623	-5.0477

The matrix A, L-U decomposed:
Ο πίνακας A, που έχει διασπαστεί κατά L-U:

1.0e+007 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0013
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008
0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004
0.0005	0.0006	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0022	0.0029	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
0.0092	0.0130	0.0085	0.0033	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
0.0403	0.0598	0.0427	0.0195	0.0059	0.0011	0.0001	0.0000
0.1789	0.2753	0.2119	0.1089	0.0389	0.0095	0.0015	0.0001
0.8040	1.2732	1.0394	0.5857	0.2379	0.0695	0.0143	0.0019
3.6489	5.9161	5.0653	3.0723	1.3830	0.4643	0.1147	0.0202

Columns 9 through 11

0.0053	0.0236	0.1073
0.0058	0.0270	0.1255
0.0041	0.0199	0.0972
0.0020	0.0106	0.0555
0.0007	0.0041	0.0240
0.0002	0.0012	0.0078
0.0000	0.0002	0.0019
0.0000	0.0000	0.0003
0.0000	0.0000	0.0000
0.0002	0.0000	0.0000

0.0024   0.0002   0.0000

The solution a, for the polynomial coefficients:
Η λύση a, για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

Columns 1 through 8

-0.0110   0.2707   -0.0466   0.0111   -0.0200   0.0073   -0.0013   0.0002

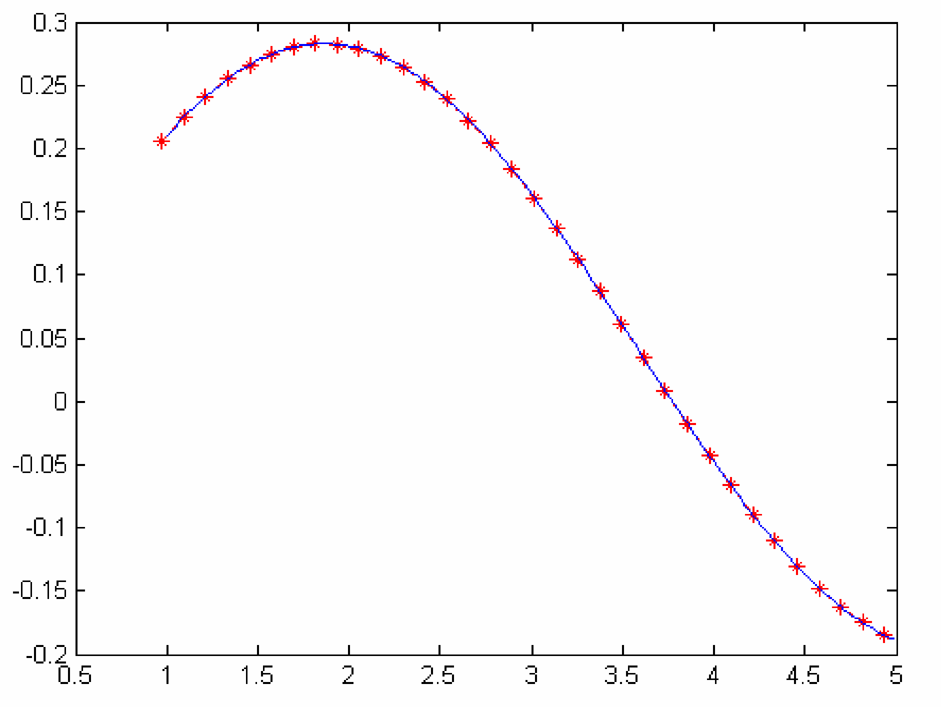
Columns 9 through 11

-0.0000   0.0000   -0.0000

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = -0.0010 + 0.2707\,x - 0.0466\,x^2 + 0.0111\,x^3 - .... - 0.0000\,x^9$$

The index "sigma2" is:
Η τιμή του σφάλματος "sigma2" είναι :

9.7431e-014



5.9 ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ : $\frac{dy(1)}{dx} = a * y(1) - b * y(1) * y(2)$

$$\frac{dy(2)}{dx} = -c * y(2) + d * y(1) * y(2)$$

Έστω x(t) το πλήθος των λαγών σε ένα νησί με πολύ πρασινάδα, ώστε να μπορούν να τρέφονται άνετα και να πολλαπλασιάζονται και y(2) το πλήθος των αλεπούδων που επίσης ευημερούν όσο υπάρχουν λαγοί.

Το βιολογικό αυτό φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί από το (2Χ2) μη γραμμικό σύστημα Δ.Ε. γνωστό και ως «πρόβλημα των ανταγωνιστικών πληθυσμών» που δίνεται από το παραπάνω σύστημα

$$\frac{dx(t)}{dt} = a * x - b * x * y$$ x(t)= «θύμα»

$$\frac{dy(t)}{dt} = -c * x + d * x * y$$ y(t)= «θύτης»

, όπου α, b, c, d >0 είναι σταθερές. Για να πετύχει κανείς ταλαντούμενη (διακυμαινόμενη) συμπεριφορά στο χρόνο, (λόγω της ισχυρής μη-γραμμικότητας του προβλήματος) πρέπει να κάνει (λόγω και της υψηλής ευαισθησίας των λύσεων από τις παραμέτρους a,b,c,d και τις αρχικές συνθήκες $x_0=x(t=t_0)$, $y_0=y(t=t_0)$) προσεκτική επιλογή των σταθερών α, b, c, d και των αρχικών συνθηκών!

Η σταθερά (α) είναι ανάλογη του ρυθμού με το οποίο ο πληθυσμός του θύματος αυξάνει (ευημερεί) λόγω παρουσίας τροφής! Η σταθερά (b) είναι ανάλογη του ρυθμού με τον οποίο ο πληθυσμός του θύματος μειώνεται λόγω της παρουσίας του θύτη. Η σταθερά (c) είναι ανάλογη του ρυθμού που ο πληθυσμός του θύτη μειώνεται λόγω του ανταγωνισμού στην εύρεση τροφής, μεταξύ των μελών του. Τέλος η σταθερά (d) είναι ανάλογη του ρυθμού με τον οποίο ο πληθυσμός του θύτη αυξάνει (ευημερεί) λόγω της παρουσίας των θυμάτων.

<u>Αρχικές συνθήκες:</u>

ΕΠΙΛΟΓΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ : m = 1 , χ(t) =y(1)= "θύμα"

ΣΤΑΘΕΡΑ : $a = 0.6$

ΣΤΑΘΕΡΑ : $b = 0.1$

ΣΤΑΘΕΡΑ : $c = 0.05$

ΣΤΑΘΕΡΑ : $d = 0.013$

ΑΡΧΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : $x_0 = 0.0$

ΤΕΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ : $x_{end} = 55.0$

1^{H} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : $y(x0) = 10.0$ (λαγοί)

2^{H} ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y : $y'(x0) = 4.0$ (αλεπούδες)

ΒΗΜΑ : (h) = 0.05

ΑΚΡΙΒΕΙΑ : (tol) = 0.01

ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ : MM = 10

ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ : xmin = 10.0

ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ : xmax = 20.0

ΒΗΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ : jstep = 3

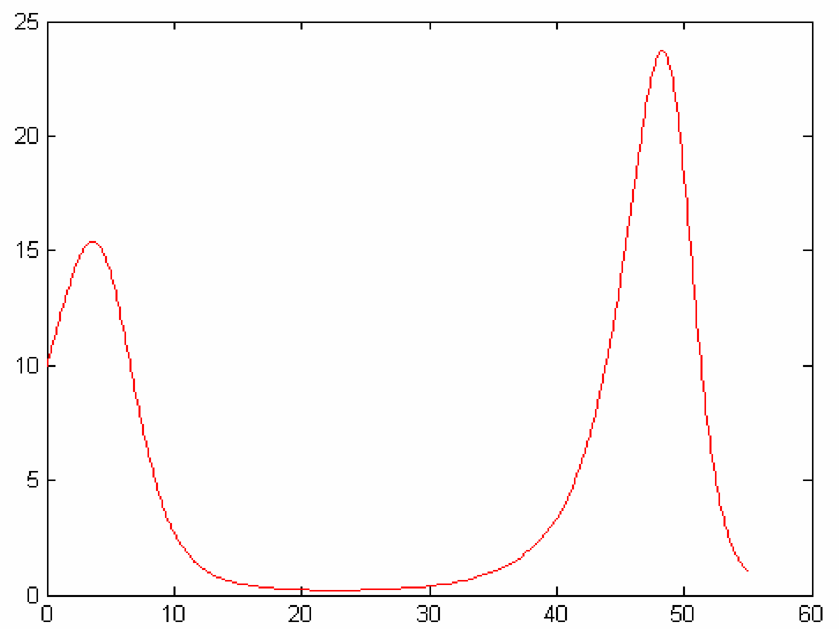
<u>Αποτελέσματα:</u>

In this interval there are contained the following number of points:

Στο δοθέν διάστημα υπάρχουν τα ακόλουθα σημεία:

65

ΓΡΑΦΙΚΗ:



The matrix A multiplying the polynomial coefficients:

Ο πίνακας A που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου:

1.0e+025 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0015

Columns 9 through 11

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0001	0.0015
0.0001	0.0015	0.0277
0.0015	0.0277	0.5250
0.0277	0.5250	9.9785

The column b, inhomogeneous term:
Η στήλη b του ανομοιογενούς όρου:

1.0e+012 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0017

Columns 9 through 11

0.0264	0.4213	6.9204

The matrix A, L-U decomposed:

Ο πίνακας A, που έχει διασπαστεί κατά L-U:

1.0e+014 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0001	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0007	0.0025	0.0040	0.0033	0.0015	0.0005	0.0001	0.0000
0.0117	0.0471	0.0828	0.0783	0.0414	0.0160	0.0036	0.0005
0.2061	0.8818	1.6785	1.7637	1.0631	0.4867	0.1354	0.0225

Columns 9 through 11

0.0000	0.0005	0.0094
0.0000	0.0003	0.0059
0.0000	0.0001	0.0015
0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0002	-0.0002	0.0000
0.0116	-0.0099	0.3146

The solution a, for the polynomial coefficients:

Η λύση a, για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

Columns 1 through 8

191.4200 -76.5388 13.9087 -1.4414 0.0892 -0.0034 0.0001 -0.0000

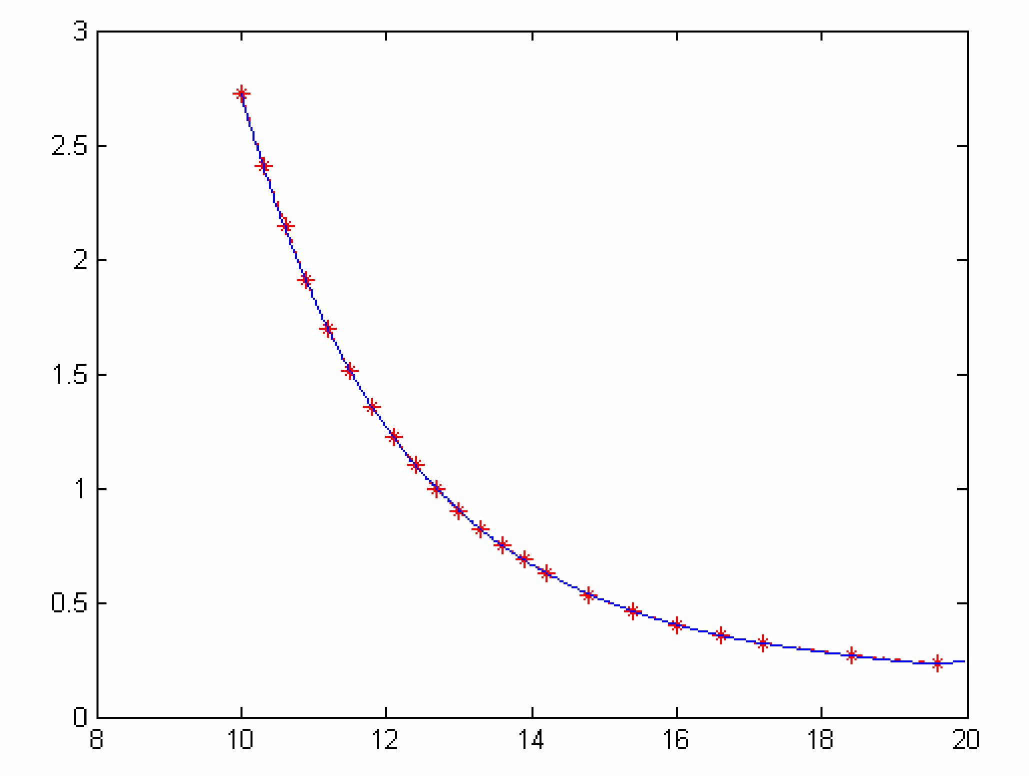
Columns 9 through 11

0.0000 -0.0000 0.0000

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 191.4200 - 76.5388\,x + 13.9087\,x^2 - 1.4414\,x^3 + ... + 0.0000\,x^9$$

The index “sigma2” is:
Η τιμή του σφάλματος “sigma2” είναι :

1.5087e-007



5.10 ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ : $\frac{dy(1)}{dx} = a * y(1) - b * y(1) * y(2)$

$$\frac{dy(2)}{dx} = -c * y(2) + d * y(1) * y(2)$$

<u>Αρχικές συνθήκες:</u>

ΕΠΙΛΟΓΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ	: m = 2 ,	y(t) = y(2) = "θύτης"	
ΣΤΑΘΕΡΑ	: $a = 0.6$		
ΣΤΑΘΕΡΑ	: $b = 0.1$		
ΣΤΑΘΕΡΑ	: $c = 0.05$		
ΣΤΑΘΕΡΑ	: $d = 0.013$		
ΑΡΧΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ	: x_0	= 0.0	
ΤΕΛΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ	: x_{end}	= 55,0	
$1^{Η}$ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y	: $y(x0) = 10.0$		(λαγοί)
$2^{Η}$ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ y	: $y'(x0) = 4.0$		(αλεπούδες)
ΒΗΜΑ	: (h)	= 0.05	
ΑΚΡΙΒΕΙΑ	: (tol)	= 0.01	
ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ	: MM	= 10	
ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ	: xmin	= 10.0	
ΜΕΓΙΣΤΗ ΤΙΜΗ	: xmax	= 20.0	
ΒΗΜΑ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΣΗΜΕΙΩΝ	: jstep	= 3	

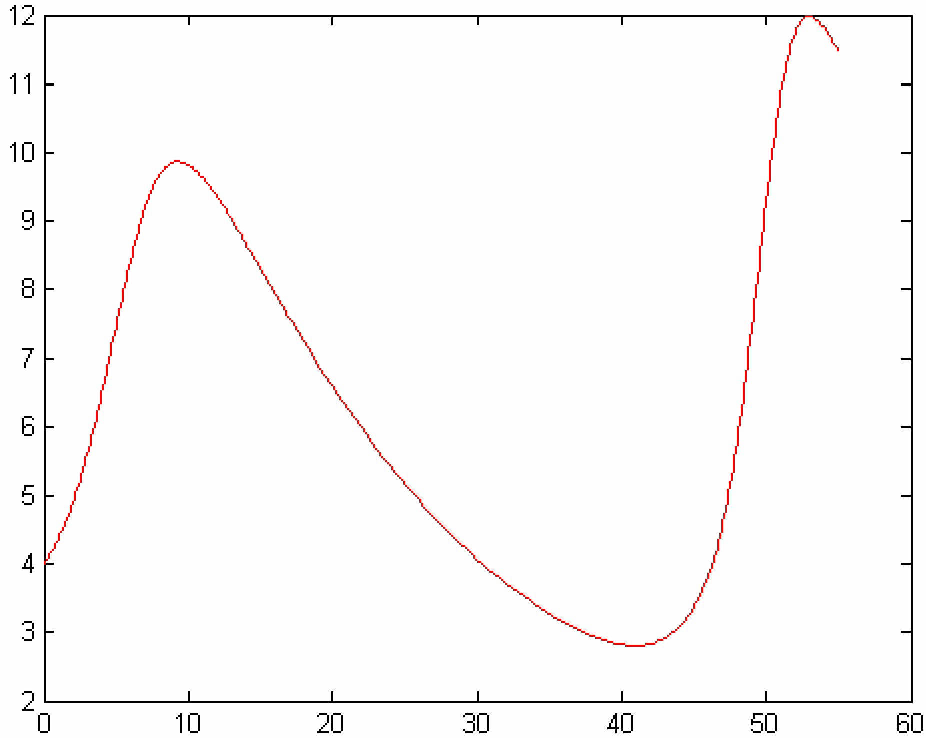
<u>Αποτελέσματα:</u>

In this interval there are contained the following number of points:

Στο δοθέν διάστημα υπάρχουν τα ακόλουθα σημεία:

65

ΓΡΑΦΙΚΗ:



The matrix A multiplying the polynomial coefficients:

Ο πίνακας Α που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου:

1.0e+025 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0015

Columns 9 through 11

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0001	0.0015
0.0001	0.0015	0.0277
0.0015	0.0277	0.5250
0.0277	0.5250	9.9785

The column b, inhomogeneous term:

Η στήλη b του ανομοιογενούς όρου:

1.0e+014 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003

Columns 9 through 11

0.0050	0.0863	1.5050

The matrix A, L-U decomposed:

Ο πίνακας Α, που έχει διασπαστεί κατά L-U:

1.0e+014 *

Columns 1 through 8

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

0.0000	0.0001	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0007	0.0025	0.0040	0.0033	0.0015	0.0005	0.0001	0.0000
0.0117	0.0471	0.0828	0.0783	0.0414	0.0160	0.0036	0.0005
0.2061	0.8818	1.6785	1.7637	1.0631	0.4867	0.1354	0.0225

Columns 9 through 11

0.0000	0.0005	0.0094
0.0000	0.0003	0.0059
0.0000	0.0001	0.0015
0.0000	0.0000	0.0002
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0002	-0.0002	0.0000
0.0116	-0.0099	0.3146

The solution a, for the polynomial coefficients:
Η λύση a, για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

Columns 1 through 8

32.5509	-17.7356	4.7932	-0.6212	0.0419	-0.0015	0.0000	-0.0000

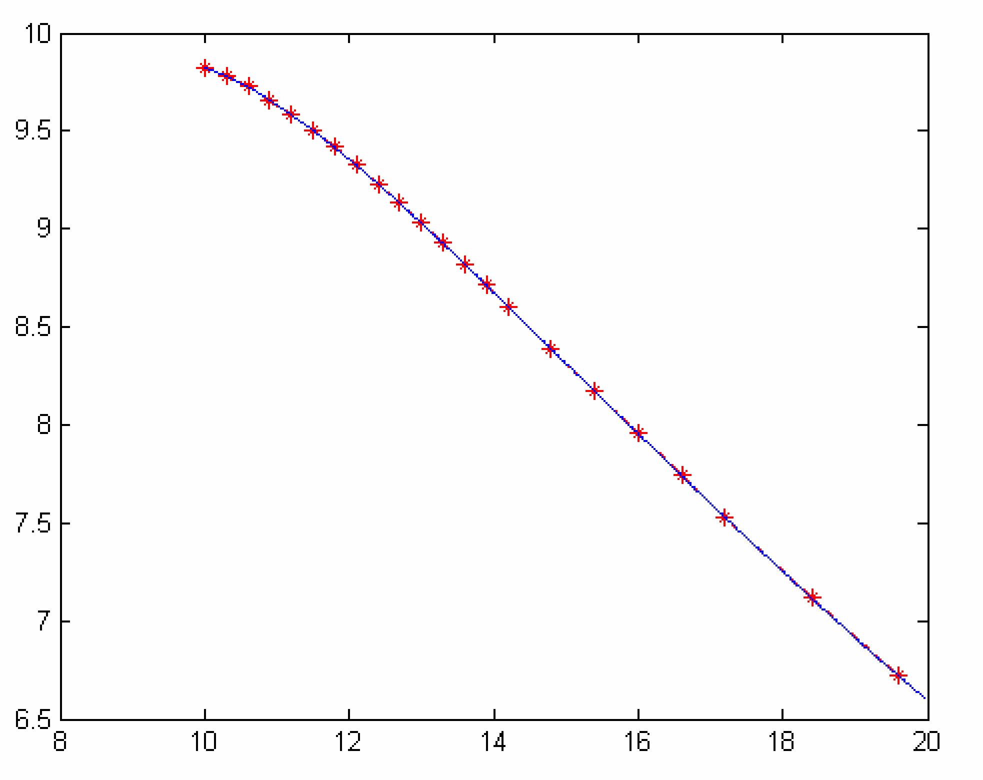
Columns 9 through 11

0.0000	-0.0000	0.0000

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = 32.5509 - 17.7356\,x + 4.7932\,x^2 - 0.6212\,x^3 + ... + 0.0000\,x^9$$

The index “sigma2” is:
Η τιμή του σφάλματος “sigma2” είναι :

7.7091e-009


10
9.5
9
8.5
8
7.5
7
6.5
8
10
12
14
16
18
20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{o}

ΕΠΙΛΟΓΟΣ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

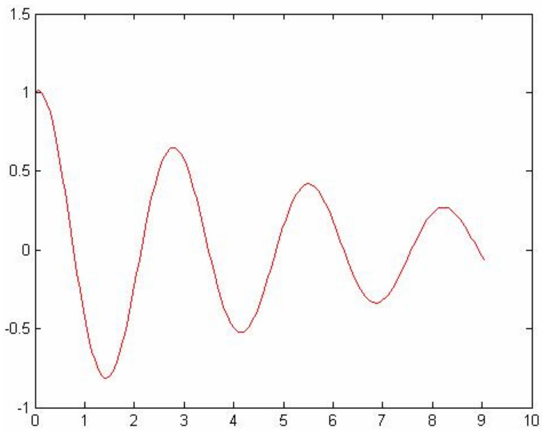
Στην παρούσα πτυχιακή εργασία, αντικείμενο της μελέτης μας ήταν η επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων ή Συστήματος Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων και η προσέγγιση της λύσης τους με το βέλτιστο πολυώνυμο, το οποίο και αναπαραστήσαμε γραφικά.

Για την επίλυση των Σ.Δ.Ε. χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό MATLAB, στο οποίο υλοποιήθηκαν οι αριθμητικές μέθοδοι Runge Kutta και Runge Kutta-Fehlberg. Στην εξαγωγή του βέλτιστου πολυωνύμου απαραίτητη στάθηκε η χρήση της μεθόδου L-U decomposition.

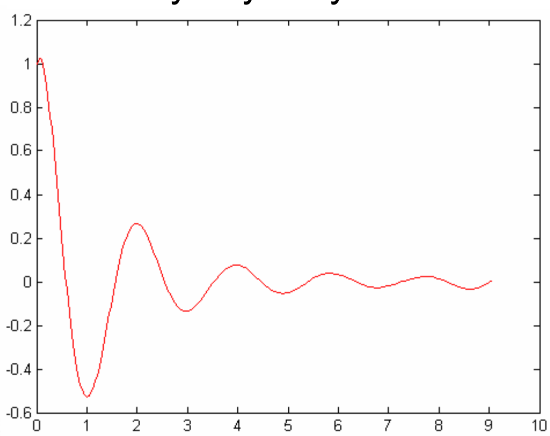
Μέσα από εκτενή μελέτη της συμπεριφοράς των Διαφορικών Εξισώσεων σε συνάρτηση με κάποιο δεδομένο παράγοντα, διαφορετικό σε κάθε περίπτωση (χρόνος, βήμα, πληθυσμός μεταβλητής κ.α.) , οδηγηθήκαμε σε ασφαλή συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα παρουσιάζονται γραφικά για την πληρέστερη κατανόηση τους.

Α) Γραφική απεικόνιση του αρμονικού ταλαντωτή με τριβή για διαφορετικές τιμές συντελεστών:

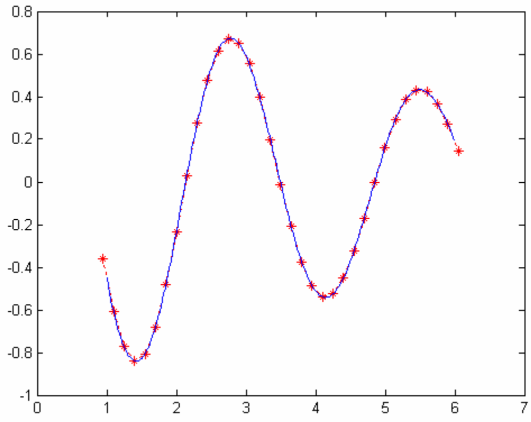
$y'' + y' + 5y = 0$

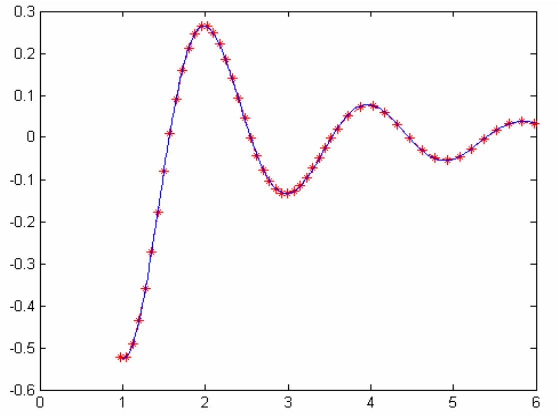


$y'' + 2y' + 10y = 0$



$y''+y'+5y=0$ $\qquad$ $y''+2y'+10y=0$





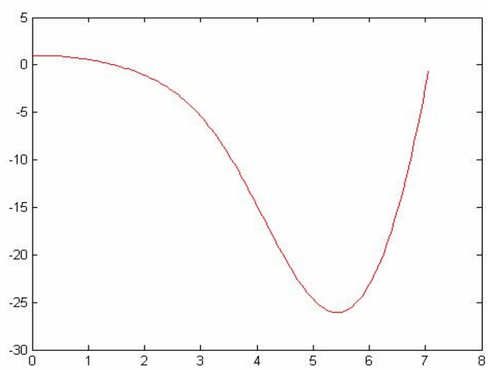
Εμφανής είναι η διαφορά στις γραφικές παραστάσεις καθώς παρατηρείται μεγαλύτερη ταλάντωση στην περίπτωση της διαφορικής $y''+y'+5y=0$ σε σύγκριση με την διαφορική $y''+2y'+10y=0$.

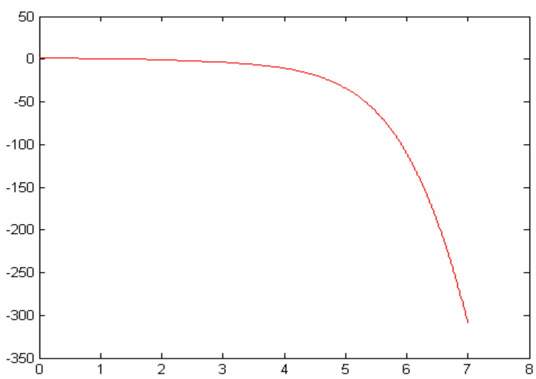
Οι τιμές του σφάλματος μεταβάλλονται ως εξής:

Για την διαφορική $y''+y'+5y=0$ το σφάλμα είναι 2.6123e-006 ,το οποίο είναι μεγαλύτερο έναντι αυτού της διαφορικής $y''+2y'+10y=0$ που είναι 3.6657e-006.

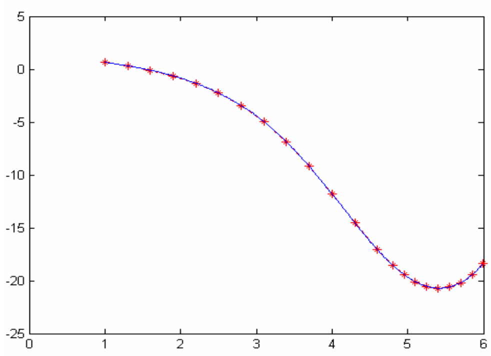
B) Γραφική απεικόνιση της διαφορικής εξίσωσης y''-sin(x)y'+cos(x)y=0 και της διαφορικής εξίσωσης y''-sin(x/2)y'+cos(x/2)y=0

y''-sin(x)y'+cos(x)y=0 $\qquad$ y''-sin(x/2)y'+cos(x/2)y=0

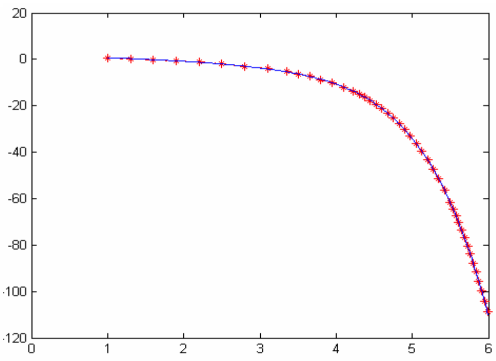




y’’-sin(x)y’+cos(x)y=0



y’’-sin(x/2)y’+cos(x/2)y=0



Παρατηρείται ότι με την μεταβολή της μεταβλητής sin(x) και cos(x) σε sin(x/2) και cos(x/2) προκαλείται μία καθυστέρηση στην γραφική μας παράσταση.

Οι τιμές του σφάλματος μεταβάλλονται ως εξής:
Για y’’-sin(x)y’+cos(x)y=0 το σφάλμα είναι 6.5072e-005 ενώ για y’’-sin(x/2)y’+cos(x/2)y=0 το σφάλμα είναι 6.9687e-004.

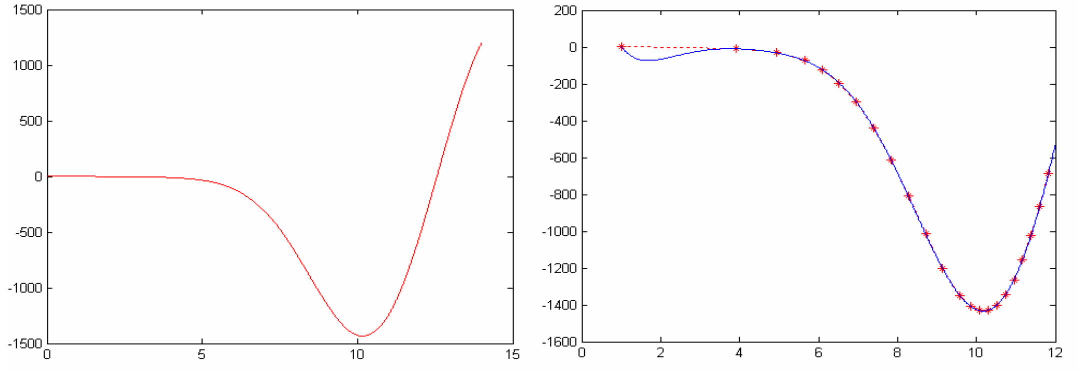
Επιχειρήσαμε να εξάγουμε την γραφική παράσταση της διαφορικής εξίσωσης y’’-sin(x/2)y’+cos(x/2)y=0 διευρύνοντας το διάστημα στο οποίο θέλουμε να την αναπαραστήσουμε.

Μεταβάλαμε τον άξονα από (0.0 , 7.0) σε (0.0 , 14.0) καθώς επίσης και το διάστημα που εμφανίζεται το βέλτιστο πολυώνυμο από (1.0 , 6.0) σε (1.0 , 12.0).

Το αρχικό συμπέρασμα το οποίο εξήχθη ήταν ο πολύ μεγάλος αριθμός σημείων στο δοθέν διάστημα. Έτσι αυξήσαμε το βήμα jstep από 3 σε 35 για να εμφανίσει λιγότερα σημεία.

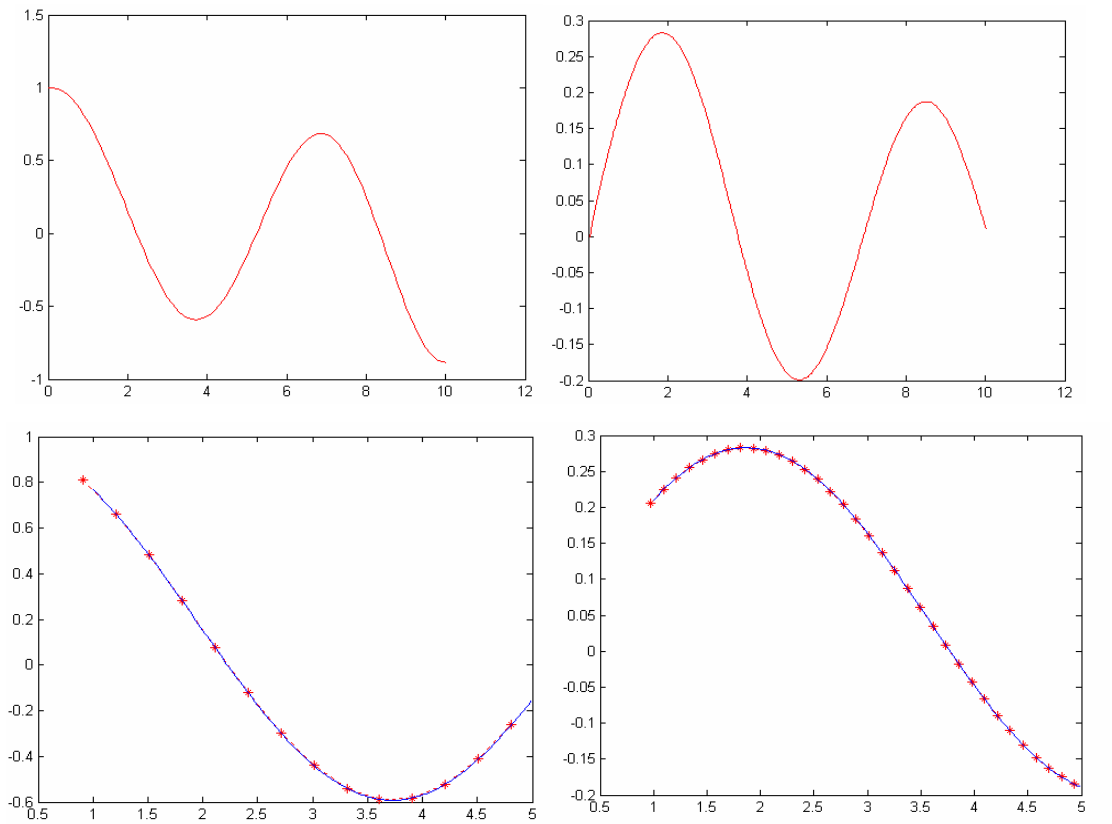
Αυτό που παρατηρήθηκε είναι πως το βέλτιστο πολυώνυμο δεν προσεγγίζει εξίσου καλά στο διάστημα από (1.0 , 4.0) όσο καλά προσεγγίζει στο διάστημα (4.0 , 12.0). Η συμπεριφορά αυτή δικαιολογείται καθώς το σφάλμα ισούται με την τιμή 0.0891. Τιμή η οποία κρίνεται ως πολύ μεγάλη.

Η παραπάνω διαδικασία μας οδήγησε στο συμπέρασμα ότι οι γραφικές παραστάσεις της παραπάνω διαφορικής με αυτήν της διαφορικής εξίσωσης y''-sin(x)y'+cos(x)y=0 , πλησιάζουν πολύ στη μορφή με διαφορετικές τιμές στον άξονα X.



Γ) Γραφική απεικόνιση της διαφορικής εξίσωσης Bessel (Τάξεως n=0) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ και της διαφορικής εξίσωσης Bessel (Τάξεως n=1) $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

n=0 n=1



Οι τιμές του σφάλματος μεταβάλλονται ως εξής:

Για n=0 είναι 4.6642e-014 το οποίο είναι αρκετά μικρότερο από την τιμή του σφάλματος την διαφορικής εξίσωσης $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ για n=1 που είναι 9.7431e-014.

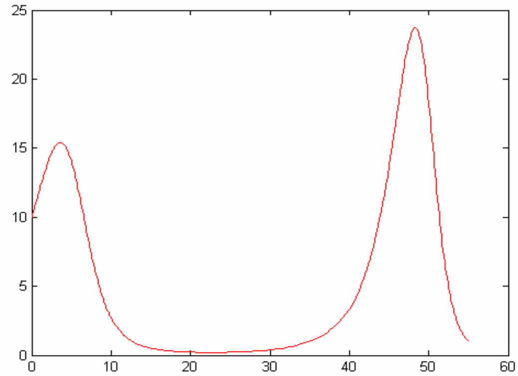
Δ) Γραφική απεικόνιση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων μη γραμμικού προβλήματος των ανταγωνιστικών πληθυσμών.

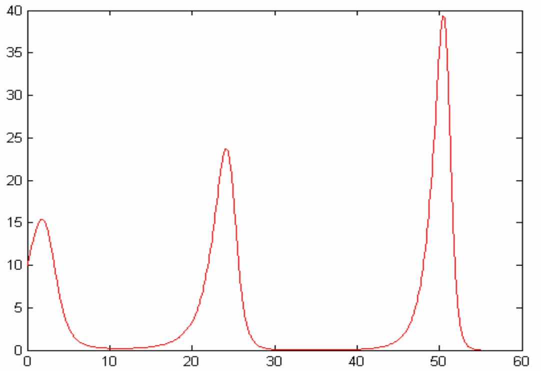
$$\frac{dy\,(1)}{dx} = a * y(1) - b * y(1) * y(2)$$

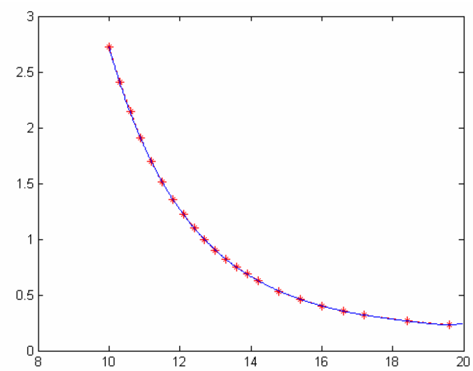
$$\frac{dy\,(2)}{dx} = -c * y(2) + d * y(1) * y(2)$$ για m=1 «θύμα»

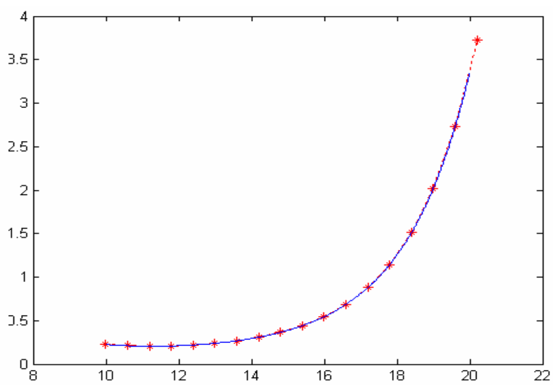
Για:

a=0.6, b=0.1, c=0.05, d=0.013 a=1.2, b=0.2, c=0.1, d=0.026









Παρατηρούμε ότι , με την μεταβολή των τιμών των συντελεστών a , b, c, d η μορφή των γραφικών παραστάσεων έχει αλλάξει ριζικά. Υπάρχει μία επανάληψη της αρχικής γραφικής παράστασης.

Συμπεραίνουμε ότι η διαφορική είναι επιρρεπής στις ταλαντώσεις, κάτι το οποίο θεωρείται απόλυτα λογικό αφού πρόκειται για ένα μη γραμμικό πρόβλημα και οποιαδήποτε μεταβολή σε κάποιον συντελεστή επιφέρει έντονες αλλαγές στο σύστημα. Αν θεωρήσουμε ότι πρόκειται για ένα σύστημα θύματος και θύτη τότε εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι η παραμικρή αλλαγή στον αριθμό των θυτών προκαλεί αλλαγή είτε στον πληθυσμό των θυμάτων είτε στην συμπεριφορά τους. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που μεταβληθεί ο πληθυσμός των θυμάτων.

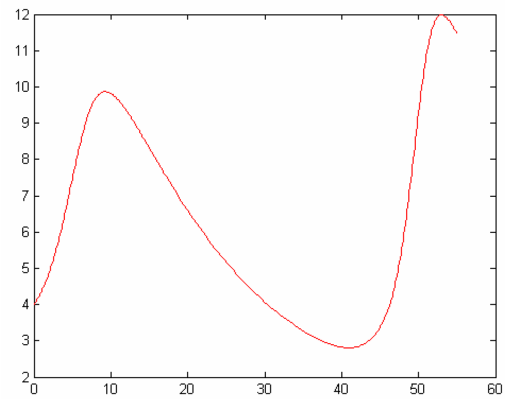
Αν θεωρήσουμε ότι η διαφορική εξίσωση $\frac{dy(2)}{dx} = -c * y(2) + d * y(1) * y(2)$ αντιστοιχεί στους θύτες τότε η παρακάτω γραφική παρουσιάζει με ιδιαίτερη σαφήνεια την αλλαγή στην συμπεριφορά των «θυτών» ανάλογα με τις μεταβολές στο εξωτερικό περιβάλλον που στην συγκεκριμένη περίπτωση το περιβάλλον ορίζεται από τους συντελεστές a, b, c, d.

$$\frac{dy(1)}{dx} = a * y(1) - b * y(1) * y(2)$$

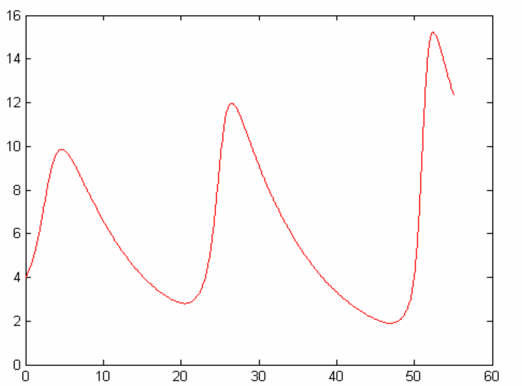
$$\frac{dy(2)}{dx} = -c * y(2) + d * y(1) * y(2)$$ για m=2 «θύτης»

Για:

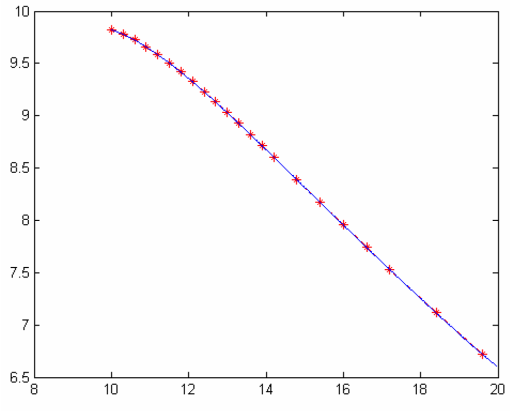
a=0.6, b=0.1, c=0.05, d=0.013



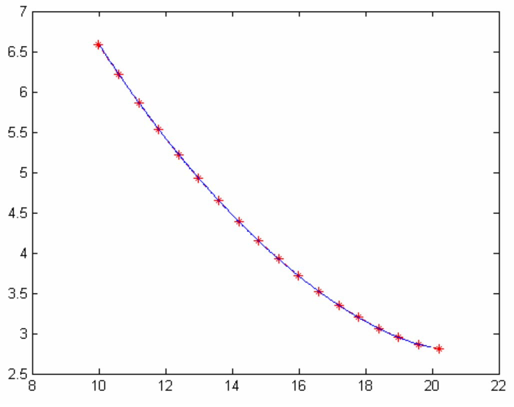
a=1.2, b=0.2, c=0.1, d=0.026



a=0.6, b=0.1, c=0.05, d=0.013



a=1.2, b=0.2, c=0.1, d=0.026



Κλείνοντας θα μπορούσαμε να πούμε πως με την παρούσα πτυχιακή εργασία δείξαμε πώς μπορεί να μελετηθεί η συμπεριφορά μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης ή ενός συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων σε συνάρτηση με κάποιον παράγοντα ο οποίος μεταβάλλεται. Συγκεκριμένα μπορούμε να παρατηρήσουμε τις μεταβολές που επέρχονται με την πάροδο του χρόνου για παράδειγμα σε μια διαφορική εξίσωση και στη γραφική τους απεικόνιση.

Η γραφική απεικόνιση επιτυγχάνεται εύκολα καθώς προσομοιώνουμε την λύση της διαφορικής με ένα πολυώνυμο και μάλιστα το βέλτιστο, που έχει βρεθεί με την χρήση των μεθόδων Runge-Kutta και Runge-Kutta Feihleberg.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7^{Ο}

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Γ.Δ. ΜΠΟΖΗ «ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ» ΕΚΔ. Α.Π.Θ. ΘΕΣ/ΝΙΚΗ 1982

2. Δρ. ΠΑΡΙΣ ΜΑΣΤΟΡΟΚΩΣΤΑΣ «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ MATLAB» ΣΕΡΡΕΣ 2001.

3. C.F. GERALD & P.O. WHEATLEY « APPLIED NUMERICAL ANALYSIS » ADDISON-WESLEY 1989

4. F. SCHEID « ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ » ΕΚΔΟΣΗ ΕΣΠΙ ΑΘΗΝΑ 1976

5. Γ.Δ. ΑΚΡΙΒΗΣ & Β.Α. ΔΟΥΓΑΛΗΣ « ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ » Π.Ε.Κ. (ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ) 1997

6. G.E. FORSYTHE, M.A. MALCOM, C-B MOLER «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥΣ » Π.Ε.Κ. 2000.

7. C.R. WYLIE « DIFFERETIAL EQUATIONS » WILEY 1979

8. MATLAB MANUAL

9. ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΑΠΑΡΡΙΖΟΣ «MATLAB 6».